Субгладкая форма теоремы об обратной и неявной функции и некоторые её приложения

Жолудева Анастасия Константиновна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра алгебры и функционального анализа (группа 601)
e-mail: Natusua.j93@mail.ru

Основную роль в наших конструкциях будут играть сублинейные многозначные ограниченные операторы с компактными выпуклыми значениями (суб–операторы). Приведем необходимый минимум информации о суб–операторах (подробнее см. [1]). Всюду далее E, F, G — вещественные банаховы пространства, F_K — конус непустых выпуклых компактов из F, снабженный sup–нормой. Нормированный конус всех суб–операторов $A:\ E \to F_K$ обозначим $L_{sub}\,(E;\,F)$.

Перейдем к вопросу об обратимости суб–операторов. Наш подход к этой проблеме опирается на возможность перехода от многозначного суб–оператора к пакету обычных линейных ограниченных операторов. Далее, $A \in L_{sub}\,(E;\,F)$,$H = \{h_i\}$ — фиксированный базис Гамеля в E.

Definition 1. *Для всякого $h_i \in H$ фиксируем произвольный элемент $a_i \in A$ и определим «базисный селектор» A_s следующим образом:*

$$\left(h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_{i_k} \in E\right) \Rightarrow \left(A_s h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k}\right).$$

Множество $A_{sub} = \{A_s\}$ назовем s-представлением субоператора A.

Definition 2. *Скажем, что субоператор A суб–обратим, если каждый оператор $A_s \in A_{sub}$ непрерывно обратим. В этом случае положим*

$$A_{sub}^{-1} = \overline{co}\left\{ A_s^{-1} \middle|\, A_s \in A_{sub} \right\}.$$

Множество всех суб–обратимых суб–операторов $A \in L_{sub}\,(E;\,F)$ обозначим $Isom_{sub}\,(E;\,F)$.

Отметим некоторые свойства операции суб–обращения.

Theorem 1. *Если суб–оператор A суб–обратим, то A_{sub}^{-1} — выпуклый компакт в $Isom\,(E;\,F)$, и, следовательно, суб–оператор A_{sub}^{-1} также суб–обратим. При этом:*

(i) $A_{sub} \preceq \left(A_{sub}^{-1}\right)_{sub}^{-1}$;

(ii) $I_E \preceq \left(A_{sub}^{-1} \cdot A_{sub}\right)_{sub}$; $\quad I_F \preceq \left(A_{sub} \cdot A_{sub}^{-1}\right)$;

(iii) $(Extr\,(A_{sub}))^{-1} \preceq Extr\left(A_{sub}^{-1}\right)$;

(iv) *Если A положительно суб–определен: $A \overset{\text{sub}}{\geqslant} 0$, то A суб–обратим.*

Далее, сформулируем аналог теоремы об обратном отображение в её субгладкой форме. Отметим, что понятие субгладкости, тесно связанное с теорией компактных субдифференциалов, введено в [2]. Далее E и F – вещественные банаховы пространства, $f : B_r(x_0) \to F,\ b = f(x_0)$

Theorem 2. *Если $f \in C^1_{sub}(U)$ и $\partial_{sub} f(x) \in \mathrm{Isom}_{sub}(E;F)$, то существуют такие открытые окрестности $V(x) \subset U$ и $W(y) \subset F$, что $f^{-1} : W \to V$ принадлежит классу $C^1_{sub}(W)$ (т.е. f есть C^1_{sub} -диффеоморфизм).*

Следствие 1. *Пусть, в условиях теоремы* (2), *$E = F = H$- гильбертово пространство. Тогда, если $\forall A^e_s \in Extr(\partial_{sub} f(x)) : A^e_s \gg 0$(равномерно по $Extr(\partial_{sub} f(x))$, то f C^1_{sub}- обратимо в окрестности x.*

Далее E, F, G – вещественные банаховы пространства, $F \cong G$, отображение $f : E \times F \to G$ определено в некоторой окрестности $U(x_0, y_0), f(x_0, y_0) = 0, f \in C^1_{sub}(x_0, y_0)$ и субдифференциал $\partial^y_{sub} f(x_0, y_0)$ суб–обратим.

Theorem 3. *Если отображение $f : E \times F \to G - C^1_{sub}$- гладкое в окрестности точки $(x_0, y_0), f(x_0, y_0) = 0$, причем частный ∂_{sub}- дифференциал $\partial^y_{sub} f(x_0, y_0)$ суб–обратим, то уравнение $f(x, y) = 0$ задает вблизи (x_0, y_0) неявное отображение $y = y(x)$ класса C^1_{sub}. При этом справедлива оценка*

$$\partial_{sub} y(x) \preceq (-(\partial^y_{sub} f(x, y))^{-1} \cdot \partial^x_{sub} f(x, y))_{sub}. \tag{1}$$

Предложение 1. *Пусть E – банахово, H – гильбертово пространство, отображение $f : E \times H \to H - C^1_{sub}$- гладкое в окрестности точки $(x_0, y_0),\ f(x_0, y_0) = 0$. Тогда:*

а) Если $\partial^y_{sub} f(x_0, y_0) \overset{sub}{\gg} 0$,то уравнение $f(x, y) = 0$ задает вблизи (x_0, y_0) неявную функцию $y = y(x)$ класса C^1_{sub}.

б) Если $H = \mathbb{R}^n$ и для всех субматриц Якоби f по y в точке (x_0, y_0) выполнено:

$$J^y_1 f(x_0, y_0) \gg 0; J^y_2 f(x_0, y_0) \gg 0; ...; J^y_{2^n} f(x_0, y_0) \gg 0 \tag{2}$$

то неявная C^1_{sub}- гладкая функция $y = y(x)$ также определена.

Перейдем к конечномерному случаю $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В этом случае крайними точками суб–оператора $\partial_{sub} f(x)$ служат 2^n субматриц Якоби $J_k(x)$, часть строк которых состоят из верхних частичных производных координатных функций $(\overline{\partial f_i/\partial x_j})$, а остальные строки из нижних частных производных $(\underline{\partial f_i/\partial x_j})$.

Предложение 2. *Пусть, в условиях теоремы* (2), $E = F = \mathbb{R}^n$. *Если* $J_k(x)$ *положительно определены:*

$$J_k(x) \gg 0 \quad (k = \overline{1, 2^n}), \tag{3}$$

то f C^1_{sub}*- обратимо в окрестности* x.

Разумеется, аналогичный результат справедлив и при $J_k(x) \ll 0 \ \ (k = \overline{1, 2^n})$.

Замечание 1. *Для наглядности, предъявим простейшие частные случаи последнего результата.*

1) $n = 1$. *В этом случае* (3) *сводится к условию* $0 \overline{\in} \left[\underline{\frac{df}{dx}}(x)\,;\ \overline{\frac{df}{dx}}(x) \right]$

2) $n = 2$.

а) f_1 *и* f_2 *покоординатно возрастают. Тогда условие* (3) *сводится к:*

$$\begin{vmatrix} \underline{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} & \frac{\overline{\partial f_1}}{\partial x_2} \\ \frac{\overline{\partial f_2}}{\partial x_1} & \underline{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}} \end{vmatrix} > 0$$

б) f_1 *и* f_2 *покоординатно убывают. Тогда условие* (3) *сводится к:*

$$\begin{vmatrix} \underline{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} & \underline{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}} \\ \underline{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}} & \underline{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}} \end{vmatrix} > 0$$

В качестве полезного класса примеров рассмотрим случай малой негладкой добавки к гладкому отображению.

Example 1. *Рассмотрим отображение*

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon \cdot |g_1(x_1, \ldots, x_n)|; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon \cdot |g_n(x_1, \ldots, x_n)|; \end{cases} \tag{4}$$

где f_i *и* $g_i (i = \overline{1, n})$*-* C^1*- гладкие функции. В этом случае применение предложения* (1) *приводит, с помощью непосредственных вычислений, к следующим условиям* C^1_{sub}*-обратимости отображения* (4)*: либо*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|; \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, \partial x_2)} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial(g_1, \partial g_2)}{\partial(x_1, \partial x_2)} \right|; \ldots; \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| \tag{5}$$

либо знаки в данной системе чередуются (начиная с $+$*).*

Наконец, также по аналогии, в конечном случае рассмотрим конкретный пример модулированной малой добавки к гладкому отображению.

Example 2. *Пусть задана система уравнений:*

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)+\varepsilon\cdot|g_1(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)|; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ f_m(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)+\varepsilon\cdot|g_m(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)|; \end{cases} \tag{6}$$

где $f_i, g_i(i=\overline{1,m})$*-*$C^1$*- гладкие отображения. В этом случае применение предложения* (1)*(в) приводит к следующим достаточным условиям существования* C^1_{sub}*- гладкой системы неявных функций* $\{y_i=y_i(x_i,...,x_n\}_{i=1}^m$*, заданных системой* (6)*: либо*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}>\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\right|;\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y_1,y_2)}>\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|;...;\frac{\partial(f_1,...,f_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}>\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial(g_1,...,g_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}\right|; \tag{7}$$

либо случай чередования знаков, отвечающий отрицательной определенности.

Example 3. *Рассмотрим частный случай предыдущего примера. Пусть*

$$\begin{cases} f_1\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\widetilde{f_1}\left(x_1\right)+\left(y_1-y_2\right) \\ f_2\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\widetilde{f_2}\left(x_2\right)+\left(y_1+y_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\widetilde{g_1}\left(x_1\right)+\left(y_1+y_2\right) \\ g_2\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\widetilde{g_2}\left(x_2\right)+\left(y_1+y_2\right) \end{cases}$$

где $\widetilde{f_1},\widetilde{f_2},\widetilde{g_1},\widetilde{g_2}$ *– гладкая добавка.*
Тогда

$$\begin{cases} \widetilde{f_1}\left(x_1\right)+\left(y_1-y_2\right)+\varepsilon\cdot\left|\widetilde{g_1}\left(x_1\right)+\left(y_1+y_2\right)\right|; \\ \widetilde{f_2}\left(x_2\right)+\left(y_1+y_2\right)+\varepsilon\cdot\left|\widetilde{g_2}\left(x_2\right)+\left(y_1+y_2\right)\right|; \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (7)*:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}>\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\right|$$
$$1>\varepsilon\cdot 1\Rightarrow\varepsilon<1.$$

$$\frac{\partial\left(f_1,\,f_2\right)}{\partial\left(y_1,\,y_2\right)}>\varepsilon\cdot\left|\frac{\partial\left(g_1,\,g_2\right)}{\partial\left(y_1,\,y_2\right)}\right|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > \varepsilon \cdot \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$
$$2 > \varepsilon \cdot 2 \Rightarrow \varepsilon < 1.$$

Список литературы

[1] Орлов И. В. *Теоремы об обратной и неявной функциях в классе субгладких отображений.* – Матем. заметки – 2016 – №99(4) – с. 631–634

[2] Orlov I. V., Smirnova S. I. *Invertibility of multivalued sublinear operators.* –Eurasian Mathematical Journal – 2015 – Volume 6 – Number 4 – c. 44–58