

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия

ТАВРИЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ



20-21 апреля 2016
Симферополь

Редакционный совет:

Муратов М. А., д.ф.-м.н., профессор, декан факультета математики и информатики

Анашкин О. В., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и геометрии

Донской В. И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой информатики

Копачевский Н. Д., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа

Орлов И. В., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа

Рудницкий О. И., к.ф.-м.н., доцент, заместитель директора по учебной работе

Чехов В. Н., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики

Техническая группа:

Марянин Б. Д., к.ф.-м.н., доцент, ответственный редактор

Сёмкина Е. В., к.ф.-м.н., преподаватель, выпускающий редактор

СЕКЦИИ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ:

1. МАТЕМАТИКА, председатель Копачевский Н. Д.
математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра,
функциональный анализ, геометрия

2. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, председатель Чехов В. А.
математические модели в естествознании, численные методы решения
математических задач

3. ИНФОРМАТИКА, председатель Донской В. И.
прикладная информатика, программное обеспечение компьютерных систем

Секция
МАТЕМАТИКА

**Вопросы возникновения и развития теории
чисел в учебном курсе "История математики"**

Александрова Татьяна Вячеславовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)

e-mail: atv-19-04-1993@mail.ru

История математики как учебная дисциплина математических факультетов университетов выступает, с одной стороны, как часть истории науки, тесно связанная с философией, а с другой - как дисциплина, изучающая саму математику, рассматриваемую в историческом измерении. Место и роль истории математики, как в обществе, так и в системе знаний, которыми должен овладеть квалифицированный специалист-математик, в полной мере характеризуют слова отечественного математика В. В. Бобынина: "Так как математика ранее других наук возвысилась на степень науки в настоящем смысле этого слова и затем сделалась дедуктивной, то история её развития может быть по справедливости названа частью истории чистого мышления или истории развития человеческого духа". В истории математики, наряду с общими вопросами (хронология и периодизация развития науки и т.д.), особое внимание уделяется истории основных разделов математики, включённых в учебные планы. А именно: математического анализа, алгебры, геометрии, теории вероятностей, функционального анализа и др. Данная статья посвящена вопросам развития теории чисел. Известно, что теория чисел изучает свойства целых, рациональных и алгебраических чисел, а также свойства любых других чисел, вытекающие из приближений их рациональными числами. По мнению Д. А. Граве, она является фундаментом для всей математики. Более того, теория чисел не только широко использует методы, разработанные в смежных математических дисциплинах, но и сама влияет на формирование этих дисциплин.

В первый период развития теории чисел (период античности) наиболее важные вопросы теоретико-числовых исследований отражены в трудах древнегреческих математиков и философов Пифагора, Евклида и Диофанта. Благодаря Пифагору и его школе, происходит зарождение теории чисел. В част-

ности, осуществлена классификация натуральных чисел. Отметим, что пифагорейский союз имел мистическую направленность, которая в значительной мере отразилась на развитии математического знания. Так, первым десяти числам натурального ряда пифагорейцами ставились в соответствие категории, которые определяли их бытие или мировоззрение. Несмотря на то, что в научном творчестве Евклида теоретико-числовые исследования занимают сравнительно небольшое место, у него мы встречаем ряд основных положений теории делимости и, хотя простой, но чрезвычайно важный результат - множество простых чисел бесконечно. Диофант рассмотрел ряд задач о представимости чисел в определённой форме и более общие задачи решения неопределённых уравнений в целых и рациональных числах. Именно эти задачи позднее явились точкой отсчета для всей теории форм и той базой, откуда возникла проблематика теории диофантовых приближений.

Итак, Пифагор, Евклид, Диофант заложили фундамент для такого интересного и важного раздела математики как теория чисел.

Следующий этап в развитии теории чисел приходится на позднее Средневековье, эпоху Возрождения и Новое время. В Европе, начиная с эпохи крестовых походов вплоть до XVII в., развитие теории чисел, как и всей математики, было очень медленным. Математики обычно рассматривали только отдельные конкретные задачи теоретико-числового характера. Общие методы были почти неизвестны. В основном развивалась практическая арифметика действий. Наибольший след в дальнейшем развитии теории чисел оставили работы Л. Пизанского и Л. Пачоли. Французский математик П. Ферма получил основной результат теории делимости - делимость на заданное простое число и решил ряд важных задач теории диофантовых уравнений. Именно начиная с работ П. Ферма, теория чисел приобрела статус раздела математической науки.

В XVIII в. Л. Эйлер значительно продвинул вперёд развитие теории чисел. Математик обобщил основной результат П. Ферма для случая делимости на составные числа, создал общую теорию. В, так называемых, степенных вычетах получил очень большое число разнообразных результатов о представимости чисел в виде форм определённого типа, исследовал ряд систем диофантовых уравнений и получил интересные результаты о разбиении чисел на слагаемые. У Эйлера мы впервые встречаемся с идеей применения методов математического анализа к задачам теории чисел. Рассмотрение бесконечных рядов и произведений явилось у Эйлера действенным орудием для получения теоретико-числовых результатов.

После работ Эйлера почти все крупные математики XVIII-XIX вв. в той или иной степени занимаются теорией чисел. В частности, существенный след в развитии теории чисел оставили Ж. Лагранж, Дж. Валлис, А. Лежандр и У. Варинг. Ж. Лагранжу удалось свести в единый закон многочисленные теоремы П. Ферма и Л. Эйлера и внести вклад в теорию квадратичных форм, которая получила позднее своё развитие. Дж. Валлис предположил, что всякое число можно разложить на простые множители единственным образом и благодаря этому смог решить некоторые задачи, поставленные П. Ферма. Все математики этого времени искали общее аналитическое выражение для представления простых чисел. А. Лежандру удалось доказать, что это выражение не может быть рациональным и он потерял надежду, что его удастся найти. А. Лежандр доказал квадратичный закон взаимности и предложил "символы Лежандра", изложил полную теорию непрерывных дробей и их применения для решения диофантовых уравнений. У. Варинг выдвинул еще одну важную теорему, так называемую "Проблема Варинга", которая впервые была решена в общем виде в 1909 г. Д. Гильбертом.

Работы Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и А. Лежандра создали базу для цельной теории, получившей позже у Гаусса название теории сравнений.

С конца XIX до начала XX вв. все разделы математики, в т. ч. теория чисел, получили чрезвычайное развитие, которое превосходило все предыдущие периоды не только по количеству работ, но также по совершенству и силе методов. В XIX в. над теорией чисел работали многие видные учёные - И. К. Ф. Гаусс, П. Г. Лежен-Дирихле, Ш. Эрмит, П. Л. Чебышёв, Е. И. Золотарев, А. Н. Коркин, А. А. Марков.

Новая эпоха в истории теории чисел началась с выходом в 1801 г. работы К. Гаусса "Арифметические исследования". Главным орудием К. Гаусса является понятие сравнения, он смог оценить его значение и сделать общеприменимым, благодаря введению подходящего обозначения, с помощью которого можно производить вычисления. К. Гаусс привёл и строго доказал теоремы о квадратичных вычетах и невычетах, создал элементарную теорию бинарных квадратичных форм, включающую в себя, результаты полученные Л. Эйлером, Ж. Лагранжем, А. Лежандром и развивал их в различных направлениях. После работ К. Гаусса в течение всего XIX в. и до сегодняшнего дня исследования по теории чисел приобретают всё увеличивающийся размах.

Вслед за К. Гауссом, общую теорию квадратичных форм разрабатывал П. Г. Лежен-Дирихле. Он рассмотрел вопросы о представлении чисел квадратичными формами, простых делителях квадратичных форм и некоторые другие. В связи с доказательством теоремы о бесконечности количества простых

чисел в арифметической прогрессии использовал свойство конечности числа классов квадратичных форм данного дискриминанта. Ввёл в теорию чисел новые понятия: "характеры" и "ряды Дирихле". Впервые сформулировал в общем виде понятие асимптотического закона и дал ряд примеров установления асимптотических формул. Другим крупнейшим учёным, работавшим в области теории квадратичных форм, был Ш. Эрмит которому принадлежит доказательство трансцендентности и иррациональности числа e , введение понятия билинейных форм с сопряжёнными переменными ("Эрмитовых форм"). Он один из первых поставил вопрос об определении границ минимумов квадратичных форм.

В начале своего научного пути П. Л. Чебышёв обратил на себя внимание математиков всего мира двумя сочинениями по теории чисел: "Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины" (1849 г.) и "О простых числах" (1852 г.). Основные направления его исследований в области теории чисел - это теория распределения простых чисел, теория рядов, общий член которых - функция простых чисел, вопросы теории квадратичных форм, диофантовы приближения и обобщение алгоритма непрерывных дробей. До П. Л. Чебышёва вопросы распределения простых чисел в натуральном ряду решались на основании не всегда обоснованных предположений. Вопрос о том, по каким законам распределены простые числа оставался без ответа со времён Евклида, хотя им занимались крупнейшие математики мира, в том числе Л. Эйлер и К. Гаусс. Научные открытия П. Л. Чебышёва в области простых чисел принесли славу отечественной математической науке и оказали огромное влияние на научное творчество многих выдающихся учёных России и других стран. Его считают основоположником российской научной школы по теории чисел. Его ученики Е. И. Золотарёв, А. Н. Коркин, А. А. Марков и др. значительно продвинули теорию квадратичных форм.

Таким образом, теория чисел прошла долгий путь от отдельных задач до почётной составляющей математической науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Башмакова И. Г. *Диофант и диофантовы уравнения*. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
- [2] Болгарский Б. В. *Очерки по истории математики*. – Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 368 с.
- [3] Бухштаб А. А. *Теория чисел*. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
- [4] *Математика XIX века* [под ред. А. Н. Колмогорова, А. П. Юшкевича]. – М.: Наука, 1978. – 256 с.
- [5] Рыбников К. А. *История математики. Часть 1*. – М.: Изд-во Московского университета, 1960 – 191 с.

- [6] Стиллвелл Д. *Математика и её история*. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004 – 530 с.

Алгебры Наймарка и теорема Фуглида

Асанов Ремзи Музакерович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: remziasanov@gmail.com

Пусть \mathcal{A} – инволютивная алгебра над полем комплексных чисел и $a \in \mathcal{A}$ – нормальный элемент, т.е. $a^*a = aa^*$. Алгебра является *фуглидовой*, или F – алгеброй, если из условия, что $x \in \mathcal{A}$ коммутирует с нормальным элементом $a \in \mathcal{A}$, следует, что он коммутирует и с его сопряженным a^* :

$$xa = ax, \quad aa^* = a^*a \Rightarrow xa^* = a^*x.$$

(F) – алгебрами являются: алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H , и значит, все её *-подалгебры; C^* -алгебры; любая коммутативная *-алгебра.

Инволютивная алгебра $(\mathcal{A}, *)$ называется "условно фуглидовой" или (CF)-алгеброй, если из условия, что нормальный элемент $x \in \mathcal{A}$ коммутирует с нормальным элементом $a \in \mathcal{A}$, следует, что он коммутирует и с его сопряженным a^* :

$$xa = ax, \quad xx^* = x^*x, \quad aa^* = a^*a \Rightarrow xa^* = a^*x.$$

В (CF)-алгебрах всякое коммутативное семейство нормальных операторов содержится в максимальной коммутативной *-алгебре.

Пусть H – гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{N}(H)$ совокупность всех троек $\xi = (A, x, y)$, где $x, y \in H$, $A \in \mathcal{B}(H)$. В $\mathcal{N}(H)$ вводятся алгебраические операции и инволюция:

$$1). \text{ Сложение: } (A_1, x_1, y_1) + (A_2, x_2, y_2) = (A_1 + A_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 + A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

$$2). \text{ Умножение на скаляр: } \lambda(A, x, y) = (\lambda A, \bar{\lambda}x, \lambda y),$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda A & 0 \\ 0 & 0 & \lambda y \end{pmatrix}$$

3). Умножение: $(A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2) = (A_1 A_2, A_2^* x_1, A_1 y_2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix};$$

4). Инволюция: $(A, x, y)^* = (A^*, y, x)$,

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. $\mathcal{N}(H)$ — ассоциативная $*$ -алгебра.

Доказательство. Покажем ассоциативность умножения:

$$\left((A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2) \right) \circ (A_3, x_3, y_3) = (A_1, x_1, y_1) \circ \left((A_2, x_2, y_2) \circ (A_3, x_3, y_3) \right).$$

Так как

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^* A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 A_2 y_3 \end{pmatrix},$$

то $\left((A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2) \right) \circ (A_3, x_3, y_3) = (A_1 A_2 A_3, A_3^* A_2^* x_1, A_1 A_2 y_3)$.

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^* x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 y_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A_3^* x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^* A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 A_2 y_3 \end{pmatrix},$$

т.е. $(A_1, x_1, y_1) \circ \left((A_2, x_2, y_2) \circ (A_3, x_3, y_3) \right) = (A_1 A_2 A_3, A_3^* A_2^* x_1, A_1 A_2 y_3)$.

Следовательно умножение в алгебре $\mathcal{N}(H)$ — операция ассоциативная. \square

Утверждение 2. $\mathcal{N}(H)$ — $*$ -алгебра.

Доказательство. Покажем, что в алгебре выполнены свойства инволюции.

Так как

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}^{**} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & (A^*)^* & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

то $((A, x, y)^*)^* = (A, x, y)$.

Далее,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 + A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 + y_2 \end{pmatrix}^* = \\ & = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 & 0 & 0 \\ 0 & (A_1 + A_2)^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* + A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix}^*, \end{aligned}$$

т.е. $((A_1, x_1, y_1) + (A_2, x_2, y_2))^* = (A_2, x_2, y_2)^* + (A_1, x_1, y_1)^*$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix}^* = \\ & = \begin{pmatrix} A_1 y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & A_2^* x_1 \end{pmatrix}; \\ & \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix}^* \circ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} A_1 y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & A_2^* x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому $((A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2))^* = (A_2, x_2, y_2)^* \circ (A_1, x_1, y_1)^*$.

Наконец,

$$\begin{aligned} \left(\lambda \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \right)^* &= \begin{pmatrix} \bar{\lambda}x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda A & 0 \\ 0 & 0 & \lambda y \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \lambda y & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}A^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}x \end{pmatrix} = \\ &= \bar{\lambda} \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}^* . \end{aligned}$$

Следовательно, $(\lambda(A, x, y))^* = \bar{\lambda}(A, x, y)^*$. Таким образом, $\mathcal{N}(H)$ – алгебра с инволюцией. \square

Утверждение 3. $\mathcal{N}(H)$ – банахова $*$ -алгебра относительно нормы

$$\|(A, x, y)\| = \|A\|_{\mathcal{B}(H)} + \|x\|_H + \|y\|_H.$$

Доказательство. Легко видеть, что $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$ – нормированное пространство. Пусть $\{(A_n, x_n, y_n)\}$ – фундаментальная последовательность в $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для любых $n, m \geq n_0$ выполнено неравенство

$$\|(A_n, x_n, y_n) - (A_m, x_m, y_m)\| < \varepsilon.$$

Тогда $\|A_n - A_m\|_{\mathcal{B}(H)} + \|x_n - x_m\|_H + \|y_n - y_m\|_H < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{A_n\}$ фундаментальна в $\mathcal{B}(H)$, а последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – фундаментальны в H . Так как $\mathcal{B}(H)$ – банахова алгебра, а H – гильбертово пространство (а потому банахово), то все три последовательности сходятся:

$$A_n \rightarrow A_0 \in \mathcal{B}(H), \quad x_n \rightarrow x_0 \in H, \quad y_n \rightarrow y_0.$$

Поэтому $(A_n, x_n, y_n) \rightarrow (A_0, x_0, y_0) \in \mathcal{N}(H)$, т.е. $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$ – банахово пространство. \square

Замкнутые $*$ -подалгебры алгебры $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$ называются *алгебрами Наймарка*.

Теорема 1. *Всякая алгебра Наймарка условно фуглидова.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р.С.Исмагилов, "О неприводимости представлений групп измеримых токов," *Функци. анализ и его прил.*, 28:2 (1994), 21–30.
- [2] Fuglede B. A commutativity Theorem for Normal Operators/ B.Fuglede// Proc. Nat. Acad. Sci USA. – 1950. – Vol. 36. – P. 35-40.
- [3] М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, В. С. Шульман, "Теорема Фуглида–Патнэма в алгебрах с инволюциями Матем. заметки, 98:4 (2015), 483 – 497.

- [4] В. С. Шульман, "Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа Π_1 Матем. сб., 89(131):2(10) (1972), 264 – 279.

s - числа измеримых операторов

Белялова Азизе Рустемовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: asya1933matan@mail.ru

При построении симметричных пространств измеримых функций существенную роль играют убывающие перестановки. Аналогичную роль в некоммутативном случае играют убывающие перестановки измеримых операторов. Впервые определение убывающей перестановки измеримых операторов было дано В.И.Овчинниковым [3], позднее — несколько иначе, М.Г.Сонисом [2]. Цель данной работы рассмотреть оба определения убывающих перестановок измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, с мерой Сигала на проекторах, и провести их сравнение.

*-Алгебры $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана впервые появились в работе Е.Сигала(1953). Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H и \mathcal{M} — *-подалгебра в $B(H)$. Через \mathcal{M}' обозначается коммутант $\mathcal{M} \subseteq B(H)$, а через \mathcal{M}'' — бикоммутант.

*-Подалгебра $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ называется алгеброй фон Неймана, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

Пусть $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} и $S(\mathcal{M})$ — *-алгебра всех измеримых относительно \mathcal{M} линейных операторов. Оператор $T \in S(\mathcal{M})$ с областью определения $D(T)$ называется τ -измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P(H) \subseteq D(T)$ и $\tau(P^\perp) \leq \varepsilon$

Обозначим множество всех τ -измеримых относительно \mathcal{M} операторов через $S(\mathcal{M}, \tau)$. Ясно, что $\mathcal{M} \subseteq S(\mathcal{M}, \tau) \subseteq S(\mathcal{M})$.

Функцией распределения оператора T из $S(\mathcal{M}, \tau)$ называется функция $n(T)(t)$, определяемая равенством:

$$n(T)(t) = \tau(E_{(t, \infty)}(|T|)), \quad t \geq 0,$$

где $E_{(t, \infty)}(|T|)$ спектральный проектор оператора $|T|$, соответствующий интервалу (t, ∞) .

Невозрастающей перестановкой оператора $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ (по Овчинникову) называется функция

$$\mu(T) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

определяемая равенством:

$$\mu(T)(t) = \inf\{\|TP\|_{\mathcal{M}} : P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0$$

Линейный оператор A с областью определения $D(A)$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана \mathcal{M} ($A\eta\mathcal{M}$), если $UD(A) \subseteq D(A)$ и $UA \subseteq AU$ для любого унитарного оператора U из коммутанта \mathcal{M}' .

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ - множество ортопроекторов алгебры фон Неймана \mathcal{M} . Мерой на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ (мерой Сигала) называется отображение $m : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow [0; \infty)$, которое обладает следующими свойствами:

- (1) Если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $P_1 \perp P_2$, то $m(P_1 + P_2) = m(P_1) + m(P_2)$;
- (2) Если $\{P_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $P_\alpha \uparrow P$, то $m(P_\alpha) \uparrow m(P)$;
- (3) Если U — унитарный оператор из \mathcal{M} и $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, то $m(U^*PU) = m(P)$.

Легко видеть, что если τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана \mathcal{M} , то $m = \tau|_{\mathcal{P}(\mathcal{M})}$ — мера Сигала.

Пусть оператор $A\eta\mathcal{M}$ и P — проектор на замкнутое подпространство $\overline{A(H)}$. Метрическим рангом $r(A)$ оператора A называется мера Сигала проектора P , т.е. $r(A) = \tau(P)$.

Для любого $A \in \mathcal{M}$ и $t \geq 0$ значения функции

$$s_t(A) = \inf\{\|A - K\| : K \in \mathcal{M}, r(K) \leq t < \infty\}, \quad s_\infty(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} s_t(A)$$

называются s - числами оператора A (по Сонису).

Теорема 1. Если $T \in \mathcal{M}$, то функции $\mu(T)(t)$ и $s_t(T)$ совпадают, т.е. $\mu(T)(t) = s_t(T)$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{M}$ и

$$s_t(T) = \inf\{\|T - R\| : R \in \mathcal{M}, r(R) \leq t < \infty\}$$

Обозначим

$$\mathfrak{R}_t = \{R \in S(\mathcal{M}, \tau) : \tau(s(|R|)) \leq t\},$$

где $s(|R|)$ — носитель оператора $|R|$. Так как $r(K) = \tau(s(|R|))$, то

$$s_t(T) = \inf\{\|T - R\|_{\mathcal{M}} : R \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{R}_t\}.$$

Покажем, что $\mu(T)(t) = s_t(T)$.

Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T , $\mu(T)(t) = \alpha$ и

$$R = U \int_{\alpha}^{\infty} \lambda dE_{\lambda},$$

где $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \geq 0}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T|$. Тогда

$$\|T - R\|_{\mathcal{M}} = \left\| U \int_0^{\alpha} \lambda dE_{\lambda} \right\|_{\mathcal{M}} = \|UE_{(0,\alpha]}(|T|)T|E_{(0,\alpha]}(|T|)\|_{\mathcal{M}} \leq \alpha = \mu(T)(t).$$

При этом

$$\tau(s(|R|)) = n(T)(\alpha) = n(T)(\mu(T)(t)) \leq t,$$

то есть,

$$\beta = \inf\{\|T - R\|_{\mathcal{M}} : R \in \mathfrak{R}_t \cap \mathcal{M}\} \leq \mu(T)(t).$$

С другой стороны, пусть $R \in \mathfrak{R}_t \cap \mathcal{M}$ и $E = I - s(|R|)$. Так как $TE = (T - R)E$, то $\|TE\|_{\mathcal{M}} \leq \|T - R\|_{\mathcal{M}}$. Кроме того, $\tau(I - E) = \tau(s(|R|)) \leq t$. Следовательно,

$$\mu(T)(t) \leq \beta.$$

Таким образом,

$$\mu(T)(t) = \beta = \inf\{\|T - R\|_{\mathcal{M}} : R \in \mathfrak{R}_t \cap \mathcal{M}\} = s_t(T).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов* — Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — т.69.— 390с.
- [2] М. Г. Сонис *Об одном классе операторов в алгебрах фон Неймана с мерой Сигала на проекторах* — Матем. сб., 1971 — том 84(126), номер 3, 353–368
- [3] В. И. Овчинников *О s-числах измеримых операторов* — Функци. анализ и его прил., 1970 — том 4, выпуск 3, 78–85
- [4] Strătilă S., L. Zsidó L.. *Lectures on von Neumann algebras* — Bucharest: Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.

Интегро-дифференциальные уравнения типа Бенджамина-Оно

Быкова Екатерина Олеговна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: yadoog@rambler.ru

В монографии В.И. Жука [1] для исследования гидродинамической устойчивости используется нелинейная асимптотическая теория взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком, которая базируется на решении уравнений Бюргерса, Бенджамина-Оно (БО), Кордевега-де Вризи, интегро-дифференциальных уравнениях.

Нелинейное эволюционное уравнение

$$u_t + uu_x = H\{u_{xx}\}, H\{u\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ud\xi}{\xi - x}, \quad (1)$$

где H – оператор Коши-Гильберта, предложено Бенджамином [2] и позже Оно [3] для описания внутренних волн в стратифицированной жидкости. Более общим является интегро-дифференциальное уравнение [4] для длинных гравитационных волн в стратифицированной конечной глубины и содержит уравнение Бенджамина-Оно в приближении глубокой воды, а в приближении мелкой воды переходит в уравнение Кордевега-де Вриза [4].

Уравнение Бенджамина-Оно также связано с исследованием процессов распространения возмущений в пограничном слое [1]. Возмущения, при определенных амплитудах и длинах волн, в пограничном слое подчиняются уравнениям Бюргерса

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \quad (2)$$

и Бенджамина-Оно в условиях сверх- и дозвукового обтекания соответственно.

Неоднородное уравнение Бенджамина-Оно

$$u_t + uu_x = H\{u_{xx}\} - \varphi(x, t) \quad (3)$$

связано с эволюцией возмущений в дозвуковом пограничном слое, неоднородный член $\varphi(x, t)$ соответствует наличию короткой неровности на обтекаемой твердой поверхности [1]:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\xi\xi} d\xi}{\xi - x},$$

$y = g(x, t)$ – подвижный контур (обтекаемая поверхность).

В качестве примеров неоднородности используют углубление на поверхности с формой

$$g = \begin{cases} -H(t)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2b}\right), & |x| < b, \\ 0, & |x| > b, \end{cases}$$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ g_0 t, & 0 < t < 1, \\ g_0, & t > 1, \end{cases}$$

$$\varphi = H\{g_{xx}\}, \quad t > 0.$$

Для тестовых примеров используется точное решение однородного уравнения Бенджамина-Оно

$$u = -a \left[1 + \frac{a^2}{16} \left(x + \frac{a}{4} t \right)^2 \right]^{-1}, \quad a > 0.$$

Стационарное решение $u(x, t) = f(x)$ для уравнения (0.2)-(3) удовлетворяет уравнениям

$$f f' - f'' = 0, \quad f f' - H\{f''\} = 0.$$

Для уравнения Бюргера (0.2)

$$u = -c_0 \left\{ 1 + th \left[\frac{c_0}{2} (x - x_0) \right] \right\}.$$

Периодическая задача Коши для уравнения типа БО

$$u_t = uu_x + H_{per} u_{xx}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{T},$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}/2L\mathbb{Z},$$

где $u_0 - 2L$ периодическая функция, а

$$H_{per} x = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L ctg\left(\frac{\pi y}{2L}\right) u(x-y) dy.$$

уравнения типа БО для внутренних волн стратифицированной жидкости имеет вид [4]:

$$u_t - cuu_x + Tu_{xx} = 0,$$

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ cth \frac{\pi(y-x)}{2d} - sign(y-x) \right\} \frac{f(y)}{2d} dy$$

и переходит в пределе в уравнение Кордевега-де Вриза.

Линеаризованное уравнение БО (0.1) сведено к уравнению Шредингера, с помощью интегральных преобразований получены решения приведенных уравнений с добавленным интегральным оператором типа свертки. В общем случае задачи для уравнений типа БО сведены к нелинейным интегральным уравнениям удобным для численного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жук В.И. *Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны*. – М.: Наука, 2001. – 167 с.
 [2] Benjamin T.B. *Lectures on Nonlinear Wave Motion // Lecture Notes in Applied Mathematics*. – №15, 1974. – P. 3-47.
 [3] Оно Н. *Algebraic solitary waves in stratified fluids // J. Phys. Soc. Japan*. – №39 (4), 1975. – P.1082-1091.
<http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.39.1082>
 [4] Joseph R.I. *Solitary waves in a finetdepth fluid // J. Phys. A*. – Vol.10. – №12, 1977. – P.L225-L227.

Решение задач на условный экстремум методом введения вспомогательного параметра

Домбровская Альбина Геннадьевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: albinna_dombrovskaya@mail.ru

Известно, что имеются классические методы решения задач на условный экстремум такие как: метод исключения части переменных, метод множителей Лагранжа [1]. В данной работе представлен элементарный метод решения задач на условный экстремум двух переменных — метод введения вспомогательного параметра. Суть метода состоит в том, что если ввести параметр вместо условия на экстремум, тогда решение задачи сводится к нахождению экстремального значению параметра при котором система имеет решение.

Пусть требуется найти экстремумы функции двух переменных

$$\begin{cases} f(x; y) \rightarrow extr, \\ g(x; y) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

или

$$\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) \rightarrow extr. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим некоторые типы задач на условный экстремум в зависимости от того, что представляют собой функции $f(x; y)$ и $g(x; y)$.

1. **Окружность–прямая.** В этом случае $f(x; y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ — окружность, $g(x; y) = ax + by + c$ — прямая. Тогда задача на условный

экстремум может быть записана в виде

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \rightarrow \text{extr}, \\ ax + by + c = 0; \end{cases} \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \\ ax + by + c \rightarrow \text{extr}. \end{cases} \quad (4)$$

2. Гипербола–прямая. В этом случае $f(x; y) = (x - x_0)(y - y_0)$ — гипербола, $g(x; y) = ax + by + c$ — прямая. Задача на условный экстремум может иметь вид

$$\begin{cases} (x - x_0)(y - y_0) \rightarrow \text{extr}, \\ ax + by + c = 0; \end{cases} \quad (5)$$

или

$$\begin{cases} (x - x_0)(y - y_0) = d, \\ ax + by + c \rightarrow \text{extr}. \end{cases} \quad (6)$$

3. Парабола–прямая. Где $f(x; y) = a(x - x_0)^2 + y_0$ — парабола, $g(x; y) = ax + by + c$ — прямая. Задача на условный экстремум имеет вид

$$\begin{cases} a(x - x_0)^2 + y_0 \rightarrow \text{extr}, \\ ax + by + c = 0; \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} y = a(x - x_0)^2 + y_0, \\ ax + by + c \rightarrow \text{extr}. \end{cases} \quad (8)$$

Введем вспомогательный параметр p . Тогда условие этой задачи можно переформулировать. Найти максимальное и минимальное значение параметра p , при котором имеет решение система (9) (или система (10)).

$$\begin{cases} f(x; y) = p, \\ g(x; y) = 0; \end{cases} \quad (9)$$

или

$$\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) = p. \end{cases} \quad (10)$$

Существует по меньшей мере три элементарных способа решения каждой из задач — графический, через дискриминант и переход к параметрическим координатам.

Рассмотрим некоторые примеры решения задач нахождения экстремума методом введения вспомогательного параметра. Решая систему (9) (или систему (10)) методом подстановки, получим квадратное уравнение относительно параметра p , где дискриминант $D \geq 0$ — условие существования решения.

Пример 1. Найти условный экстремум функции $f(x; y) = x^2 + y^2$, если $x + y - 2 = 0$.

Решение. Введем вспомогательный параметр p . Следовательно, будем искать максимальное и минимальное значение параметра p , при котором имеет решение система (11)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решая систему (5) методом подстановки, получим

$$x^2 - 4x + (4 - p) = 0.$$

Дискриминант $D = 16 - 8(4 - p) \geq 0$, тогда $p \geq 2$. Следовательно, $p_{\min} = 2$, т.е. наименьший радиус окружности $R = \sqrt{2}$, при котором имеется общая точка с прямой $x + y - 2 = 0$.

Ответ. $f_{\min} = 2$, f_{\max} — не существует.

Пример 2. Найти условный экстремум функции $f(x; y) = 2x + 3y$, если $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Аналогично, введем вспомогательный параметр p . Будем искать максимальное и минимальное значение параметра p , при котором имеет решение система (12)

$$\begin{cases} 2x + 3y = p, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему (7) методом подстановки, получим

$$13x^2 - 4px + (p^2 - 36) = 0.$$

Дискриминант $D = 16p^2 - 52(p^2 - 36) \geq 0$, тогда имеем $p^2 \leq 52$, т.е. $-2\sqrt{13} \leq p \leq 2\sqrt{13}$. Следовательно, $p_{\min} = -2\sqrt{13}$, $p_{\max} = 2\sqrt{13}$.

Ответ. $f_{\min} = -2\sqrt{13}$, $f_{\max} = 2\sqrt{13}$

Пример 3. Найти экстремум функции $f(x; y) = (y-2)x$, если $y-2x-3 = 0$.

Решение. Введем вспомогательный параметр p . Значение параметра p , при котором имеет решение система (13) — экстремум функции $f(x; y)$.

$$\begin{cases} (y-2)x = p, \\ y-2x-3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решая систему (13), получим

$$2x^2 + x - p = 0.$$

Дискриминант $D = 1 + 8p \geq 0$, тогда $p \geq -0,125$. Следовательно, $p_{\min} = -0,125$.

Ответ. $f_{\min} = -0,125$, f_{\max} — не существует.

Пример 4. Найти экстремум функции $f(x; y) = 2y + x - 4$, если $y = 1 - (x + 3)^2$.

Решение. Введем вспомогательный параметр p . Значение параметра p , при котором имеет решение система (14) — экстремум функции $f(x; y) = 2y + x - 4$.

$$\begin{cases} 2y + x - 4 = p, \\ y = 1 - (x + 3)^2. \end{cases} \quad (14)$$

Выразим y в первом уравнении системы (14) и подставим во второе уравнение, получим

$$2x^2 + 11x + (22 + p) = 0.$$

Дискриминант $D = 121 - 8(22 + p) \geq 0$, отсюда $p \leq 6,875$. Следовательно, $p_{\max} = 6,875$.

Ответ. $f_{\max} = 18,25$, f_{\min} — не существует.

Замечание. В задачах на условный экстремум с прямой $ax + by + c = 0$ можно брать общее уравнение кривой второго порядка $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 0$. Каждая такая задача сводится к квадратному уравнению, если решать через дискриминант.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. *Вариационное исчисление*. — М.: Изд-во «Наука», — 1973.
- [2] Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. *Задачи с параметрами*. — К.: РИА "Текст"; МП "ОКО — 1992 — С. 290.

Классические и неклассические конусы в негладком анализе

Друшляк Анастасия Игоревна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 501)

e-mail: hactinet@mail.ru

В работе рассмотрены два типа абстрактных конусов. Прежде всего, описаны абстрактные выпуклые конусы и их основные свойства. Приведены примеры, включая конус выпуклых компактов. Затем мы переходим к недавно введенному понятию субвыпуклого конуса, где второй дистрибутивный закон заменяется более общим условием. Рассмотрены примеры субвыпуклых конусов, которые не являются выпуклыми.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1. Пусть X — коммутативная полугруппа векторов (по сложению), в которой определено умножение неотрицательных скаляров на векторы: $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$). Будем говорить, что X образует модуль над \mathbb{R}_+ , если выполнены условия:

$$\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x; 1 \cdot x = x; 0 \cdot x = 0; \lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y; \quad (1)$$

а также второй дистрибутивный закон (SDL):

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+; x \in X). \quad (2)$$

Будем говорить, что X образует submodule над \mathbb{R}_+ , если при сохранении условий (1), свойство (SDL) заменяется на „закон выпуклой отделимости“ для скаляров (CSL):

$$(y \in \text{conv}(x), x \in \text{conv}(y)) \Rightarrow (x = y). \quad (3)$$

В случае выполнения условий (1) и (2), в соответствии с классическим определением [1], будем говорить, что X — (абстрактный) выпуклый конус (BK). В случае же выполнения более слабых условий (1) и (3), будем говорить, что X — субвыпуклый конус (CBK) см. [2]

2. ВЫПУКЛЫЕ КОНУСЫ, ИХ СВОЙСТВА, ПРИМЕРЫ

Пример 1. *Простейший пример ВК – векторное пространство X и любое линейное подпространство пространства X (включая тривиальное подпространство $\{0\}$).*

Пример 2. *Важнейший класс ВК образуют выпуклые конусы в линейном пространстве (классические ВК), например, полупространство или двугранный угол, образованный двумя гиперплоскостями.*

Пример 3. *Классы полунепрерывных сверху(снизу) функций $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$, где Y – топологическое пространство также являются выпуклыми конусами.*

Свойства выпуклых конусов

- (1) Выпуклый конус X может быть изоморфно вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда $(x + z = y + z) \Rightarrow (x = y)$ для любых $x, y, z \in X$ ("cancellation law").

Пример 4. *Важным примером абстрактного ВК, удовлетворяющего (CL), является конус выпуклых компактов X_K из некоторого банахова пространства X [3]. Этот конус может быть погружен в пространство "формальных разностей" выпуклых компактов, снабженное метрикой Хаусдорфа. Простейшим примером банахова конуса X_K является конус*

$$\mathbb{R}_K = \{[x_1; x_2] \subset \mathbb{R} \mid x_1 \leq x_2\}.$$

Это единственный (в классе банаховых пространств X) пример конечномерного конуса X_K . Конус \mathbb{R}_K можно отождествить с полуплоскостьюю

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2\}.$$

- (2) Пересечение любого числа выпуклых конусов снова является выпуклым конусом, но объединение таковым может не быть. Тем самым выпуклые конусы образуют замкнутое семейство (по операции пересечения).
- (3) Сдвиг $A \rightarrow b + A$ выпуклого конуса является выпуклым конусом.
- (4) Гомотетичный образ $A \rightarrow \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, выпуклого конуса также является выпуклым конусом.

- (5) Прямое (декартово) произведение выпуклых конусов выпукло ($A \subset X$ и $B \subset Y$ выпуклы) $\Rightarrow (A \times B$ выпукло в $X \times Y$).
- (6) Алгебраическая сумма $A + B$ и разность $A - B$ классических выпуклых конусов выпуклы. Линейная комбинация конечного числа классических выпуклых конусов $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$ выпукла.

3. СУБВЫПУКЛЫЕ КОНУСЫ. СВОЙСТВА, ПРИМЕРЫ, ОСНОВНОЕ ВЛОЖЕНИЕ
Рассмотрим некоторые примеры СВК, не являющихся ВК.

Пример 5. Пусть E — вещественное линейное пространство (ЛП), $X = \text{exp}(E)$ — система всех непустых подмножеств E . Вводя в X поэлементное сложение и умножение на скаляры, очевидно, получаем коммутативную полугруппу по сложению, удовлетворяющую условию (1). Очевидно, что условие (2), вообще говоря, не имеет места:

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot A \neq (\lambda + \mu) \cdot A,$$

если $A \subset E$ не выпукло. Однако закон выпуклой отделимости (CSL) выполнен.

Пример 6. Пусть E — бэровское вещественное ЛП, X — система всех подмножеств E , имеющих дополнение всюду первой категории по Бэру, с поэлементным сложением и умножением на скаляры из \mathbb{R}_+ . Очевидно выполнение в X условий (1) и (3) и невыполнение условия (2) (для любого элемента конуса, отличного от всего E). Таким образом, X — СВК, но не ВК.

Замечание 1. Отметим, что условие (CSL) можно записать в более общем, формально, чем (3), виде:

$$\left. \begin{array}{l} \left(x + \sum_{k=1}^n \alpha_k y = \sum_{l=1}^m \beta_l y \mid \alpha_k, \beta_l \geq 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{l=1}^m \beta_l = 1 \right) \\ \left(y + \sum_{i=1}^p \lambda_i x = \sum_{j=1}^q \mu_j x \mid \lambda_i, \mu_j \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i - \sum_{j=1}^q \mu_j = 1 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow (x = y). \quad (4)$$

Таким образом, в (4) мы работаем с выпуклыми оболочками одноэлементных множеств: $[x] = \text{co}\{x\}$ и $[y] = \text{co}\{y\}$, причем условие (CSL) влечет условие „строгой инъективности“ отображения $x \mapsto [x]$ („овыщукления“ элементов СВК X):

$$(x \neq y) \Rightarrow (([x] \cap [y]) = \emptyset) \quad (5)$$

Рассмотрим, наконец, важный вопрос о каноническом вложении субвыпуклого конуса в выпуклый конус посредством „овыщукления“.

Теорема 1. Пусть X — СВК, $[X] = \{[x] | x \in X\}$. Тогда:

- (1) $[X]$ — выпуклый конус;
- (2) $[x]$ — выпуклое подмножество X ($\forall x \in X$);
- (3) вложение $[\cdot] : X \rightarrow [X]$ ($x \mapsto [x]$) — сублинейная биекция.

Таким образом, любой СВК можно инъективно и сублинейно вложить в некоторый выпуклый конус множеств. В конусе подмножеств ЛВП „овыщукление“ можно свести к взятию выпуклой оболочки.

Тем самым, мы приходим к следующей схеме связи трех базовых объектов нашей теории:

$$\boxed{\text{СВК}} \xrightarrow{x \mapsto [x]} \boxed{\text{ВК}} \xrightarrow{CL} \boxed{\text{ЛП}}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Becker R. *Convex Cones in Analysis* Hermann, 2006.
- [2] Орлов И.В. *Основы сублинейного анализа — 1: Субвыпуклые конусы*. Современ. мат. Фундамент. направл.—2016(в печати).
- [3] Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*.— М.: Физматлит. —2004.

Решение некоторых операторных дифференциальных уравнений

Желудок Валерия Дмитриевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: vladzheludok@gmail.com

В середине XIX столетия возник ряд сочинений, посвящённые так называемому символическому исчислению и использованию его к решению определенных видов линейных дифференциальных уравнений. Сущность символического исчисления состоит в том, что вводятся в рассмотрение и надлежащим образом интерпретируются функции оператора дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}.$$

Среди сочинений по символическому исчислению следует отметить вышедшую в 1862 году в Киеве обстоятельную монографию профессора-математика М. Е. Ващенко-Захарченко «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений». В ней поставлены и разрешены основные задачи того метода, который в дальнейшем получил название операционного.

В 1892 году появились работы английского учёного О. Хевисайда, посвящённые применению метода символического исчисления к решению задач по теории распространения электрических колебаний в проводах.

Дипломная работа посвящена задаче решения некоторых операторных дифференциальных уравнений. Они относятся к специальному классу теории дифференциальных уравнений в линейных пространствах. Операционный метод приобрел большое значение при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Эффективность применения операционного исчисления при решении линейных обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в удобстве и простоте вычислений.

Таким образом, многие задачи математической физики, теории упругости, гидродинамики сводятся к отысканию решения дифференциального линейного уравнения, что, в свою очередь, приводит к задаче отыскания решения уравнения $Ax = y$ с линейным оператором A . Операционный метод позволяет в ряде случаев значительно упростить процедуру нахождения решения линейных дифференциальных уравнений и их систем.

Целью дипломной работы являлось подробное изучение решения некоторых операторных дифференциальных уравнений.

Существует много литературы, посвященной данной тематике, в которой рассматриваются линейные дифференциальные уравнения, например, работы А.Г. Баскакова, С.Г. Крейна и К.И. Чернышова, А. Г. Руткаса, Г.А. Свиридюка, А.А. Дезина, В.В. Немыцкий, М.М. Вайнберг, Р.С. Гусарова.

Методы исследования применяемые в работе. В дипломной работе используются методы теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры, а также теории функций комплексного переменного и методы вычислений.

В соответствии с поставленной целью работы, мы выдвинули ряд задач для рассмотрения в работе:

- (1) Рассмотреть основы теории линейных операторов, необходимые для освоения методов решения операторных дифференциальных уравнений;
- (2) Рассмотреть на конкретных примерах способы решения операторных уравнений и дать пояснения по ходу решения конкретных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Г. Араманович Г. Л. Лунц Л.Э. Эльсгольд «Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости» М. 2002 «Главная редакция физико-математической литературы»
- [2] Н. В. Азбелев В. П. Максимов Л. Ф. Рахматуллина «Элементы современной теории функционально- дифференциальных уравнений. Методы и приложения » М. 2002 «Ин-т компьютер. исслед.»
- [3] А. А. Дезин «Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач» М. 2000 «МИАН»
- [4] Дж. Шварц Н. Данфорд «Линейные операторы» М. 1999 «Наука»
- [5] В. В. Немыцкий М. М. Вайнберг Р. С. Гусарова «Операторные дифференциальные уравнения» М. 1994 «Наука»
- [6] В. А. Треногин «Функциональный анализ» М. 1993 «Наука»
- [7] В. Хатсон Дж. Пим «Приложения функционального анализа и теория операторов» М. 2003 «МИР»
- [8] Р. Я. Шостак «Операционное исчисление. Краткий курс. Изд. второе, доп. учебное пособие для вузов» М. 2001 «Высшая школа»

Методика преподавания темы: « Функции многих переменных, неявные функции и их приложения»

Желудок Владислав Станиславович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: vladzheludok@gmail.com

Потребности современного образования ставят перед методикой преподавания математики новые задачи. Особенно остро встает вопрос о методике преподавания математического анализа в вузе. «Функции многих переменных, неявные функции и их приложения» является одной из важнейших и объемнейших тем математического анализа. Поэтому необходимо, чтобы материал был хорошо усвоен студентами.

Объектом исследования темы является процесс организации учебной деятельности при изучении дисциплины «Математический анализ».

В качестве предмета исследования выступает методика преподавания раздела математического анализа «Функции многих переменных, неявные функции и их приложения» в вузах.

Цель данной работы - формирование методического пособия по изучению темы «Функции многих переменных, неявные функции и их приложения».

Реализация поставленной цели потребовала решения ряда задач, а именно:

1. Обосновать и разработать содержание и методику изучения темы «Функции многих переменных, неявные функции и их приложения» с учетом возрастных особенностей студентов;
2. Создать методическое пособие по данной теме.

В соответствии с этим гипотеза исследования заключается в том, что разработанная методика изучения раздела математического анализа «Функции многих переменных, неявные функции и их приложения» с использованием новых педагогических и информационных технологий будет способствовать более успешному формированию знаний, умений и навыков у студентов.

Для достижения цели и поставленных задач были привлечены следующие методы исследования:

1. Теоретический анализ проблемы, определение основных положений исследования;
2. Анализ математической, методической, психолого-педагогической литературы, учебных пособий, работ по истории математики, учебных программ;

3. Ознакомление с методическим опытом преподавателей КФУ факультета математики и информатики.

В методическом пособии рассмотрены следующие вопросы теории функций нескольких переменных: область определения, графики, пределы функции многих переменных, частные производные, дифференциал и дифференцирование сложных функций, производная сложной функции, производные высших порядков, касательная плоскость и нормаль, частные производные сложной функции высших порядков, экстремум функции нескольких переменных, условный экстремум, неявные функции и их дифференцирование, полный дифференциал и его применение к приближенным вычислениям. Пособие содержит теоретические вопросы и расчетную часть - задачи. Теоретические вопросы являются общими для всех студентов, задачи - для каждого студента или группы студентов индивидуальные.

В первом разделе приведены некоторые основные понятия и определения, а также расчетные формулы и примеры решения задач по указанным темам, во втором разделе помещены теоретические вопросы, практические задания с решенными вариантами. Каждая задача расчетного задания включает 20 вариантов. В третьем разделе – варианты контрольных работ и материалы для самостоятельной подготовки. Среди задач – отыскание области определения функции двух переменных, вычисление частных производных, дифференцирование сложных и неявных функций, применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берман Г. Н. *Сборник задач по курсу математического анализа*. – М.: Наука, – 1985.
- [2] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. – М.: Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, – 1997.
- [3] Кудрявцев Л. Д. *Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 3*. – М.: Высшая школа, – 1981.

Субгладкая форма теоремы об обратной и неявной функции и некоторые её приложения

Жолудева Анастасия Константиновна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)

e-mail: Natusua.j93@mail.ru

Основную роль в наших конструкциях будут играть сублинейные многозначные ограниченные операторы с компактными выпуклыми значениями (суб-операторы). Приведем необходимый минимум информации о суб-операторах (подробнее см. [1]). Всюду далее E, F, G — вещественные банаховы пространства, F_K — конус непустых выпуклых компактов из F , снабженный суп-нормой. Нормированный конус всех суб-операторов $A : E \rightarrow F_K$ обозначим $L_{sub}(E; F)$.

Перейдем к вопросу об обратимости суб-операторов. Наш подход к этой проблеме опирается на возможность перехода от многозначного суб-оператора к пакету обычных линейных ограниченных операторов. Далее, $A \in L_{sub}(E; F), H = \{h_i\}$ — фиксированный базис Гамеля в E .

Definition 1. Для всякого $h_i \in H$ фиксируем произвольный элемент $a_i \in A$ и определим «базисный селектор» A_s следующим образом:

$$\left(h = \sum_{k=1}^n \lambda_k h_{i_k} \in E \right) \Rightarrow \left(A_s h = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{i_k} \right).$$

Множество $A_{sub} = \{A_s\}$ назовем s -представлением субоператора A .

Definition 2. Скажем, что субоператор A суб-обратим, если каждый оператор $A_s \in A_{sub}$ непрерывно обратим. В этом случае положим

$$A_{sub}^{-1} = \overline{co} \{ A_s^{-1} \mid A_s \in A_{sub} \}.$$

Множество всех суб-обратимых суб-операторов $A \in L_{sub}(E; F)$ обозначим $Isom_{sub}(E; F)$.

Отметим некоторые свойства операции суб-обращения.

Theorem 1. Если суб-оператор A суб-обратим, то A_{sub}^{-1} — выпуклый компакт в $Isom(E; F)$, и, следовательно, суб-оператор A_{sub}^{-1} также суб-обратим. При этом:

- (i) $A_{sub} \preceq (A_{sub}^{-1})_{sub}^{-1}$;
- (ii) $I_E \preceq (A_{sub}^{-1} \cdot A_{sub})_{sub}$; $I_F \preceq (A_{sub} \cdot A_{sub}^{-1})$;

(iii) $(\text{Extr}(A_{\text{sub}}))^{-1} \preceq \text{Extr}(A_{\text{sub}}^{-1})$;

(iv) Если A положительно суб-определен: $A \stackrel{\text{sub}}{\gg} 0$, то A суб-обратим.

Далее, сформулируем аналог теоремы об обратном отображении в её суб-гладкой форме. Отметим, что понятие субгладкости, тесно связанное с теорией компактных субдифференциалов, введено в [2]. Далее E и F – вещественные банаховы пространства, $f : B_r(x_0) \rightarrow F$, $b = f(x_0)$

Theorem 2. Если $f \in C_{\text{sub}}^1(U)$ и $\partial_{\text{sub}}f(x) \in \text{Isom}_{\text{sub}}(E; F)$, то существуют такие открытые окрестности $V(x) \subset U$ и $W(y) \subset F$, что $f^{-1} : W \rightarrow V$ принадлежит классу $C_{\text{sub}}^1(W)$ (т.е. f есть C_{sub}^1 -диффеоморфизм).

Следствие 1. Пусть, в условиях теоремы (2), $E = F = H$ - гильбертово пространство. Тогда, если $\forall A_s^e \in \text{Extr}(\partial_{\text{sub}}f(x)) : A_s^e \gg 0$ (равномерно по $\text{Extr}(\partial_{\text{sub}}f(x))$), то f C_{sub}^1 -обратимо в окрестности x .

Далее E, F, G – вещественные банаховы пространства, $F \cong G$, отображение $f : E \times F \rightarrow G$ определено в некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$, $f(x_0, y_0) = 0$, $f \in C_{\text{sub}}^1(x_0, y_0)$ и субдифференциал $\partial_{\text{sub}}^y f(x_0, y_0)$ суб-обратим.

Theorem 3. Если отображение $f : E \times F \rightarrow G - C_{\text{sub}}^1$ -гладкое в окрестности точки (x_0, y_0) , $f(x_0, y_0) = 0$, причем частный ∂_{sub} -дифференциал $\partial_{\text{sub}}^y f(x_0, y_0)$ суб-обратим, то уравнение $f(x, y) = 0$ задает вблизи (x_0, y_0) неявное отображение $y = y(x)$ класса C_{sub}^1 . При этом справедлива оценка

$$\partial_{\text{sub}}y(x) \preceq -(\partial_{\text{sub}}^y f(x, y))^{-1} \cdot \partial_{\text{sub}}^x f(x, y)_{\text{sub}}. \quad (1)$$

Предложение 1. Пусть E – банахово, H – гильбертово пространство, отображение $f : E \times H \rightarrow H - C_{\text{sub}}^1$ -гладкое в окрестности точки (x_0, y_0) , $f(x_0, y_0) = 0$. Тогда:

а) Если $\partial_{\text{sub}}^y f(x_0, y_0) \stackrel{\text{sub}}{\gg} 0$, то уравнение $f(x, y) = 0$ задает вблизи (x_0, y_0) неявную функцию $y = y(x)$ класса C_{sub}^1 .

б) Если $H = \mathbb{R}^n$ и для всех субматриц Якоби f по y в точке (x_0, y_0) выполнено:

$$J_1^y f(x_0, y_0) \gg 0; J_2^y f(x_0, y_0) \gg 0; \dots; J_{2^n}^y f(x_0, y_0) \gg 0 \quad (2)$$

то неявная C_{sub}^1 -гладкая функция $y = y(x)$ также определена.

Перейдем к конечномерному случаю $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. В этом случае крайними точками суб-оператора $\partial_{\text{sub}}f(x)$ служат 2^n субматриц Якоби $J_k(x)$,

Наконец, также по аналогии, в конечном случае рассмотрим конкретный пример модулированной малой добавки к гладкому отображению.

Example 2. Пусть задана система уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) + \varepsilon \cdot |g_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)|; \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) + \varepsilon \cdot |g_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)|; \end{cases} \quad (6)$$

где $f_i, g_i (i = \overline{1, m})$ - C^1 -гладкие отображения. В этом случае применение предложения (1)(б) приводит к следующим достаточным условиям существования C_{sub}^1 -гладкой системы неявных функций $\{y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)\}_{i=1}^m$, заданной системой (6): либо

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \right|; \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|; \dots; \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right|; \quad (7)$$

либо случай чередования знаков, отвечающий отрицательной определенности.

Example 3. Рассмотрим частный случай предыдущего примера. Пусть

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \tilde{f}_1(x_1) + (y_1 - y_2) \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \tilde{f}_2(x_2) + (y_1 + y_2) \\ \\ g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \tilde{g}_1(x_1) + (y_1 + y_2) \\ g_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \tilde{g}_2(x_2) + (y_1 + y_2) \end{cases}$$

где $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ - гладкая добавка.

Тогда

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x_1) + (y_1 - y_2) + \varepsilon \cdot |\tilde{g}_1(x_1) + (y_1 + y_2)|; \\ \tilde{f}_2(x_2) + (y_1 + y_2) + \varepsilon \cdot |\tilde{g}_2(x_2) + (y_1 + y_2)|; \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} &> \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \right| \\ 1 &> \varepsilon \cdot 1 \Rightarrow \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)} > \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| &> \varepsilon \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \\ 2 &> \varepsilon \cdot 2 \Rightarrow \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И. В. *Теоремы об обратной и неявной функциях в классе субгладких отображений.* – Матем. заметки – 2016 – №99(4) – с. 631–634
- [2] Orlov I. V., Smirnova S. I. *Invertibility of multivalued sublinear operators.* –Eurasian Mathematical Journal – 2015 – Volume 6 – Number 4 – с. 44–58

Периодические решения феноменологического уравнения горения вдоль полосы

Ибрагимов Сейдамет Диляверович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602-М)

e-mail: seydametibragimov@gmail.com

Нестационарные режимы распространения фронта горения могут быть описаны феноменологическим уравнением вида

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta \left(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \xi + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta \dot{\xi}} \right), \quad (1)$$

которое моделирует горение теплоизолированной полосы ширины l , т.е. уравнение 1 рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями:

$$\left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

Феноменологическое уравнение учитывает два основных фактора, относящихся к нестационарным процессам распространения фронта: наличие автоколебательной неустойчивости плоского фронта, стабилизируемой нелинейными эффектами, и наличие взаимодействия тепловых слоев, примыкающих к зоне экзотермических реакций. Структура этих слоев определяется не только скоростью и температурой прилегающего участка реакционной поверхности, но и распределением температуры вдоль всего фронта реакции. Подобные задачи ранее в своих работах исследовали Митропольский Ю.А., Мищенко Е.Ф., Колесов А.Ю., Алдушин А.П., Зельдович Я.Б., Маломед Б.А. [1],[2] Самойленко А.М., Белан Е.П. [3].

Рассматривая задачу 1 с краевыми условиями 2 и используя метод Галеркина, построим приближенные решения 1 в виде

$$\xi = y_0 \sin t + \sum_{k=1}^N y_k \cos k\theta \sin t, \quad (3)$$

где $\theta = \frac{\pi x}{l}$, $y_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяют уравнению

$$\dot{y}_k = \delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)). \quad (4)$$

Здесь $\alpha_k = 1 - \frac{\lambda^2}{4l^2} k^2 + \frac{\lambda\beta}{2l} k = 1 - \frac{k^2}{\rho} + \beta \frac{k}{\rho}$, $\rho = \frac{2l}{\lambda}$, а $C_3^k(y) = C_3^k(y_0, \dots, y_N)$ - формы третьей степени относительно y_k , $k = 1, \dots, N$.

Подставим 3 и 4 в 1. Дифференцируя 3, учитывая 4, получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \xi_0 \cos t + \sum_{k=1}^N y_k \cos k\theta \cos t + \delta(\alpha_0 y_0 + C_3^0(y)) \sin t + \\ + \sum_{k=1}^N \delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)) \cos k\theta \sin t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = -\xi_0 \sin t + \sum_{k=1}^N y_k \cos k\theta (-\sin t) + 2\delta(\alpha_0 y_0 + C_3^0(y)) \cos t + \\ + \sum_{k=1}^N 2\delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)) \cos k\theta \sin t + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Отсюда, с точностью до порядка $O(\delta^2)$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} 2\delta(\alpha_0 y_0 + C_3^0(y)) \cos t + \sum_{k=1}^N 2\delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)) \cos k\theta \cos t = \\ = 2\delta(\alpha_0 y_0 \cos t + \sum_{k=1}^N \alpha_k y_k \cos k\theta \cos t) \frac{4}{3} (y_0 \cos t + \sum_{k=1}^N y_k \cos k\theta \cos t). \end{aligned}$$

Приравняем теперь в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых модах $\cos t$, $\cos k\theta \cos t$.

В результате, однозначно находим выражение для $C_3^k(y)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Пользуясь пакетом «Mathematica», проводим численный анализ неподвижных точек, меняя ρ при фиксированном β , и находим спектр этих точек. Проводим данное действие для значений $N = 3$ и $N = 5$. С изменением N меняется и

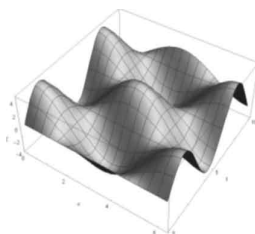


Рис. 1. Приближенное решение при $\xi = 5$, $n = 5$, $b = 0.5$.

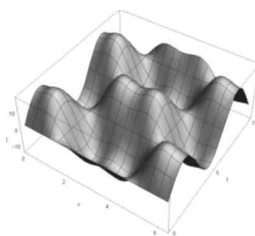


Рис. 2. Приближенное решение при $\xi = 0.5$, $n = 5$, $b = 0.5$.

количество уравнений в системе. Для других значений N система строится аналогично.

Далее приведем некоторые значения неподвижных точек и соответствующего им спектра при различных значениях параметра ρ :

$$\rho = 0.5 \quad (0., 2.684 * 10^{-16}, 0., 6.170 * 10^{-18}) \quad \{-31.995, -12.995, -1.995, 1.01\}$$

$$\rho = 0.8 \quad (0., 4.246, 0., -0.00845) \quad \{-11.318, -4.133, 0.743, -0.134\}$$

Как видно с увеличением бифуркационного параметра ρ неподвижных точек меняется. Положительная точка спектра переходит на отрицательную полуось, таким образом, соответствующее решение становится устойчивым.

На рис. 1 и рис.2 приведены графики найденных приближенных решений при различных ρ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алдушин А.П. *К феноменологической теории спинового горения* ДАН СССР, – 1980 – С. 1102-1106.
- [2] Алдушин А.П. *Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения* Физика горения и взрыва, – 1981 – С. 3-12.
- [3] Белан Е.П. *Автоколебательные режимы горения вдоль полосы* Динамические системы, – 2009 – С. 3-16.

Реализация APLLY-операции для УБДР некоторых конечных автоматов

Ибрагимова Сусанна Замировна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)
e-mail: ibragimovasus@gmail.com

В работе рассматривается реализация APLLY-операции для решения конкретной задачи построения модели системы, в которой имеются две параллельные функционирующие составные части, каждая из которых, представлена с помощью соответствующих конечных автоматов(КА).

Упорядоченные бинарные диаграммы решений (УБДР) являются компактным графическим представлением для булевой функции. Использование УБДР позволяет рассматривать операции над булевыми функциями как соответствующие алгоритмы на графах их УБДР. Для УБДР имеет место APLLY-операция [1], составляющая булеву функцию с использованием алгебраических операций для функций-аргументов, и выполняющая соединение графов-аргументов.

В работе [2] APLLY-операцию рассматривают как инструмент, позволяющий конструировать модели сложных систем, реализующий последовательное и параллельное соединение составных частей, моделируемых сложных систем.

В данной работе рассматривается построение модели некоторой системы, в которой реализуется последовательное соединение её составных частей, представленных своими КА, показанными на рис. 1.

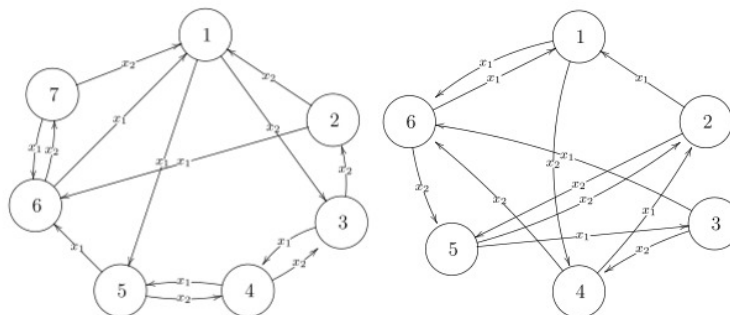


Рис. 1. Два элемента некоторой системы, представленные своими конечными автоматами

Для рассматриваемых КА строятся соответствующие им УБДР. Для этого согласно работе [3] состояния автоматов кодируются в двоичной системе счисления, на множестве кодов состояний задаётся отношение, являющееся представлением функции переходов данного автомата, составляются таблицы значений функций переходов, по которым конструируются соответствующие деревья решений. К полученным деревьям решений применяются преобразования редукции [1] для получения их редуцированных УБДР, показанных на рис. 2.

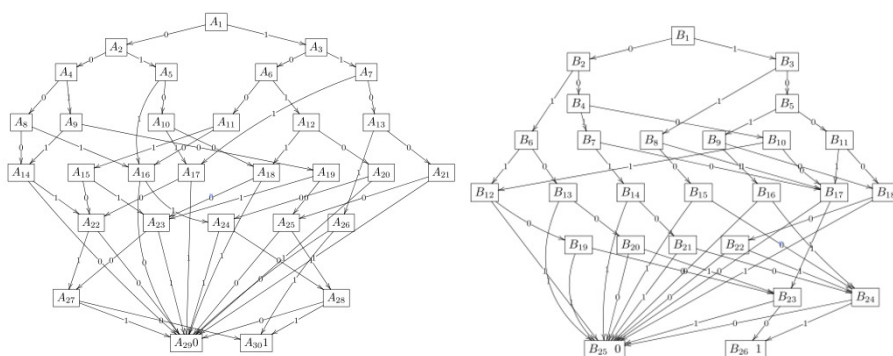


Рис. 2. Редуцированные УБДР конечных автоматов, показанных на рис. 1

К УБДР, показанным на рис. 2, применяется APPLY-операция \wedge , и строится результирующая УБДР, после применения, к которой преобразований редукции, получаем редуцированную УБДР, показанную на рис. 3.

Далее, полученная редуцированная результирующая УБДР представляется минимальным автоматом, являющимся моделью рассматриваемой системы, в которой две её составные части соединены в последовательном функционировании. Данное преобразование осуществляется согласно работе [3] путём реорганизации путей в УБДР на основании введённого в [3] отношения эквивалентности на состояниях УБДР в смысле отношения эквивалентности R_A введённого в [4], определяемого следующим образом: $aR_A b \Leftrightarrow (\forall p \in F(X))(f(a, p) \in F \Leftrightarrow f(b, p) \in F)$, где a, b – состояния автомата $A, X = \{0, 1\}$ – алфавит входных символов, F – множество конечных состояний автомата $A, F(X)$ – полугруппа всех слов конечной длины автомата A .

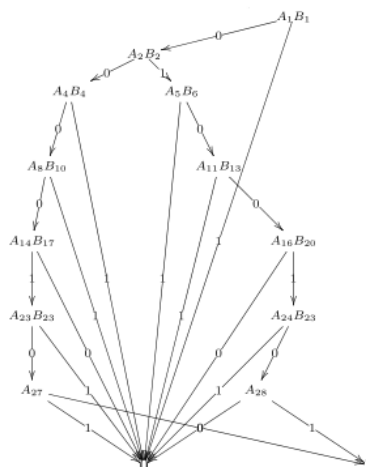


Рис. 3. Редуцированная результирующая УБДР

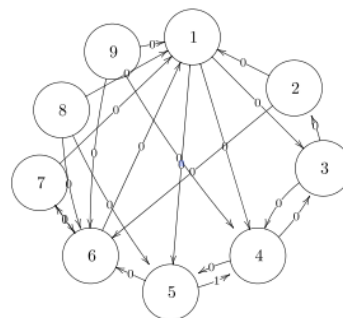


Рис. 4. Конечный автомат для УБДР - результата выполнения APLLY-операции \wedge

Итоговая модель системы, представленная конечным автоматом для УБДР – результата выполнения APLLY-операции \wedge , рассматриваемой в работе задачи, показана на рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bryant R.E. *Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary Decision Diagrams*. – School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburg, – 1992.

- [2] Лукьянова Е.А., Дереза А.В. *Метод моделирования реактивных систем с параллельными и последовательными процессами.* – ТВИМ, –2011. – Т.138. – С.107–116
- [3] Kryvyy S., Grzywacz W. *On OBDD transformations representing finite state automata.* – International Journal «Information Theories and Application», – Vol.10. – 230–236 p.
- [4] Clarke E.M., Schlingoff B.-H. *Model Checking.* – In ed. A. Robinson and A. Voronkov Handbook of Automated Reasoning, Elsevier Science Publishers B.V., – 2001. – 1369–1522 p.

Критические точки развитие математики, как источник изучения философии математики

Исмаилова Диляра Илимдаровна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)

e-mail: dilik13051@mail.ru

В работе рассматриваются пути развития математики, начиная с античности до наших дней. Изучаются причины, возникших кризисов в основании математики и рассматриваются направления математики, для которых данные кризисы явились отправными точками развития.

Исследования взаимосвязи философии и математики в процессе исторического развития философии науки и науки математики, показывают, что отправными точками развития философии математики, а, значит, и математики как науки стали три глубоких кризиса основ математики.

Первый кризис произошел в V веке до н.э. в начальный период формирования математики как научной системы, в древней Греции, в школе пифагорейцев (Пифагор уроженец острова Самоса, 571 – 490 г.г. до н. э.) и вызван был неожиданным открытием несоизмеримости однородных геометрических величин. Конец кризиса относится к 370 г. до н.э. и связан с именем выдающегося математика Евдокса. Математик и астроном Евдокс из Книда создал общую теорию отношений для любых однородных величин (как соизмеримых, так и несоизмеримых). До Евдокса теоремы теории отношений приходилось доказывать отдельно для чисел, отрезков и площадей. Он же ввел понятие величины, включавшее в себя как числа, так и любые непрерывные величины. Его теория величин в основном совпадает с современной теорией иррациональных чисел, построенной Рихардом Дедекиндом в 1872 г. Построенная Евдоксом теория была изложена в пятой книге «Начала» Евклида (Евклид из Александрии,

около 325 г. до н. э. – 265 г. до н. э.). Книга «Начала» является ранним предшественником современного способа аксиоматического построения математических наук, и начинается с изложения двадцати трёх определений и десяти аксиом. Физическая истинность пятой аксиомы Евклида на протяжении двух тысячелетий подвергалась сомнению, её пытались, и заменить, и вывести из других аксиом. Работа математиков над проблемой пятой аксиомы Евклида о параллельных привела к появлению неевклидовых геометрий : геометрии Н. И. Лобачевского (Николай Иванович Лобачевский, русский математик, 1792 – 1856 г.г.) и геометрии Б. Римана (Георг Фридрих Бернхард Рيمان, немецкий математик, 1826 – 1866 г.г.).

«Открытия Ньютона и Лейбница, зарождение анализа в конце XVII в. привело ко второму кризису основ математики. Последователи Ньютона и Лейбница, увлеченные огромными практическими возможностями и силой своего метода, мало заботились о прочности его фундамента, на котором был построен анализ, так что не доказательства гарантировали правильность результатов, а, наоборот, справедливость результатов давала уверенность в правильности доказательств. Современные, парадоксы и противоречия возникали все в большем количестве, пока кризис основ математики не стал для всех очевидной реальностью» – так начало второго кризиса описано в работе [1].

К истокам второго кризиса нужно отнести проблему бесконечности, поднятую ещё в древнегреческой философии и математике. В античности бесконечность рассматривали как не оформленное, как не ставшее и, следовательно, несовершенное. Бесконечное выступает как беспредельное, безграничное, почти не существующее и потому есть нечто близкое к хаосу, а иногда и отождествляется с ним. Выдающийся немецкий ученый XX века Д. Гильберт (Давид Гильберт, немецкий математик, 1862 – 1943 г.г.), имея в виду математику, писал: «Ни одна проблема не волновала так глубоко человеческую душу, как проблема бесконечного, ни одна идея не оказала столь сильного и плодотворного влияния на разум, как идея бесконечного» [2]. «В начале XIX Коши предпринял первую попытку преодолеть кризис, отбросив туманную теорию бесконечно малых, и заменил ее строгой теорией пределов. Вслед за этим Вейерштрасс осуществил так называемую арифметизацию анализа, и второй кризис основ математики был преодолен» [1].

Начало третьего кризиса основ математики связывается с открытием в 1897 г. итальянским математиком Бурали-Форти, парадокса в основах общей теории множеств Кантора (Георг Кантор, немецкий математик, 1845 – 1918

г.г.). «Кантор обнаружил очень похожий парадокс, описание которого не требует привлечения слишком специальной терминологии. При построении теории множеств Кантору удалось доказать, что, каково бы ни было трансфинитное число, существует большее трансфинитное число и что наибольшего трансфинитного числа не существует – точно так же, как не существует наибольшего натурального числа» [3].

Необходимо отметить, что антимонии или парадоксы были известны ещё в античности. Так известный в VI в. до н.э. парадокс «Все критяне лжецы» родственный современным теоретико-множественным парадоксам, а также апории Зенона (Зенон Элейский, 490 до н. э. – ок. 430 до н. э.), сыграли важную роль в развитии античной диалектики и античной науки, особенно логики и математики. Они посвящены именно таким проблемам, для которых обнаруживается противоречие в строго логическом доказательстве.

В 1902 г. Бертран Рассел (Бертран Артур Уильям Рассел, британский философ, математик, 1872 – 1970 г.г.) сформулировал открытый в основах общей теории множеств Кантора парадокс в достаточно компактной форме как парадокс множества всех нормальных множеств, где под нормальным множеством понимается множество, не содержащее себя в качестве элемента.

В результате исследования проблем, связанных с третьим кризисом основ математики возникли три основные философские направления: логицизм, интуиционизм и формализм. Основоположниками этих направлений соответственно являются: логицизма – А. Уайтхэд, Б. Рассел, интуиционизма – Дж. Брауэр, формализма – Д. Гильберт.

В настоящее время все существующие философские школы и направления являются продолжением, приставленных выше, трёх школ. Как писал Ф. Клейн: «Три основные школы оснований можно рассматривать также как отражение трех основных позиций, встречающихся среди математиков, размышляющими над методами и значением своей работы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ивс Г., Ньюсом К.В. *О математической логике и философии математики*. – М.: «Знание», – 1968.
- [2] Сухотин А. К. *Парадоксы науки*. – М.: «Молодая гвардия», – 1980.
- [3] Пуанкаре А. *Наука и метод*. – М.: Наука, – 1990.

Некоторые вопросы повышения квалификации учителей математики

КадYROва Мавиле Редвановна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)
e-mail: mavik-kerim@mail.ru

Система повышения квалификации специалистов в современном динамично развивающемся обществе становится обязательным компонентом, обеспечивающим требуемое качество профессиональной деятельности. Она потенциально должна выполнять важную социальную функцию, связанную с карьерным ростом специалистов, их востребованностью, профессиональной и психологической удовлетворенностью. Но для того, чтобы система повышения квалификации могла реализовать эту важнейшую социальную роль, она должна быть открытой, разнообразной и доступной. И, кроме того, учитывать специфику инновационной деятельности в процессе создания и реализации систем повышения квалификации и дополнительного профессионального образования.

Все вышесказанное можно отнести к системе повышения квалификации учителей.

Под повышением квалификации понимается не механизм закрепления профессиональных навыков и умений, а механизм развития профессиональной деятельности педагога, его педагогических компетентностей.

Сфера образования сегодня переживает существенные преобразования, которые требуют от педагога не только новых знаний (даже выпускники пятилетней давности понимают, что имеющихся у них знаний уже не достаточно), но построения своей профессиональной деятельности на идеологически иных теоретических основаниях.

Можно отметить основные направления повышения профессиональной компетентности современного учителя. К ним относятся повышение психолого-педагогической компетентности, ИКТ-компетентности и предметной компетентности.

В частности, относительно первого направления отмечается, что профессиональный стандарт педагога отражает структуру его профессиональной деятельности: обучение, воспитание и развитие ребенка. В соответствии со стратегией современного образования в меняющемся мире, он существенно наполняется психолого-педагогическими компетенциями, призванными помочь

учителю в решении новых стоящих перед ним проблем, в частности, выявлением динамики развития ученика, осуществления индивидуального подхода к каждому ученику, определения стратегии обучения особых детей и др.

Второе направление акцентирует внимание на овладении современными информационными технологиями и эффективном их использовании в профессиональной деятельности.

Что касается повышения предметной компетентности, то это направление связано напрямую с профессиональной компетентностью учителя-предметника. Профессиональная компетентность учителя математики рассматривается отдельно, учитывая особую важность в среднем образовании (хотя бы потому, что по этому предмету ЕГЭ сдают все выпускники школы).

Нужно сказать, что все эти три направления были учтены при определении цели, задач и содержания программы повышения квалификации учителей математики. Конечно, основное внимание было обращено на повышение предметной компетентности, которая рассматривалась в связи с реализацией ФГОС среднего (полного) общего образования.

Мы отобрали часть содержания программы повышения квалификации, определили спектр тех вопросов, которые являются значимыми и актуальными для повышения уровня профессиональной компетентности современного учителя математики, а также структурировали отобранное содержание наиболее оптимальным образом для удовлетворения потенциальных образовательных запросов слушателей.

Основные задачи, которые мы перед собой поставили: раскрыть особенности реализации современных методик обучения при обучении математики, подготовить учащихся к различным видам аттестации, пополнить современную копилку современного учителя математики.

Отбор содержания программы проводился в соответствии со следующими принципами:

- (1) все рассматриваемые в программе вопросы обладают высокой степенью новизны, прежде всего для практикующего учителя математики;
- (2) все теоретические аспекты имеют ярко выраженное практическое значение для учителя;
- (3) все вопросы определяются, исходя из потребностей современного учителя, выявленные в ходе опросов, личных бесед, наблюдений, в том числе и в процессе проведения педагогической практики студентов факультета.

Была разработана следующая программа действий:

- теоретический материал;
- подробное решение примера;
- задания для самостоятельной работы, содержащие ответы.

На примере рассмотрим способы отыскания рациональных корней алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, и увидим, что существуют нетрадиционные способы решения задач.

Решить уравнение $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$.

Решение

Рассмотрим первый (традиционный) способ. Целых корней уравнение не имеет, находим рациональные корни уравнения. Пусть p/q несократимая дробь является корнем уравнения, тогда p находим среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел ± 1 , а q среди положительных делителей старшего коэффициента: 1; 2.

Т. е. рациональные корни уравнения надо искать среди чисел ± 1 , $\pm 1/2$, обозначим

$$P_3(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1, P_3(1) \neq 0, P_3(-1) \neq 0$$

$$P_3(1/2) = 2/8 - 7/4 + 5/2 - 1 = 0, 1/2 - \text{корень уравнения.}$$

$$2x_3 - 7x^2 + 5x - 1 = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 2x - 1 = 0.$$

$$\text{Получим: } x^2(2x - 1) - 3x(2x - 1) + (2x - 1) = 0; (2x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

Приравниваем второй множитель к нулю, получим:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$$

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Рассмотрим второй способ. Поделим наше уравнение на x^3 , получим:

$$2 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$$

Сделаем замену: $\frac{1}{x} = y$, получим:

$$2 - 7y + 5y^2 - y^3 = 0$$

$$-y^3 + 5y^2 - 7y + 2 = 0$$

Делители числа 2 : ± 1 , ± 2 . Подставляем в уравнение, получим:

$$-1 + 5 - 7 + 2 \neq 0, \Rightarrow 1 - \text{некорень}$$

$$1 + 5 + 7 + 2 \neq 0, \Rightarrow -1 - \text{некорень}$$

$$-8 + 20 - 14 + 2 = 0, \Rightarrow 2 - \text{корень}$$

$$8 + 20 + 14 + 2 \neq 0, \Rightarrow -2 - \text{некорень}$$

	-1	5	-7	2
2	-1	3	-1	0

$$-y^3 + 5y^2 - 7y + 2 = (y - 2)(-y^2 + 3y - 1)$$

$$-y^2 + 3y - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$$

$$y_{2,3} = \frac{2}{3 \pm \sqrt{5}}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Рассмотрим третий способ. Умножим наше уравнение на 4, получим:

$$8x^3 - 7 \cdot 4 \cdot x^2 + 5 \cdot 4x - 4 = 0$$

Осуществим замену: $2x = y \Rightarrow 4x^2 = y^2, 8x^3 = y^3$, получим:

$$y^3 - 7y^2 + 10y - 4 = 0$$

Находим делители числа -4: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$.

$$1 - 7 + 10 - 4 = 0 \Rightarrow 1 - \text{корень};$$

$$-1 - 7 - 10 - 4 \neq 0 \Rightarrow -1 - \text{некорень};$$

$$8 - 14 + 20 - 4 \neq 0 \Rightarrow 2 - \text{некорень};$$

$$-8 - 14 - 20 + 8 \neq 0 \Rightarrow -2 - \text{некорень};$$

$$64 - 84 + 40 - 4 \neq 0 \Rightarrow 4 - \text{некорень};$$

$$-64 - 84 - 40 - 4 \neq 0 \Rightarrow -4 - \text{некорень}.$$

	1	-7	10	-4
1	1	-6	4	0

$$y^3 - 7y^2 + 10y - 4 = (y - 1)(y^2 - 6y + 4)$$

$$y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 16 = 20$$

$$y_{2,3} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$y = 2x \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стефанова Н. Л., Снегурова В. И. *Проектирование модульно-вариативной программы повышения квалификации учителей математики*. – УДК 378.091.398, – 2013.
- [2] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник*. – М.: Изд-во Факториал, – 1997 – С. 219.
- [3] Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. *Факультативный курс по математике*. – М.: Просвещение, – 1991 – С. 384.
- [4] Сластенин В. А., Исаев И. Ф., Мищенко А. И., Шиянов Е. Н. *Учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений*. – М.: Школа-Пресс, – 1997 – С. 512.

Классификация критических случаев устойчивости в импульсной системе

Казимова Зера Алимовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: vini.28@ukr.net

Введение. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) являются удобным инструментом моделирования эволюции процессов разнообразной природы, описываемых конечным числом параметров, которые подвергаются сильным кратковременным воздействиям, вызывающим скачкообразное изменение значений этих параметров. Одной из основных задач, решаемых при анализе математической модели, является отыскание условий, обеспечивающих устойчивость заданного режима. В настоящей работе рассматривается импульсная система с импульсными воздействиями в заданные моменты времени [1]. Определение устойчивости по Ляпунову для таких систем точно такое же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основные результаты теории устойчивости ОДУ имеют соответствующие аналоги в теории устойчивости дифференциальных уравнений с импульсным воздействием рассматриваемого типа. В частности, справедлива теорема об устойчивости по первому приближению: если матрицант линейного приближения экспоненциально убывает при $t \rightarrow \infty$, то нулевое решение квазилинейной системы асимптотически устойчиво.

Критическим случаем устойчивости называют ситуацию, когда характер устойчивости нулевого решения исследуемой нелинейной системы дифференциальных уравнений невозможно установить, располагая информацией о характере устойчивости системы линейного приближения в нуле. Этот важный (как с теоретической, так и с практической точки зрения) феномен достаточно хорошо изучен в теории устойчивости ОДУ [2]. Критический случай устойчивости в импульсной системе характеризуется значительно большим разнообразием реализаций по сравнению с системами без импульсных воздействий. Это объясняется тем, что эволюция решений импульсной системы реализуется как взаимодействие непрерывной (гладкой) и дискретной подсистем. Как следствие все импульсные системы рассматриваемого класса являются неавтономными и наследуют сложность поведения решений, характерную для разностных уравнений.

Периодическая импульсная система. Рассмотрим нелинейную импульсную систему второго порядка

$$\dot{x} = Ax + \sum_{|m| \geq 2} g_m x^m, \quad t \neq \tau_k, \quad (1)$$

$$x(t^+) = Bx(t) + \sum_{|m| \geq 2} h_m x^m(t), \quad t = \tau_k, \quad (2)$$

где $\tau_k = \tau_0 + k\theta$, $\theta > 0$, $g_m, h_m \in \mathbb{R}^2$, $m = (m_1, m_2) \geq 0$, $|m| = m_1 + m_2$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, A, B — постоянные матрицы с вещественными элементами, $x(t^+) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} x(\tau)$. Такие импульсные системы называют периодическими [1].

Система уравнений в вариациях в нуле

$$\dot{y} = Ay, \quad t \neq \tau_k, \quad y(\tau_k^+) = By(\tau_k), \quad (3)$$

предполагается устойчивой. Решение этой системы легко выписать в явном виде. Пусть $t_0 \in [\tau_{k_0-1}, \tau_{k_0})$, тогда

$$\begin{aligned} y(t, t_0, y^0) &= e^{(t-t_0)A} y^0 \quad \text{при } t \in [t_0, \tau_{k_0}], \\ y(\tau_{k_0}) &= e^{(\tau_{k_0}-t_0)A} y^0, \quad y(\tau_{k_0}^+) = B e^{(\tau_{k_0}-t_0)A} y^0, \\ y(\tau_{k_0+1}) &= e^{\theta A} B y(\tau_{k_0}), \quad y(\tau_{k_0+1}^+) = B e^{\theta A} y(\tau_{k_0}^+). \end{aligned}$$

Очевидно, что для всякого $s = 1, 2, \dots$

$$y(\tau_{k_0+s}) = (e^{\theta A} B)^s y(\tau_{k_0}), \quad y(\tau_{k_0+s}^+) = (B e^{\theta A})^s y(\tau_{k_0}^+). \quad (4)$$

Из (4) следует, что система линейного приближения (3) устойчива, когда спектр матрицы монодромии $B e^{\theta A}$ лежит в единичном круге комплексной плоскости. При этом критический случай будет иметь место, если одно или

оба собственных значения матрицы $Be^{\theta A}$ попадают на единичную окружность комплексной плоскости.

Обозначим ρ_1, ρ_2 собственные значения матрицы $Be^{\theta A}$, которые будем называть *мультипликаторами*. Критические случаи в системе (1)-(2) естественным образом разделяются на три класса:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \rho_1 = \pm 1, \rho_2 = \rho, \quad |\rho| < 1; \\ 2) \quad & |\rho_1| = |\rho_2| = 1, \quad \rho_1 \rho_2 = -1; \\ 3) \quad & \rho_{1,2} = \xi \pm i\eta, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Динамику импульсной системы (1)-(2) можно описать специальной дискретной системой. Особенно просто это реализовать для линейной системы (3).

Пусть $\tau \in (0, \theta]$. Тогда

$$\begin{aligned} y(\tau_{k_0} + \tau) &= e^{\tau A} B y(\tau_{k_0}), \quad y(\tau_{k_0+1} + \tau) = e^{\tau A} B y(\tau_{k_0+1}) = e^{\tau A} B e^{\theta A} B y(\tau_{k_0}) = \\ &= e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A} e^{\tau A} B y(\tau_{k_0}) = [e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}] y(\tau_{k_0} + \tau). \end{aligned}$$

Матрица $e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}$ подобна матрице $Be^{\theta A}$ и, следовательно, имеет тот же спектр. Далее

$$\begin{aligned} y(\tau_{k_0+2} + \tau) &= e^{\tau A} B y(\tau_{k_0+2}) = e^{\tau A} B e^{\theta A} B y(\tau_{k_0+1}) = \\ &= e^{\tau A} B e^{(\theta-\tau)A} e^{\tau A} B y(\tau_{k_0+1}) = e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A} y(\tau_{k_0+1} + \tau) = \\ &= [e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}]^2 y(\tau_{k_0} + \tau). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(\tau_{k_0+s} + \tau) = [e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}]^s y(\tau_{k_0} + \tau), \quad s = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Таким образом, мы показали, что значения решения $y(t)$ системы (3) можно в любой точке t вычислить по формуле (6). Эта формула определяет решение дискретной линейной системы с матрицей

$$\Omega_\tau = e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}, \quad 0 < \tau \leq \theta. \quad (7)$$

Матрица линейного приближения дифференциального уравнения (1) относится к одному из трех возможных классов в зависимости от расположения собственных значений λ_1, λ_2 матрицы на комплексной плоскости:

- 1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ и имеется только один собственный вектор;
- 3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$.

Другими словами, матрица A вещественно подобна одной из трех матриц:

$$1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \quad 2) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Если допустить комплексное преобразование подобия, то третий класс вольтется в первый.

Матрица A всегда может быть приведена к одному из канонических представлений (8): $A = M^{-1}JM$, $\det M \neq 0$, M — вещественная матрица, J — каноническая форма Жордана. При этом в результате линейной замены переменных $\tilde{y} = My$ или $y = M^{-1}\tilde{y}$ система (3) приводится к виду

$$\dot{\tilde{y}} = J\tilde{y}, \quad t \neq \tau_k, \quad \tilde{y}(t^+) = B_1\tilde{y}(t), \quad t = \tau_k, \quad (9)$$

где $B_1 = MBM^{-1}$. Поскольку $e^{\theta A} = e^{\theta M^{-1}JM} = M^{-1}e^{\theta J}M$, то

$$B_1e^{\theta J} = MBM^{-1}Me^{\theta A}M^{-1} = MBe^{\theta A}M^{-1},$$

то есть спектр матрицы монодромии не меняется при неособенном преобразовании переменных в системе (3).

Однако одновременно привести к каноническому виду и матрицу A , и матрицу B возможно лишь при дополнительном условии коммутруемости матриц: $AB = BA$.

Для исследования критического случая устойчивости системы вида (1)-(2) можно применить метод обобщенных функция Ляпунова [3].

Заключение. В работе предложена классификация критических случаев устойчивости периодической импульсной системы на простом примере системы второго порядка. Классификация для периодической системы любого конечного порядка проводится аналогично и основана на спектре матрицы монодромии. Показано, что эволюция решений импульсной системы моделируется рекуррентным уравнением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
- [2] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. — 215 с.
- [3] Анашкин О. В., Митько О. В. Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием. — Динамические системы. — 2011. — Т.1(29), №1. — С. 5–14.

Полунормальная форма одной периодической импульсной системы

Магера Юрий Владимирович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: yuriy.magera.93@mail.ru

Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени [1]:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 + \sum_{|m| \geq 2} g_m^1 x^m, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + \sum_{|m| \geq 2} g_m^2 x^m, \quad t \neq \tau_k, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_1(t^+) &= e^{-\alpha\theta}[(\cos \gamma)x_1(t) - (\sin \gamma)x_2(t)] + \sum_{|m| \geq 2} h_m^1 x^m(t), \\ x_2(t^+) &= e^{-\alpha\theta}[(\sin \gamma)x_1(t) + (\cos \gamma)x_2(t)] + \sum_{|m| \geq 2} h_m^2 x^m(t), \quad t = \tau_k. \end{aligned} \quad (2)$$

$\tau_k = \tau_0 + k\theta$, $\theta > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $x = (x_1, x_2)^T$, $\alpha, \beta, g_m^1, g_m^2, \gamma$ — действительные числа, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, $m = (m_1, m_2) \geq 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$.

Особенность рассматриваемой системы в том, что система линейного приближения, как хорошо видно из уравнений, всего лишь неасимптотически устойчива и потому в системе наблюдается критический случай устойчивости движения, хорошо изученный для дифференциальных уравнений [2], но мало изученный для импульсных систем.

Для упрощения дальнейших выкладок приведем систему (1)–(2) к более простому виду, переходя к комплексно сопряженным переменным $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Переменные z и \bar{z} комплексно сопряженные, поэтому в дальнейшем будет достаточно записывать только уравнение для z .

После замены переменных исходная система примет вид

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{|m| \geq 2} G_m Z^m, \quad t \neq \tau_k, \quad (3)$$

$$z(t^+) = e^{-\alpha\theta + i\gamma} z(t) + \sum_{|m| \geq 2} H_m Z^m(t), \quad t = \tau_k \quad (4)$$

Здесь записаны только уравнения для z , $\lambda = \alpha + i\beta$, $Z = (z, \bar{z})^T$.

Выпишем явные формулы для коэффициентов G_m при $|m| = 2$ и $|m| = 3$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
G_{20} &= \frac{1}{4} (g_{20}^1 + g_{11}^2 - g_{02}^1) + \frac{i}{4} (g_{20}^2 - g_{11}^1 - g_{02}^2), \\
G_{11} &= \frac{1}{2} (g_{20}^1 + g_{02}^1) + \frac{i}{2} (g_{20}^2 + g_{02}^2), \\
G_{02} &= \frac{1}{4} (g_{20}^1 - g_{11}^2 - g_{02}^1) + \frac{i}{4} (g_{20}^2 + g_{11}^1 - g_{02}^2), \\
G_{30} &= \frac{1}{8} (g_{30}^1 + g_{21}^2 - g_{12}^1 - g_{03}^2) + \frac{i}{8} (g_{30}^2 - g_{21}^1 - g_{12}^2 + g_{03}^1), \\
G_{21} &= \frac{1}{8} (3g_{30}^1 + g_{21}^2 + g_{12}^1 + 3g_{03}^2) + \frac{i}{8} (3g_{30}^2 - g_{21}^1 + g_{12}^2 - 3g_{03}^1), \\
G_{12} &= \frac{1}{8} (3g_{30}^1 - g_{21}^2 + g_{12}^1 - 3g_{03}^2) + \frac{i}{8} (3g_{30}^2 + g_{21}^1 + g_{12}^2 + 3g_{03}^1), \\
G_{03} &= \frac{1}{8} (g_{30}^1 - g_{21}^2 - g_{12}^1 + g_{03}^2) + \frac{i}{8} (g_{30}^2 + g_{21}^1 - g_{12}^2 - g_{03}^1).
\end{aligned} \tag{5}$$

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений по инициативе Анри Пуанкаре применяется подход, позволяющий упростить структуру нелинейных слагаемых в правой части системы дифференциальных уравнений [2]. Идея состоит в применении нормализующего почти тождественного преобразования, которое реализуется в виде последовательности преобразований вида

$$w = z + \sum_{|m|=s} W_m Z^m, \quad s = 2, 3, \dots \tag{7}$$

Начнем с поиска подходящего квадратичного преобразования

$$w = z + W_{20} z^2 + W_{11} z\bar{z} + W_{02} \bar{z}^2. \tag{8}$$

Преобразование (8) задается явно, а обратное преобразование уже будет определяться бесконечным рядом и может быть явно задано лишь приближенно. Чтобы выполнить квадратичное преобразование (8) в нашей системе (3)–(4) и найти в явном виде коэффициенты правой части преобразованного уравнения до кубических слагаемых включительно нам потребуется найти коэффициенты разложения z по степеням w и \bar{w} до членов 3-й степени включительно:

$$z = w - \sum_{|m|=2} W_m w^{m_1} \bar{w}^{m_2} + \sum_{|m|=3} Z_m w^{m_1} \bar{w}^{m_2} + \dots, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{30} &= 2W_{20}^2 + W_{11}\overline{W}_{02}, \\
Z_{21} &= 2W_{20}W_{11} + W_{11}(\overline{W}_{11} + W_{20}) + 2W_{02}\overline{W}_{02} = \\
&= 3W_{20}W_{11} + |W_{11}|^2 + 2|W_{02}|^2, \\
Z_{12} &= 2W_{20}W_{02} + W_{11}(\overline{W}_{20} + W_{11}) + 2W_{02}\overline{W}_{11} = \\
&= 2W_{20}W_{02} + 2\overline{W}_{11}W_{02} + W_{11}^2 + W_{11}\overline{W}_{20} = \\
&= 2W_{02}(W_{20} + \overline{W}_{11}) + W_{11}(\overline{W}_{20} + W_{11}), \\
Z_{03} &= W_{11}W_{02} + 2W_{02}\overline{W}_{20} = \\
&= W_{02}(W_{11} + 2\overline{W}_{20}).
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы найти правые части дифференциального уравнения для w до слагаемых третьей степени включительно.

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w + \sum_{|\mu|=2} [G_{mu} + (\mu_1\lambda + \mu_2\bar{\lambda} - \lambda)W_{mu}] \times w^{\mu_1}\bar{w}^{\mu_2} + \sum_{|\nu|=3} \widetilde{W}_\nu w^{\nu_1}\bar{w}^{\nu_2} + \dots \quad (10)$$

Выпишем в явном виде выражения для \widetilde{W}_ν , $|\nu| = 3$.

$$\widetilde{W}_{30} = \lambda Z_{30} - 2(G_{20} + \lambda W_{20})W_{20} - (G_{11} + \bar{\lambda}W_{11})(\overline{W}_{02}) + 2G_{20} + \overline{G}_{02}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{21} &= \lambda Z_{21} - 2(G_{20} + \lambda W_{20})W_{11} - (G_{11} + \bar{\lambda}W_{11})(\overline{W}_{11} + W_{20}) - \\
&- [G_{02} + (2\bar{\lambda} - \lambda)W_{02}]\overline{W}_{02} + 2G_{11} + G_{20} + \overline{G}_{11} + 2\overline{G}_{02}. \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{12} &= \lambda Z_{12} - 2(G_{20} + \lambda W_{20})W_{02} - (G_{11} + \bar{\lambda}W_{11})(\overline{W}_{20} + W_{11}) - \\
&- [G_{02} + (2\bar{\lambda} - \lambda)W_{02}]\overline{W}_{11} + G_{11} + 2G_{02} + \overline{G}_{20} + 2\overline{G}_{11}. \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{03} &= \lambda Z_{03} - (G_{11} + \bar{\lambda}W_{11})W_{02} - [G_{02} + \bar{\lambda}W_{11})(\overline{W}_{20} + W_{11}) - \\
&+ (2\bar{\lambda} - \lambda)W_{02}]\overline{W}_{20} + G_{02} + 2\overline{G}_{20}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Вид этих формул демонстрирует трудоемкость нелинейных замен переменных. Для таких преобразований используются различные системы компьютерной алгебры, позволяющие выполнять нелинейные преобразования любой сложности. Однако получение формул вида (11)–(14) с помощью компьютерных программ требует большого опыта работы с такими программами, так как результат, выдаваемый компьютером, обычно нуждается в дополнительной ручной обработке.

Выпишем полностью уравнения системы (3)–(4) в новых переменных с точностью до членов второй степени

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w + \sum_{|m| \geq 2} [G_m + (\alpha + i(m_1 - m_2 - 1)\beta)W_m] w^{m_1} \bar{w}^{m_2} + \dots, \quad t \neq \tau_k, \quad (15)$$

$$w(t^+) = \left\{ w(t) + \sum_{|m| \geq 2} \left[H_m + W_m (e^{-\alpha\theta + i(m_1 - m_2 - 1)\gamma} - 1) \right] w^{m_1}(t) \bar{w}^{m_2}(t) \right\} e^{-\alpha\theta + i\gamma} + \dots, \quad t = \tau_k. \quad (16)$$

Теперь можно выбрать W_m , $|m| = 2$, так, чтобы уничтожить квадратичные мономы либо в уравнении (15), либо в правой части (16). Квадратичные слагаемые в операторе импульсного воздействия будут уничтожены, если выбрать коэффициенты W_m из условий

$$H_m + W_m (e^{-\alpha\theta + i(m_1 - m_2 - 1)\gamma} - 1) = 0, \quad |m| = 2, \\ W_m = \frac{H_m}{1 - \exp[-\alpha\theta + i(m_1 - m_2 - 1)\gamma]}.$$

В результате последовательности замен переменных вида (7) можно привести исходную импульсную систему к так называемой *полунормальной* форме, в которой при определенных предположениях уничтожаются нелинейные одночлены до любой конечной степени либо в дифференциальной части импульсной системы, либо в дискретной части. Одновременное упрощение этих составляющих невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
- [2] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. — 215 с.

Способы и методы решения иррациональных уравнений и неравенств

Марчик Виктория Александровна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)
e-mail: alex-nikola9i@mail.ru

Одним из важнейших частей современного среднего образования в РФ является математика. Она учит логическому мышлению, анализировать, обобщать, принимать правильные решения в нестандартных ситуациях. В школьной программе часто происходят изменения, детям дают примеры повышенной сложности, которые вызывают определенные трудности. Для более глубокого усвоения пройденного материала учащимися, все чаще уделяется внимание внеклассной дополнительной работе по математике. Поэтому система образования постоянно нуждается в дополнительных учебниках, методических указаниях для учителей и учеников.

Одним из больших и важных тематических разделов в математике являются иррациональные уравнения и неравенства. С понятием иррациональность ученики впервые встречаются в восьмом классе и, в дальнейшем, на протяжении всего обучения оно усложняется. Иррациональные уравнения и неравенства выпускники встречают в итоговых контрольных работах, диагностических работах и в ЕГЭ.

В школьной программе на наш взгляд выделяется недостаточное количество часов для решения иррациональных уравнений и неравенств, поэтому рекомендуется уделить этой теме отдельное внимание, рассмотрев ее на внеурочной деятельности или консультациях. Для этого разработано методическое пособие «Методы и способы решения иррациональных уравнений и неравенств».

Статья посвящена презентации методического пособия для преподавателей и студентов. «Способы и методы решения иррациональных уравнений и неравенств», написанного автором статьи. Целью данного пособия является научить решать указанные уравнения и неравенства учащихся средних школ с помощью различных методов, видеть какой из способов применим и наиболее подходит к решению данной задачи, а также оказывать известную техническую и методическую помощь учителям математики. Остановимся подробно на содержании пособия. Методическое пособие состоит из двух основных частей.

В первой части дано определение иррационального уравнения, рассмотрены основные способы решения этих уравнений, данные методы проиллюстрированы примерами. Перечислим методы решения иррациональных уравнений, приведенных в пособии.

1. Метод пристального взгляда. [5]

Этот метод основан на следующем теоретическом положении: "Если функция $y = f(x)$ возрастает на области определения и число a входит во множество значений, то уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение".

2. Метод возведения обеих частей уравнений в одну и ту же степень. [1]

Этот метод базируется на теореме, в которой говорится, что если возвести обе части уравнения $f(x) = q(x)$ (1) в натуральную степень n , то уравнение $f^n(x) = q^n(x)$ (2). Уравнение (2) является следствием уравнения (1).

3. Решение уравнений с использованием замены неизвестной. [2]

Данный способ рекомендует введение вспомогательной переменной, которая в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным или дробно-рациональным относительно новой переменной.

4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение. [5]

Если уравнение сводится к виду $f(x)g(x) = 0$, то решают уравнения $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ и решение исходного уравнения есть объединение корней последних двух уравнений.

5. Метод выделения полных квадратов. [5]

В этом методе часто используется формула $\sqrt{a^2} = |a|$.

6. Метод оценки. [2]

Метод применим в том случае, когда подкоренные выражения представляют собой квадратный трехчлен, не раскладывающийся на линейные множители. Поэтому целесообразно перед решением уравнения исследовать свойства левой и правой частей уравнения.

7. Иррациональные уравнения, содержащие степени выше второй. [4]

В предложенном методе нужно воспользоваться утверждением: если уравнение имеет вид $\sqrt[n]{f(x)} = q(x)$, то его можно решить, возводя обе части этого уравнения в степень n . Полученное уравнение $f(x) = q(x)^n$ при нечетном n равносильно данному уравнению, а при четном n является следствием, аналогично рассмотренному выше случаю при $n = 2$.

Вторая часть методического указания начинается с определения иррационального неравенства и содержит основные методы и способы решения этих неравенств, которые иллюстрируются с примерами.

Перечислим способы решения иррациональных неравенств, указанных в пособии.

1. Метод определения области допустимых значений. [3]

В этом случае область допустимых значений (ОДЗ) неравенства есть множество значений неизвестной, при которой неравенство является верным.

2. Равносильные преобразования. [4]

Данный пункт говорит о том, что не всегда нужно искать ОДЗ; правильное решение обеспечивается соответствующими равносильными преобразованиями.

В этом разделе рассматриваются уравнения двух видов

$$\sqrt{f} < \sqrt{q} \text{ и } f\sqrt{q} \geq 0.$$

3. Возведение в степень. [1]

Одним из методов решения иррациональных неравенств является последовательное возведение обеих частей неравенства в степень с целью освобождения от корня. В этом разделе также приведен пример двукратного возведения в квадрат. Здесь же рассматриваются неравенства двух видов

$$\sqrt{f} < q \text{ и } \sqrt{f} > q.$$

4. Замена переменной. [4]

В некоторых заданиях полезно сделать замену неизвестной, обозначив корень из некоторого выражения, содержащего неизвестную новой буквой.

5. Умножение на сопряженное. [4]

В данном методе, приводится пример о том, что в некоторых возможных случаях полезно умножить или разделить обе части уравнения на сопряженное к некоторому выражению.

Обе части методического указания заканчиваются примерами для самостоятельного решения и контроля учащихся.

Вывод: В методическом пособии «Методы и способы решения иррациональных уравнений и неравенств» ясно и доступно изложены принципы нахождения правильного ответа. На базе этого методического указания учащиеся должны приобрести умения решать задачи более высокого уровня, по

сравнению с обязательным уровнем сложности, грамотно излагать собственные рассуждения, применять рациональные приемы вычислений, использовать различные способы и методы решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мордкович А. Г. *Алгебра. 8 класс. В2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений.* 12-е изд.–М.: Мнемозина, – 2010 – С. 215.
- [2] Сканава М. И. *Сборник задач по математике для поступающих в вузы.* 6-е изд. – М.: Наука, – 2013 – С. 608.
- [3] Яковлев В. И. *Материалы по математике.* <http://mathus.ru/math/irrun.pdf>
- [4] Олехник С. И., Потапов М. К. *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения.* – М.: Факториал, – 1997 – С. 217.
- [5] Ахаткина Е. М. *Методы решения иррациональных уравнений.* <http://festival.1september.ru/articles/312257/>

Плоские кривые с группой симметрии правильного шестиугольника

Морозова Валентина Павловна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: valya-morozova93@mail.ru

В вещественном m -мерном евклидовом пространстве E^m конечная группа G , порождена ортогональными отражениями относительно $N(G)$ гиперплоскостей с общей точкой O . В прямоугольной системе координат алгебраическую поверхность порядка n зададим уравнением $\phi(\vec{x}) = 0$, где $\phi(\vec{x})$ – многочлен степени n относительно координат вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Множеству всех гиперповерхностей, инвариантных относительно одной и той же группы G , соответствует множество $\phi(\vec{x})$, образующее алгебру I^G .

В работе Флатто дан метод нахождения базиса алгебры $I(G)$ для группы ортогональных отражений G , действующих в E^m . Теорема дает алгоритм получения базисных инвариантов алгебры $I(G)$. Он состоит в следующем: выбираем из первых i строк $I(x, y)$ минор $D_i(x, y)$ размерности $i \times i$ тождественно неравный нулю. Тогда $D_i(x, y) = A_i(x) \cdot B_i(y)$, где $B_i(y) = I_1(y), \dots, I_i(y) : I_i(y) = B_i(y)/B_{i-1}(y) (1 \leq i \leq n)$ и $B_0 = 1$.

С помощью вышеперечисленной теоремы находим образующие алгебры полиномов, относительно группы симметрий правильного шестиугольника. Выберем систему координат так, чтобы оси симметрии имели следующий вид:

$$x = 0, y = 0, x + \sqrt{3}y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x + \frac{1}{\sqrt{3}}y = 0, x - \frac{1}{\sqrt{3}}y = 0.$$

Тогда алгебра полиномов, инвариантных относительно группы симметрий правильного шестиугольника имеет две образующие:

$$I_1 = x^2 + y^2 = C, I_2 = x^6 + y^6 + 15x^2y^4 - 15x^4y^2 = C.$$

Рассмотрим различные кривые с группой симметрии правильного шестиугольника.

$n = 2$, $I_1 = C$, $C - const$; $n = 4$, $I_1^2 = C$, $C = 5$, получаем график функции, изображённый на рис.1. $n = 6$, $\alpha I_2 + \beta I_1^3 = C$, если $\alpha = \beta$, C -возрастает, то получаем график функции, изображённый на рис.2.

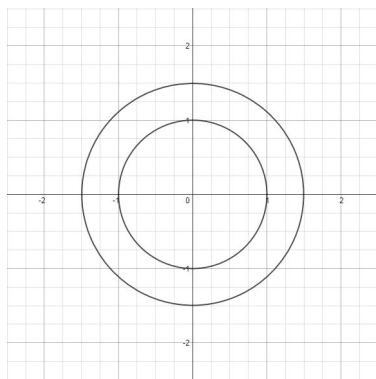


РИС.1

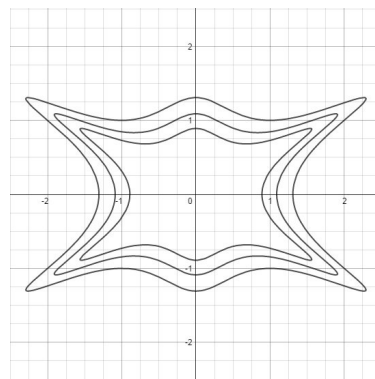


РИС.2

$n = 6$, $\alpha I_2 + \beta I_1^3 = C$, если α и β -возрастают, $C - const$, то получаем график функции, изображённый на рис.3.

$n = 6$, $\alpha I_2 + \beta I_1^3 = C$, если α и β -убывают, $C - const$, то получаем график функции, изображённый на рис.4.

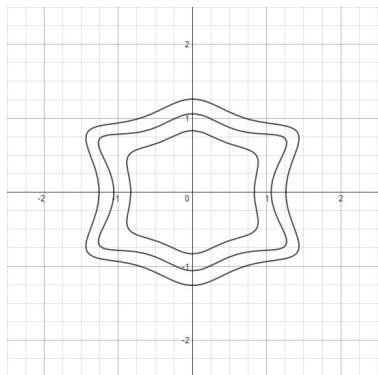


РИС.3

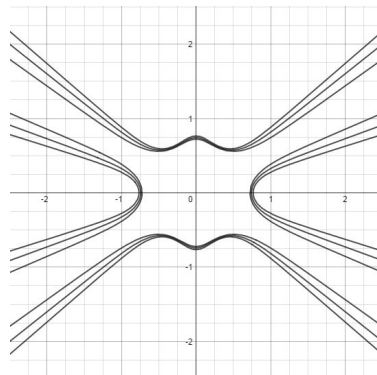


РИС.4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Игнатенко В.Ф. *К проблеме нахождения базисов алгебр многочленов, инвариантных относительно конечных групп симметрий пространства.* – Тез. доклада Всесоюзного симпозиума по теории симметрий и ее обобщениям. Кишинев,– 1980г.
- [2] Игнатенко В.Ф. *Некоторые вопросы геометрической теории инварианов групп, порожденных ортогональными и косыми движениями.* – Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. - М.: Наука, 1984г. - Т.16.- стр.195-229.
- [3] Терновский В.А. *Об инвариантах группы симметрий многогранника.* – Симф. университет. - Симферополь, 1983. - Деп. в Укр. НИИНТИ 17.02.83, №364 Ук. - Д83.

Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана

Муединова Нияра Нуриевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: niyara05-06-1993@mail.ru

В работе рассматриваются идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана.

Пусть \mathcal{M} – конечная алгебра фон Неймана, $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ – множество всех унитарных операторов из \mathcal{M} , $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ – *-алгебра измеримых операторов, присоединенных к \mathcal{M} , $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ – множество ортопроекторов, τ – точный нормальный конечный след на \mathcal{M} такой, что $\tau(1) = 1$. Алгебраические операции в

$\mathbf{S}(\mathcal{M})$ представляют собой сильное произведение и сильную сумму операторов: $T \dot{+} S = \overline{T + S}$ и $T \cdot S = \overline{TS}$.

Линейное подпространство \mathbf{E} в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ называется *идеальным*, если выполнены следующие условия:

- 1). Если $T \in \mathbf{E}$, то $T^* \in \mathbf{E}$;
- 2). Если $T \in \mathbf{E}$, $S \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$ и $|S| \leq |T|$, то $S \in \mathbf{E}$.

Обозначим через $\mathbf{E}_h = \mathbf{S}(\mathcal{M})_h \cap \mathbf{E}$ эрмитову часть \mathbf{E} , а через $\mathbf{E}_+ = \mathbf{S}(\mathcal{M})_+ \cap \mathbf{E}$ – конус положительных эрмитов.

В следующем предложении приведены свойства идеального подпространства, которые получаются непосредственно из определения.

Предложение 1. 1). $T \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $|T| \in \mathbf{E}$;

2). $T \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} T \in \mathbf{E}_h$, $\operatorname{Im} T \in \mathbf{E}_h$;

3). Если $T \in \mathbf{E}$ и $U \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$, то $UT \in \mathbf{E}$;

4). $\mathcal{M}\mathbf{E} = \mathcal{M}\mathbf{E}\mathcal{M} = \mathbf{E}$;

5). $T \in \mathbf{E}_h$ тогда и только тогда, когда $T^+ \in \mathbf{E}_+$ и $T^- \in \mathbf{E}_+$, где $T^+ = \frac{1}{2}(|T| + T)$ и $T^- = \frac{1}{2}(|T| - T)$;

6). Если $P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $Q \preceq P$, то $Q \in \mathbf{E}$.

Для каждого оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$ через $l(T)$, $r(T)$ и $z(T)$ обозначаются соответствующие левый, правый и центральные носители T . Если $T = T^*$, то $l(T) = r(T) = z(T) = s(T)$.

Пусть \mathbf{E} идеальное подпространство в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$. Рассмотрим семь проекторов из \mathcal{M} , которые определяются следующим образом:

$$R_l(\mathbf{E}) = \sup\{l(T) : T \in \mathbf{E}\}, \quad R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = \sup\{P : P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})\};$$

$$R_r(\mathbf{E}) = \sup\{r(T) : T \in \mathbf{E}\}, \quad R_{z(P)}(\mathbf{E}) = \sup\{z(P) : P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})\};$$

$$R(\mathbf{E}) = \sup\{s(T) : T \in \mathbf{E}_+\}, \quad R_z(\mathbf{E}) = \sup\{z(T) : T \in \mathbf{E}\};$$

$$R_{ZP}(\mathbf{E}) = \sup\{P : P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{M})\}.$$

Легко видеть, что

$$R_l(\mathbf{E}) = R_r(\mathbf{E}) = R(\mathbf{E}), \quad R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) \leq R(\mathbf{E}) \leq R_z(\mathbf{E})$$

и

$$R_{ZP}(\mathbf{E}) \leq R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) \leq R_{z(P)}(\mathbf{E}) \leq R_z(\mathbf{E})$$

Теорема 1. Если \mathbf{E} – идеальное подпространство в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$, то

$$R_l(\mathbf{E}) = R_r(\mathbf{E}) = R(\mathbf{E}) = R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = R_{z(P)}(\mathbf{E}) = R_z(\mathbf{E}) = R_{ZP}(\mathbf{E}).$$

Доказательство. Центральный носитель оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$ представим в виде

$$z(T) = \sup\{z(P) : P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \text{ существует } \varepsilon > 0, \text{ что } \varepsilon P \leq |T|\}.$$

Поэтому $z(T) \leq R_{z(P)}(\mathbf{E})$ для любого $T \in \mathbf{E}$, откуда $R_z(\mathbf{E}) \leq R_{z(P)}(\mathbf{E})$. Так как, с другой стороны $R_{z(P)}(\mathbf{E}) \leq R_z(\mathbf{E})$, то $R_z(\mathbf{E}) = R_{z(P)}(\mathbf{E})$.

Покажем теперь, что для каждого ненулевого проектора $P \in \mathbf{E}$ существует проектор Q , такой что $0 < Q \leq P$ и $z(Q) \in \mathbf{E}$. Действительно, пусть $M^z : \mathcal{M} \rightarrow Z(\mathcal{M})$ условное математическое ожидание алгебры фон Неймана \mathcal{M} на ее центр $Z(\mathcal{M})$. Так как $0 < P \leq 1$, то $0 < M^z(P) \leq 1$ и потому существует ненулевой проектор $Z_0 \in Z(\mathcal{M})$ и натуральное число k такие, что

$$\frac{1}{k+1}Z_0 < Z_0M^z(P) \leq \frac{1}{k}Z_0.$$

Положим $Q = Z_0P$. Ясно, что $Z_0 \leq z(P)$ и поэтому $z(Q) = Z_0z(P) = Z_0$. Кроме того, $M^z(Q) = M^z(Z_0P) = Z_0M^z(P)$ откуда

$$\frac{1}{k+1}Z_0 < M^z(Q) \leq \frac{1}{k}Z_0.$$

Рассмотрим проектор $Z_0 - Q$.

$$M^z(Z_0 - Q) = M^z(Z_0) - M^z(Q) = Z_0 - M^z(Q) \geq \frac{k-1}{k}Z_0.$$

Поэтому существует проектор $Q_2 \leq Z_0 - Q$ такой, что $M^z(Q_2) = M^z(Q)$, и поэтому $Q_2 \sim Q$.

Рассуждая аналогично, получим k попарно ортогональных, эквивалентных друг другу проектора $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_k$ (мы полагаем $Q_1 = Q$) такие, что $G = \sum_{i=1}^k Q_i \leq Z_0$. Тогда

$$M^z(Z_0 - G) = Z_0 - \sum_{i=1}^k M^z(Q_i) < Z_0 - \frac{k}{k+1}Z_0 = \frac{1}{k+1}Z_0 < M^z(Q)$$

и потому $Z_0 - G \prec Q$. Так как $P \in \mathbf{E}$ и $Q \leq P$, то $Q \in \mathbf{E}$ и следовательно, в силу предложения 1. (vi), $Q_i \in \mathbf{E}$, $i = 1, 2, \dots, k$ и $G \in \mathbf{E}$, $Z_0 - G \in \mathbf{E}$ и, наконец, $Z_0 = z(Q) \in \mathbf{E}$.

Для каждого ненулевого проектора $P \in \mathbf{E}$ рассмотрим множество

$$A(P) = \{Q \in P(\mathcal{M}), Q \leq P, z(Q) \in \mathbf{E}\}$$

Из доказанного выше следует, что $A(P) \neq \{0\}$. Покажем, что

$$z(P) = \sup\{z(Q), Q \in A(P)\}.$$

Действительно, пусть H такой проектор, что $H \leq z(P)$ и $Hz(Q) = 0$ для каждого $Q \in A(P)$. Тогда $z(H) \leq z(P)$ и $z(H)z(Q) = z(Hz(Q)) = 0$. Допустим, что $H_1 = z(H)P > 0$. Тогда существует такой проектор H_2 такой, что $0 < H_2 \leq H_1$ и $z(H_2) \in \mathbf{E}$. Но тогда $H_2 \in A(H_1) \subset A(P)$ и значит $z(H)z(H_2) = 0$. В то же время $z(H_2) \leq z(H_1) \leq z(H)$. Следовательно, $z(H_2) = 0$ и поэтому $H_2 = 0$. Таким образом $z(H)P = 0$, откуда $z(z(H)P) = z(H)z(P) = z(H) = 0$ и $H = 0$. Поэтому, $z(P) = \sup\{z(Q), Q \in A(P)\}$.

Так как для каждого $Q \in A(P)$, $z(Q) \in \mathbf{E}$, то $z(Q) \leq R_{ZP}(\mathbf{E})$, откуда $z(P) \leq R_{ZP}(\mathbf{E})$ и $R_{z(P)}(\mathbf{E}) \leq R_{ZP}(\mathbf{E})$.

Следовательно, $R_{z(P)}(\mathbf{E}) = R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = R_{ZP}(\mathbf{E}) = R_z(\mathbf{E}) = R(\mathbf{E})$. Теорема доказана. \square

Проектор $R(\mathbf{E})$ называется *носителем* идеального подпространства \mathbf{E} .

Идеальное подпространство \mathbf{E} в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ называется *фундаментальным*, если проектор $R(\mathbf{E}) = 1$.

Отметим, что как и коммутативном случае фундаментальное идеальное подпространство \mathbf{E} в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ вообще говоря не содержит \mathcal{M} , т.е. $R(\mathbf{E}) = 1 \notin \mathbf{E}$. В то же время, если \mathcal{M} – фактор, то как следует из теоремы 1.1, любое ненулевое идеальное подпространство \mathbf{E} в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ является фундаментальным и содержит \mathcal{M} .

Для фундаментальных идеальных подпространств в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ имеет место следующее предложение.

Предложение 2. *Если \mathbf{E} фундаментальное идеальное подпространство в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$, то*

1). *существует подпоследовательность попарно ортогональных центральных проекторов $P_n \in \mathbf{E}$ ($n = 1, 2, \dots$) таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$;*

2). *для каждого оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})_+$ существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из \mathbf{E} , что $0 \leq T_n \uparrow T$.*

Доказательство. 1). Первое утверждение следует из определения фундаментальности и равенства

$$R(\mathbf{E}) = R_{ZP}(\mathbf{E}) = \sup\{P : P \in \mathbf{E} \cap Z(\mathcal{M}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})\} = 1.$$

2). Пусть $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})_+$ и $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность центральных проекторов из \mathbf{E} такая, что $\{P_n\} \uparrow 1$. Существует последовательность $\{T'_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из \mathcal{M}_+ такая, что $T'_n \uparrow T$. Ясно, что $P_k T'_n \uparrow T'_n$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, для каждого n существует число l_n такое, что $T'_n \leq l_n \cdot 1$, откуда $P_k T'_n \leq l_n P_k$ и следовательно, $P_k T'_n \in \mathbf{E}$ для всех k и n .

Рассмотрим $T_n = P_n T'_n$. Ясно, что последовательность $\{T_n\}$ возрастает и $T_n \leq T$. Поэтому существует $T' = \sup T_n \leq T$. Для любого фиксированного m $P_m T_n \uparrow P_m T'$ и $P_m T_n = P_m (P_n T'_n) = (P_m P_n) T'_n \uparrow P_m T$. Поэтому для любого m $P_m T' = P_m T$, откуда $T = T'$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Dixmier. *Von Neumann Algebras*. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, – 1981.
- [2] Дж. Мерфи. *C*-алгебры и теория операторов*. Пер. с англ. под ред. проф. А.Я.Хелемского. – М.: Изд-во Факториал, – 1997.
- [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. – М.: Наука, – 1984.
- [4] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*. – Киев: Институт математики НАН Украины, – 2007.
- [5] Муратов М. А. *Идеальные пространства измеримых операторов. Функциональный анализ*. – Ташкент: Сб. научных трудов, – 1978.

Проект по созданию программы тестирования на языке C

Муратова Ульвие Серветовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: ulikmozg@gmail.com

Эта тема актуальна тем, что во много высших и других учебных заведениях все чаще обращаются к такому виду проверки знаний. В настоящее время заметна тенденция к переходу от традиционной формы контроля знаний, например, экзаменов, контрольных работ, к тестированию. В связи с информационной насыщенностью учебного процесса тестовая форма контроля знаний значительно экономит и позволяет корректировать учебное время.

Тесты и тестовые методики стали использоваться в психологии, социологии, педагогике в конце прошлого века. Впервые термин тест был введен Ф. Гальтоном, а широкое распространение получил после публикации статьи

американского психолога Дж. М. Кеттела "Интеллектуальные тесты и измерения". Среди первого широкого применения тестов в системе образования следует упомянуть серию тестов французского психолога А. Бине для отбора детей с пониженным уровнем интеллектуального развития (1904 г.). Затем в США (Стенфордский университет) на основе этой методики был предложен коэффициент IQ.

По результатам опроса учителей и учащихся можно сделать вывод, что тестами интересуются абсолютно все: читают выпущенные брошюры, статьи в журналах с рекомендациями специалистов, находят методические новинки в глобальной сети Internet, посещают семинары и курсы, сравнивают различные методики составления и проведения тестов в нашей стране и за рубежом – в общем, не остаются равнодушными к проблеме тестирования. В последние годы тесты получают все большее применение в практике обучения.

Задача этого проекта: создание тестов по теории массового обслуживания на языке программирования C#. Работа носит прикладной характер, т.к. данный проект предназначен для тестирования знаний учащихся. Его могут применять преподаватели высших учебных заведений специализирующиеся в области теории массового обслуживания.

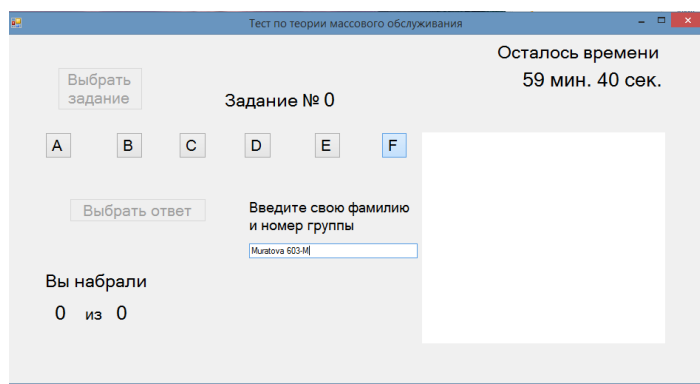
В нашей стране к тестам в образовании отношение неоднозначное. Хотелось бы отметить положительные стороны педагогических тестов. Во - первых, тесты привлекают своей оперативностью. Используя их, можно быстро проверить и оценить уровень усвоения учебного материала. Благодаря этому, контроль правильности выполнения заданий значительно упрощается и может быть выполнен в короткое время. Во - вторых, многие видят в использовании тестов путь повышения объективности проверки и оценки знаний и умений обучаемых. В - третьих, интерес к применению тестов в качестве средства оценки возрос в последнее время еще и в связи с тем, что они рассматриваются как наиболее перспективные измерители уровня обученности учеников в условиях введения в практику школы образовательных стандартов.

Программа тестирования создана на языке C #. Язык программирования C# был создан в конце 1990-х годов и стал частью общей .NET-стратегии Microsoft. Впервые он увидел свет в качестве бета-версии в середине 2000 года. Главным архитектором C# был Андерс Хейлсберг – один из ведущих специалистов в области языков программирования, получивший признание во всем мире. При создании C# его авторы учитывали достижения многих других языков программирования: C++, C, Java, SmallTalk, Delphi, Visual Basic и т.д. Надо заметить что по причине того, что C# разрабатывался с

чистого листа, у его авторов была возможность , оставить в прошлом все неудобные и неприятные особенности любого из предшествующих ему языков. В результате получился действительно простой, удобный и современный язык, по мощности не уступающий C++, но существенно повышающий продуктивность разработок. Ввиду очень удобного объектно-ориентированного дизайна, C# является хорошим выбором для быстрого конструирования различных компонентов.

В данном проекте поставлена задача создания тестов по теории массового обслуживания. Создана база данных – более полутора сотен заданий различного уровня сложности. Задания сгруппированы по темам.

Как происходит тестирование? Для выполнения теста у вас имеется 60 минут. Вам будет предложено 9 заданий. Каждое оценивается определенным количеством баллов, в зависимости от сложности. Вернуться к исправлению ошибочного ответа невозможно. При открытии теста у вас появляется окошечко, в строке необходимо ввести свою фамилию и группу. После ввода нажимаем клавишу Enter.



The screenshot shows a web application window titled "Тест по теории массового обслуживания". The interface includes a timer in the top right corner showing "Осталось времени 59 мин. 40 сек.". On the left, there is a "Выбрать задание" button and a "Выбрать ответ" button. Below these are six buttons labeled A, B, C, D, E, and F, with button F highlighted. In the center, it says "Задание № 0". To the right of the buttons is a large empty text area. Below the buttons, there is a text input field labeled "Введите свою фамилию и номер группы" with the text "Muratova 603-14" entered. At the bottom left, it displays "Вы набрали 0 из 0".

После нажатия клавиши Enter, тест автоматически открывает pdf-файл в котором случайным образом собрано 9 заданий с разным уровнем сложности. Сверху написана ваша фамилия и группа, дата и время начала прохождения теста.

Muratova, 603-M

9 апреля 2016 г. 10:43:36

Задание 1. Дано стационарное распределение числа X заявок в системе $M/M/4/0$.

0	1	2	3	4
0,1	0,14	0,1	0,38	0,28

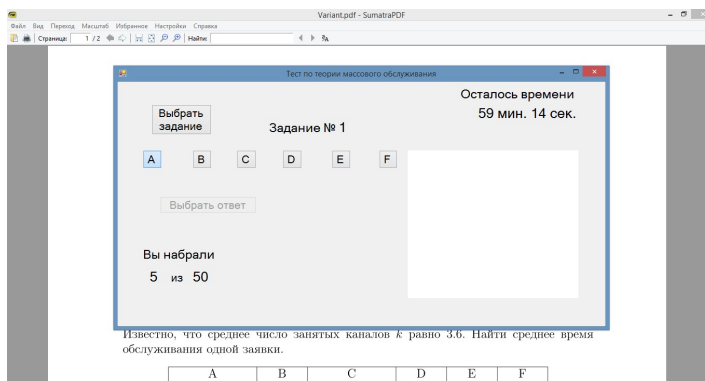
Найти среднее число заявок в системе.

A	B	C	D	E	F
1,55	1,61	1,86	2,53	2,6	3,24

Задание 2. СМО $M/G/n/0$ функционирует в стационарном режиме. Интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 18$ [1/час]. Вероятность отказа в обслуживании $P = 0.2$. Известно, что среднее число занятых каналов \bar{k} равно 2.4. Найти среднее время обслуживания одной заявки.

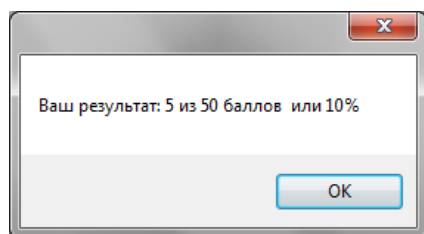
A	B	C	D	E	F
---	---	---	---	---	---

В окошечке теста вы нажимаете на "выбрать задание", затем выбираете правильный ответ и нажимаете "выбрать ответ".



При правильном ответе вам засчитывается определенное количество баллов, если же ответ неправильный вам насчитывается "0" баллов. Максимально возможная сумма баллов — 50.

По окончании теста создается pdf-файл с вашим результатом, подсчитанным в баллах и процентах правильных ответов (баллов) по отношению к общему количеству заданий.



Этот проект позволит руководителю теста проводить тестовый контроль знаний учащихся. Анализ результатов представлен в виде информации о выставлении оценки на количестве правильных ответов. Тестовая форма контроля лишь дополнительное средство контроля знаний учащихся, но программы-тесты нужны в нашем мире, так как они упрощают проверку учащихся на успеваемость и знание материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зиборов В.В. *Visual C # на примерах.* – СПб.: БХВ - Петербург, – 2013 – С. 480.
- [2] Пахомов Б.И. *C # для начинающих.* – СПб.: БХВ - Петербург, – 2013 – С. 432.
- [3] Клейнрок Б.Д. *Теория массового обслуживания.* – М.: Машиностроение, – 1975.

Содержание и методическое оснащение дистанционного изучения курса "Алгебра" в средней школе

Наумчик Кирилл Владимирович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: k-naumchik@mail.ru

В современных условиях остро встал вопрос организации и внедрения технологий дистанционного обучения, как вида обучения, в наибольшей степени отвечающего задаче предоставления обучающимся возможности активно участвовать в регулировании своей учебной деятельности и приобретения, таким образом, навыков самостоятельности в добыче знаний в условиях их быстрого устаревания в стремительно меняющемся мире.

Актуальность дистанционного обучения связана также и с тем, что данный вид обучения способствует решению актуальных задач обеспечения доступности и качества образовательных услуг, учета в образовательном процессе

индивидуальных потребностей и возможностей обучаемых. Значимой особенностью дистанционного обучения выступает также возможность его применения в форс-мажорных обстоятельствах - таких, например, как природные катаклизмы, техногенные аварии или сложные эпидемиологические условия, нарушающих нормальное течение учебного процесса и вынуждающих к его временному прерыванию в учебных заведениях, что, к сожалению, периодически случается.

Дистанционное обучение опирается на современные информационные и телекоммуникационные технологии и, таким образом, задействует и повышает компьютерную грамотность учащихся, совершенно необходимую сегодня каждому человеку, что также обосновывает его значимость и актуальность.

Одновременно с этим актуальность и значимость приобретает вопрос программно-методического обеспечения данного вида обучения с учетом как особенностей технологии его осуществления, так и содержательной специфики учебных дисциплин.

Настоящая работа посвящена поиску оптимальных моделей и освоению способов разработки методического инструментария для дистанционного изучения учебной дисциплины "Алгебра" в средней школе. Выполняя поставленные задачи, мы проанализировали существующие данные, касающиеся методики преподавания математики, дистанционного обучения и методического обеспечения дистанционного преподавания школьного курса алгебры, а также предприняли попытку самостоятельной разработки некоторых учебно-методических материалов для данного курса.

Алгебра как составная часть математики входит в число обязательных к сдаче дисциплин при прохождении итоговой аттестации в средней школе и при поступлении в вузы; при этом математика является одной из наиболее трудных для овладения учебных дисциплин. Поэтому, несмотря на достаточно устойчивый характер знаний, входящих в образовательный стандарт по математике, методика ее преподавания постоянно совершенствуется с учетом новейших достижений математических, психологических, педагогических, кибернетических и др. наук. Это находит отражение в появлении новых учебников, учебных и методических пособий, других средств и технологий обучения, в том числе - предназначенных для дистанционного изучения данной дисциплины.

Дистанционное обучение осуществляется в виде различных моделей, при этом главными его компонентами являются виртуальные учебные материалы и коммуникации. К ним относятся: мультимедийные материалы, электронные учебники, Интернет-ресурсы, электронная почта, сетевые системы обучения,

в т.ч. с наличием модулей самостоятельной оценки знаний и интерактивного объяснения малопонятного материала, сетевой графический редактор, чат-занятия, веб-форумы, он-лайн- и видео-конференции и другие. Неуклонный рост технических возможностей и стремление к повышению качества обучения учащихся обосновывают постоянное усовершенствование компонентов дистанционного обучения.

Разработка компонентов дистанционного обучения осуществляется разными группами специалистов, при этом работа по содержательному и методическому наполнению виртуальных учебных материалов возлагается на специалистов в предметной области - носителей знаний по учебному курсу. В соответствии с этим, актуальными задачами ученых-предметников, методистов и тьюторов (так называют преподавателей и учителей, работающих в дистанционном режиме) становятся отбор и композиция (текстовая, графическая и пр.) теоретического, предметного учебного материала, подготовка учебных задач, примеров, упражнений, разработка заданий для самостоятельной работы, средств контроля знаний и др. в электронном виде.

Анализ публикаций по теме нашей работы показывает, что многие педагоги-практики активно осваивают тьюторские функции и достигли существенных успехов в разработке методического обеспечения дистанционного курса "Алгебра" (Барыльникова Ж.П., Загваздина М.А., Зайцева Т.С. и другие), данная тема рассматривается в научных исследованиях (Снегурова В.И. и др.). При этом потребность в новых разработках электронных учебно-методических материалов и других форм обеспечения дистанционного преподавания алгебры сохраняется.

Делясь опытом методической работы по разработке обеспечения дистанционного обучения, ученые и педагоги обращают внимание на следующее:

- обучаемый должен иметь возможность четко осознавать свое продвижение по курсу, поэтому при разработке программ дистанционного обучения важно тщательно распланировать занятия, включая организацию каждого из них с постановкой целей и задач обучения;
- обучение предполагает не просто чтение учебного материала, но и активное его осмысление и приложение полученных знаний на практике, для этого разрабатываемые методические материалы должны содержать четкое описание ожидаемых от ученика действий;
- "практическое приложение" знаний может быть реализовано как в виде задач, примеров и упражнений, так и в виде прохождения тестов или выполнения более сложных заданий;

- результаты выполнения контрольных заданий и тестов обязательно должны проверяться - либо непосредственно, автоматически, либо учителем;
- при разработке методического оснащения дисциплин нужно учитывать психологические закономерности восприятия, памяти, мышление, внимания, возрастные особенности учащихся.

Выполняя практическую часть настоящей работы, состоящую в подготовке электронных учебно-методических материалов по ряду тем курса "Алгебра" для их дистанционного преподавания, мы учитывали данные рекомендации.

В соответствии с задачами практической части были разработаны виртуальные учебно-методические комплексы по следующим темам: 1. Отношение, пропорция, проценты. 2. Тожественные преобразования. Формулы сокращенного умножения. 3. Уравнения, неравенства и их системы.

Каждая тема в комплексе представлена:

- теоретическим блоком, включающим основные понятия и формулы;
- набором практических заданий для текущей отработки навыков (с пояснениями по их выполнению);
- набором заданий для самостоятельной работы и текущего самоконтроля;
- набором тестов, позволяющим осуществить итоговый самоконтроль изучения каждой темы в режиме он-лайн.

Результаты выполненной работы свидетельствуют, что:

- дистанционное обучение по дисциплине "Алгебра" на сегодняшний день требует расширения базы учебно-методического обеспечения, разрабатываемого с учетом как содержательной специфики данного курса, так и организационных, технологических, психологических и других особенностей данного вида обучения;
- освоение способов разработки учебно-методического инструментария для дистанционного преподавания учебных дисциплин способствует систематизации и углублению предметных знаний и методических умений будущего учителя математики, в связи с чем является актуальным аспектом его вузовской подготовки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Барыльникова Ж.П. *Новому поколению - новое образование. Опыт использования элементов дистанционного обучения в средней школе. Инновационные процессы в современном образовательном пространстве России.* – Сб. научных статей по результатам II Международной научно-практической конференции. Под общ.ред. Н.А. Воробьевой - М.: АПКи ППРО, – 2012.

- [2] Снегурова В.И. *Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ.* – Санкт-Петербург: Наука, – 2010.
- [3] *Дистанционное обучение - образовательная среда XXI века.* Материалы IX междунар. науч.-метод. конф. – Минск: БГУИР, – 2015.
- [4] Тьюторство. *Самоопределение в контексте современности.* – Под ред. С. Сироткина. – Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, – 2011.

Двумерные бесконечные системы уравнений типа свертки

Новик Елена Юрьевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: alena.novik.94@mail.ru

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) одномерные и двумерные с матрицами, зависящими от разности или суммы индексов, находят широкие приложения. В двумерном случае СЛАУ имеет вид

$$(Ax)_{i,k} = \sum_{j,l \in I_1} a_{i-j,k-l} x_{jl} = f_{i,k}, \quad i, k \in I_2, \quad (1)$$

а в операторном

$$Ax = f. \quad (2)$$

Множества индексов I_1, I_2 могут быть конечными и бесконечными, например

$$I_1 = \{|j| < \infty, |l| < \infty\} \text{ или } \{|j| < \infty, l = 0, 1, 2, \dots\} \text{ или } \\ \{j = 0, 1, 2, \dots, |l| < \infty\} \text{ или } \{j, l = 0, 1, 2, \dots\},$$

аналогично задается I_2 .

В случае $I_1 = I_2 = \{|j|, |l| < \infty\}$ с помощью дискретного преобразования Фурье [2] СЛАУ (1) приводим к алгебраическому уравнению

$$A(\xi, \eta) \cdot X(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) \quad (3)$$

при выполнении условий разрешимости

$$A(\xi, \eta) \neq 0 \quad (4)$$

в образах Фурье решение имеет вид

$$X(\xi, \eta) = A^{-1}(\xi, \eta) \cdot F(\xi, \eta) \quad (5)$$

При нарушении условий (4) для приближенного решения применяется метод регуляризации [5].

В случае одного из индексов j или $l = 0, 1, 2, \dots$ исходное уравнение сводится к краевой задаче Римана теории аналитических функций. Рассмотрены и более общие уравнения вида

$$x = Ax + Tx + f, \quad (6)$$

где оператор T задается в виде

$$Tx \equiv \sum_{j,l=1}^{\infty} t_{ijkl} x_{jl} \quad (7)$$

В работах Г.Я. Попова [1] рассматриваются уравнения с таким оператором:

$$x - Tx = f. \quad (8)$$

Для того, чтобы записать рассматриваемые уравнения в операторной форме, в [1] вводятся некоторые нормированные пространства и доказывается их полнота. В этих пространствах вводятся операторы, с помощью которых записываются рассматриваемые уравнения. Доказывается компактность этих операторов. Для приближенного решения рассматриваемых бесконечных систем используется метод редукции, при котором верхний предел в бесконечных суммах заменяется конечным числом с увеличивающимися значениями. Установлены критерии сходимости метода редукции для рассматриваемых двумерных бесконечных систем алгебраических уравнений.

Теория одномерных бесконечных систем, когда искомыми являются не двумерные числовые последовательности x_{im} , $i = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, а одномерные числовые последовательности, т. е. x_i , $i = 1, 2, \dots$, достаточно хорошо разработаны. Этой теории посвящена книга Ruth F. Curtain и Hans Zwart [8]. Элементы этой теории содержатся в книгах Канторовича Л.В., Акилова Г.П. [7], Вулиха В.З. [6], там же указаны критерии сходимости приближенного метода редукции при решении указанных одномерных систем алгебраических уравнений. В работе Ursell F. [11] устанавливается оценка погрешности этого метода. Вопросу единственности решения одномерных бесконечных систем посвящены статьи Мелешко В.В., Гомилко А.М. [1] и Davis A.M. J. [9].

Близкие к изучаемым одномерные бесконечные СЛАУ рассматриваются в работе Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского [2], а уравнения вида (6) в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Попов Г.Я. *Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твердого тела* / сост. Н.Д. Вайсфельд; МОН Украины; Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова. – Одесса.: Астропринт, 2013. – 424 с.
- [2] Гахов Ф.Д., Черский Ю. И. *Уравнения типа свертки*. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
- [3] Лукьяненко В.А. *Теория операторов Нетера и их приложения. Спецкурс*. – Симферополь.: ТНУ, 2012. – 86 с.
- [4] Пресдорф З. *Некоторые классы сиггулярных уравнений*. – М.: Мир, 1908. – 244 с.
- [5] Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений*. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
- [6] Вулих Б.З. *Введение в функциональный анализ*. – М.: Наука, 1967. – 415 с.
- [7] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
- [8] Curtain R.F., Zwart H. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 645 p.
- [9] Davis A.M.J. *Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness* // Proc. R. Soc. London: 2003. – A459. – P. 409-412.
- [10] Meleshko V.V., Gomitko A.M. *Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion* // Proc. R. Soc. London: 2004. – A460. – P. 807-819.
- [11] Ursell F. *Infinite systems of equations. The effect of truncation*. // Quart.J. Mech. Appl. Math.: 1996. – P. 217-233.

О дифференцируемости в нормированных конусах с частичным дистрибутивным законом

Попова Елена Николаевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)

e-mail: lnp_e@bk.ru

В последние десятилетия активно развивается теория абстрактных локально выпуклых (и, в частности, нормированных) конусов. Имеется множество примеров, которые указывают на важность теории выпуклых конусов для самых разных разделов анализа. Так, к примеру, недавно И. В. Орловым было предложено понятие выпуклого банахова конуса и на его базе построено субдифференциальное исчисление отображений векторного аргумента с приложениями в вариационном исчислении [1].

Однако многие объекты в анализе нельзя адекватно описать в терминах выпуклых конусов. Например, если рассматривать набор необязательно выпуклых подмножеств линейного пространства со стандартными операциями сложения по Минковскому и умножения на скаляр, то эти действия не будут

удовлетворять привычному набору свойств. В частности, не будет выполняться второй дистрибутивный закон, а также закон сокращения.

Ввиду этого в работе Ф.С. Стонякина [2] рассмотрены так называемые *сублинейные конусы*, которые теряют второй дистрибутивный закон, а также закон сокращения. Однако полное отсутствие второго дистрибутивного закона и закона сокращения лишает сублинейные конусы существенного набора свойств, и поэтому возникает вопрос адекватной замены этого закона. В этой связи в [2] рассмотрено ослабление вышеупомянутого дистрибутивного закона — *выпуклый дистрибутивный закон (CDL)*: $[x] = [y] \iff x = y$ ($[x]$ — выпуклая оболочка элемента $x \in X$), а также аналогичный *аффинный дистрибутивный закон (ADL)*, связанный с понятием аффинной оболочки элемента $x \in X$:

$$(x) = \left\{ y \in X \mid y + \sum_{k=1}^m \alpha_k x = \sum_{k=1}^n \beta_k x, \alpha_k > 0, \beta_k > 0, \sum_{k=1}^n \beta_k - \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1 \right\}.$$

Эти два закона приводят к новым алгебраическим структурам — *выпуклому сублинейному конусу* и *аффинному сублинейному конусу*. Если помимо этого ещё ввести норму в таких конусах с естественным условием её инвариантности на аффинной (выпуклой) оболочке всякого элемента $x \in X$, то можно говорить о *выпуклом сублинейном нормированном конусе (ВСНК)* или *аффинном сублинейном нормированном конусе (АСНК)*.

Развивая эту идеологию, мы вводим так называемые выпуклый и аффинный частичные дистрибутивные законы, что приводит к соответствующим классам сублинейных нормированных конусов (СНК).

Definition 1. Будем говорить, что СНК X обладает аффинным частичным дистрибутивным законом ($X \in (APDL)$), если существует подмножество $\hat{X} \subset X$ и операция \oplus на \hat{X} такие, что:

- (i) $\forall x \in X$ существует и притом единственный $\hat{x} \in \hat{X} : x \in (\hat{x})$, причём $\|x\| = \|\hat{x}\|$;
- (ii) $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}, \forall x, y \in X$: если $x \in (\hat{x})$ и $y \in (\hat{y})$, то $x + y \in (\hat{x} \oplus \hat{y})$;
- (iii) \hat{X} образует АСНК (ВСНК) относительно операции \oplus и стандартного умножения на скаляр, причём \hat{X} обладает вторым дистрибутивным законом и законом сокращения.

Аналогично рассматривается выпуклый частичный дистрибутивный закон ($CPDL$). Для рассматриваемых классов СНК с выпуклым или аффинным

частичным дистрибутивным законом мы вводим понятие ограниченного локально линейного функционала и на его базе строим аналогии понятия сопряжённого пространства в таких СНК.

Definition 2.

- (i) Будем называть функционал $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченным, если для некоторого $C > 0$ $|\varphi(x)| \leq C \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$;
- (ii) Ограниченный функционал $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть локально непрерывным, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ при $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x_n, x \in (y)$ для некоторого $y \in \widehat{X}$;
- (iii) Функционал $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть частично линейным, если он положительно однороден и верно равенство $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in \widehat{X}$.

Definition 3. Набор частично линейных локально непрерывных функционалов φ будем называть сопряженным конусом к X и обозначать X^* .

В СНК с выпуклым частичным дистрибутивным законом доказан аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала. Отметим, что в невыпуклых конусах существенно условие «выпуклой инвариантности» функционала $p \in IC(X)$: $p([x])$ одноточечно $\forall x \in X$. Легко видеть, что свойство $p \in IC(X)$ для $p(x) = \|x\|$ верно во всяком выпуклом конусе, а также в конусе ограниченных подмножеств нормированного пространства со стандартной супремум-нормой. Подконусом $Y \subset X$ будем называть Y , если $\forall x, y \in Y: x = y + z$ верно $z \in Y$.

Theorem 1. Пусть X — СНК с (CPDL), на X задан выпуклый функционал $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in IC(X)$, Y — подконус X и $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ — частично линейный функционал такой, что $|\varphi(y)| \leq p(y) \quad \forall y \in Y$. Тогда существует частично линейный функционал $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $|L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$ и $L(y) = \varphi(y) \quad \forall y \in Y$.

Следующий результат о разделении точек локально непрерывными частично линейными функционалами верен уже в случае обоих аналогов второго дистрибутивного закона.

Theorem 2. Если X — СНК с (APDL) или (CPDL) то для любых $x \neq y$ существует $\varphi \in X^*$: $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

На базе предыдущих результатов в классе СНК с рассмотренными аналогами второго дистрибутивного закона введен аналог понятия компактно-го субдифференциала (или K -субдифференциала) [1], построены примеры и

доказаны основные свойства K -субдифференциалов. Сформулируем понятие K -субдифференцируемости в важном для экстремальных задач случае функционалов $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, X — СНК с (APDL) или (CPDL).

Definition 4. Назовем K -субдифференциалом отображения $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ по направлению $h \in X$ в точке $x_0 \in X$ множество

$$\partial_K f(x_0, h) := \bigcap_{\delta > 0} \partial_K f(x_0, h, \delta), \quad \text{где} \quad (1)$$

$$\partial_K f(x_0, h, \delta) = \overline{\text{co}} \left\{ \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda} \mid 0 < \lambda < \delta \right\},$$

если $\partial_K f(x_0, h)$ — компакт в \mathbb{R} , а также $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < \delta < \delta_\varepsilon$
 $\partial_K f(x_0, h, \delta) \subset \partial_K f(x_0, h) + [-\varepsilon; \varepsilon]$.

Доказана простая формула для вычисления $\partial_K f(x, h)$.

Theorem 3. Функционал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ K -субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке: $\bar{\partial}f(x, h)$ и $\underline{\partial}f(x, h)$. При этом $\partial_K f(x, h) = [\underline{\partial}f(x, h); \bar{\partial}f(x, h)]$.

Definition 5. Пусть X — сублинейный конус и $X \in (APDL)$ (или $X \in (CPDL)$), Y — индуктивно упорядоченный сублинейный конус и $Y \in (APDL)$ (или $Y \in (CPDL)$). Оператор $A : X \rightarrow Y$ назовем частично сублинейным, если: $A\widehat{X} \subset \widehat{Y}$, $A(h_1 \oplus h_2) \preceq Ah_1 \oplus Ah_2$, $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah \forall \lambda \geq 0$.

Через \mathbb{R}_K будем обозначать набор выпуклых компактов на вещественной прямой \mathbb{R} с частичным порядком $x \preceq y \iff x \subset y \forall x, y \in \mathbb{R}_K$.

Definition 6. Будем говорить, что f K -субдифференцируем по Фреше в точке x_0 , если f K -субдифференцируем в этой точке по любому направлению $h \in X$ и K -субдифференциал по направлению $\partial_K f(x_0, h)$ частично сублинеен по h , а также оператор $\partial_K f(x_0)h : X \rightarrow \mathbb{R}_K$ ($\partial_K f(x_0)h = \partial_K f(x_0, h)$) ограничен и топологическое стягивание в (1) равномерно по всем направлениям $h : 0 < \|h\| \leq 1$.

Дифференцируемость f мы понимаем как односточность $\partial_K f(x_0)$. На дифференцируемые и K -субдифференцируемые функционалы f переносятся стандартные арифметические свойства, а также необходимое условие экстремума $0 \in \partial_K f(x_0)$. С использованием построенной теории рассмотрены примеры экстремальных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И. В. *Введение в сублинейный анализ*. – *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **53** (2014), 64 – 132.
 [2] Стонякин Ф. С. *Сублинейные нормированные конусы: теоремы отделимости и смежные результаты*. – *Соврем. мат. Фундам. направл.*, В печати.

Разностно-краевые задачи типа Карлемана для полосы

Рогожиняру Надежда Анатольевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
 e-mail: nadusha92@mail.ru

Уравнения типа свертки и сводящиеся к ним (или к краевым задачам теории аналитических функций) задачи для уравнений в частных производных, задачи для разностных уравнений имеют широкие приложения [1,2]. Ю.И. Черский указывает на важность различных обобщений такого класса задач [2]. В данной работе рассматривается пример разностно-краевой задачи типа Карлемана. Результаты являются продолжением исследований начатых в работах [2-4] и получены совместно с В.А. Лукьяненко.

Пусть требуется найти функцию $u_k(x, y)$ по условиям

$$\Delta u_k(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k - 1 \leq y \leq k, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_k(x, k) - u_k(x, k - 1) &= m_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial}{\partial y} u_{k+1}(x, k) &= e^{-x} [u_k(x, k - 1) - g_k(x)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Применим преобразование Фурье по переменной x [1]:

$$U_k(\xi, y) = F u_k(x, y).$$

Из (0.2) следует

$$\begin{aligned} U_k(\xi, k) - U_k(\xi, k - 1) &= M_k(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial}{\partial y} U_{k+1}(\xi, k) &= \Phi_k(\xi + i), \\ U_k(\xi, k - 1) - G_k(\xi) &= \Phi_k(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению Лапласа (0.1) получим

$$(-i\xi)^2 U_k(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U_k(\xi, y) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \xi^2 = 0.$$

Откуда следует, что общее решение запишется в виде

$$U_k(\xi, y) = A_k(\xi)e^{-\xi y} + B_k(\xi)e^{\xi y}$$

или

$$U_k(\xi, y) = A_k(\xi)sh\xi(y - k) + B_k(\xi)ch\xi(y - k), \quad k - 1 < y < k.$$

Из (3) следует

$$\begin{aligned} U_k(\xi, k) &= A_k(\xi)sh\xi(k - k) + B_k(\xi)ch\xi(k - k) = B_k(\xi), \\ \frac{\partial}{\partial y}U_k(\xi, y) &= A_k(\xi)\xi ch\xi(y - k) + B_k(\xi)\xi sh\xi(y - k), \\ U_k(\xi, k) - U_k(\xi, k - 1) &= B_k(\xi) - [-A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)ch\xi] = M_k(\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_k(\xi, k - 1) - G_k(\xi) &= -A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)ch\xi - G_k(\xi) = \Phi_k(\xi), \\ \frac{\partial}{\partial y}U_{k+1}(\xi, k) &= A_{k+1}(\xi)\xi ch\xi + B_{k+1}(\xi)\xi sh\xi = \Phi_k(\xi + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Из системы

$$\begin{aligned} A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)[1 - ch\xi] &= M_k(\xi), \\ -A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)ch\xi &= G_k(\xi) + \Phi_k(\xi), \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} A_k(\xi) &= \frac{ch\xi M_k(\xi) - [1 - ch\xi][G_k(\xi) + \Phi_k(\xi)]}{sh\xi}, \\ B_k(\xi) &= \frac{sh\xi[G_k(\xi) + \Phi_k(\xi)] + sh\xi M_k(\xi)}{sh\xi}, \\ \frac{\xi ch\xi}{sh\xi} &(ch\xi M_{k+1}(\xi) - [1 - ch\xi][G_{k+1}(\xi) + \Phi_{k+1}(\xi)]) + \\ &+ \frac{\xi sh\xi}{sh\xi} (sh\xi[G_{k+1}(\xi) + \Phi_{k+1}(\xi)] + sh\xi M_{k+1}(\xi)) = \Phi_k(\xi + i), \\ \Phi_k(\xi + i) &= \xi \left[\frac{ch\xi}{sh\xi} + 1 \right] \Phi_{k+1}(\xi) + \xi \left[\frac{ch\xi}{sh\xi} ch\xi + \frac{sh\xi}{sh\xi} sh\xi \right] M_{k+1}(\xi) + \\ &+ \xi \left[\frac{sh\xi}{sh\xi} sh\xi + \frac{ch\xi}{sh\xi} [1 - ch\xi] \right] G_{k+1}(\xi). \end{aligned}$$

Окончательно получаем разностно-краевую задачу

$$\Phi_k(\xi + i) = \xi \left[\frac{ch\xi}{sh\xi} + 1 \right] \Phi_{k+1}(\xi) + \tilde{G}_{k+1}(\xi), \quad (6)$$

где

$$\tilde{G}_{k+1}(\xi) = \xi \frac{ch^2\xi + sh^2\xi}{sh\xi} M_{k+1}(\xi) + \xi \frac{sh^2\xi - ch^2\xi + ch\xi}{sh\xi} G_{k+1}(\xi) =$$

$$= \frac{\xi}{sh\xi} [ch^2\xi M_{k+1}(\xi) + (ch\xi - 1)G_{k+1}(\xi)]$$

или

$$\Phi_k(\xi + i) = A(\xi)\Phi_{k+1}(\xi) + G_{k+1}(\xi). \quad (7)$$

Решение разностно-краевой задачи типа Карлемана (7) получено методом факторизации. Разрешимость задачи зависит от индекса коэффициента $A(\xi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гахов Ф.Д. *Уравнения типа свертки* / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296с.
- [2] Черский Ю.И. *Метод сопряжения аналитических функций с приложениями* / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552 с.
- [3] Лукьяненко В.А. *Обобщенная задача Карлемана* / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. – 2005. – №19. – С. 129–144.
- [4] Лукьяненко В.А. *Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных* / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. – 2014. – №1-2. – С. 143-152.

Задачи восстановления по данным косвенных измерений

Рустем Диана Ремзиевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)
e-mail: ladydianochka@mail.ru

Задачи восстановления имеют различную природу. В задаче восстановления изображения предполагается наличие некоторой модели косвенных измерений в виде интегральных уравнений типа свертки. В этом случае под восстановлением понимается нахождение решения уравнения при наличии априорной информации, заданного уровня погрешности оператора и правой части. В более широком смысле необходимо восстановить модель (идентификация модели) и решение. Такого типа задачи некорректны и для их приближенного решения разрабатываются регуляризирующие алгоритмы [1].

Актуальными являются и более простые задачи, в которых восстанавливаются некоторые характерные точки искомой функции (точки экстремума, участки монотонности и т.п.); экстремальные задачи восстановления параметров и др.

В работе рассматриваются примеры таких задач из оптики: восстановление точек отражения, огибающих или особенностей (каустика); теории катастроф

и др. Класс задач выбран исходя из методических соображений. Здесь должен содержаться набор характерных задач от простейших до задач, связанных с теорией катастроф [1-3].

В задаче Герона луч света из точки A падает на вертикальную поверхность l и регистрируется в точке B . Требуется восстановить точку отражения C от поверхности l . Если расположение прямой l известно, то ее можно совместить с осью OX , а точку $A(0, a)$ расположить на оси OY , тогда точка $B(b, d)$ расположена в верхней полуплоскости, искомая $C(x, 0)$ расположена на оси OX .

Соответствующая экстремальная задача (ЭЗ)

$$\rho(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + d^2} \rightarrow \text{extr}$$

имеет решение

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + d^2}} = 0,$$

из которого находится x , т.е. точка $C(x, 0)$ и устанавливается, что угол падения равен углу отражения.

Если зеркальная поверхность l задается уравнением $y = f(x)$, то решение сводится к ЭЗ

$$\rho(x) = \sqrt{x^2 + (a - f(x))^2} + \sqrt{(b-x)^2 + (d - f(x))^2} \rightarrow \text{extr}$$

необходимые условия имеют вид:

$$\frac{x - (a - f(x))f'(x)}{\sqrt{x^2 + (a - f(x))^2}} - \frac{(b-x) + (d - f(x))f'(x)}{\sqrt{(b-x)^2 + (d - f(x))^2}} = 0.$$

Локально качественная картина аналогична классическому случаю. Рассмотрены примеры кривых второго порядка; параллельного пучка прямых и др.

Для параллельного пучка лучей, падающего на окружность радиуса 1 с центром в точке $(-\frac{1}{2}, 0)$ из достаточно удаленной точки $D(-d, 0)$ и отражающей в точку (ξ, η) длина пути

$$\rho_{\xi\eta}(y) = \left(d - \frac{1}{2} + \sqrt{1 - y^2}\right)^{1/2} + \left(\left(\xi + \frac{1}{2} - \sqrt{1 - y^2}\right)^2 + (\eta - y)^2\right)^{1/2}$$

зависит от y : точка отражения на окружности C имеет координаты $(\sqrt{1 - y^2} - \frac{1}{2}, y)$. Раскладывая $\rho_{\xi\eta}(y)$ в ряд до четвертого порядка по y и до первого порядка по ξ и η , получаем

$$\rho_{\xi\eta}(y) \approx F_{\xi\eta}(y) = -\frac{1}{4}(1 + 5\xi)y^4 + \frac{1}{2}\eta y^3 + \xi y^2 - 2\eta y + (d + 1 - \xi).$$

Из симметрии, относительно оси OX в точке $\xi = 0, \eta = 0$, получаем, что семейство $\rho_{\xi\eta}(y)$ сильно эквивалентно в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, универсальной деформации F функции $-\frac{y^4}{4}$ (локальная геометрия сборки Уитни) [2].

Огибающая семейства параллельных лучей, отраженных от окружности, является нефроидой (эпициклоида специального вида). Задача восстановления особенностей для различных поверхностей требует применение теории огибающей и теории катастроф [2,3].

Дальнейшее обобщение заключается в восстановлении поверхности отражения. Например, для обобщенной задачи Герона. По координатам A и точек B_1, B_2 находятся координаты точек C_1, C_2 , лежащих на прямой $y = ax + b$. А затем параметры прямой a, b находятся из системы двух алгебраических уравнений. Восстанавливая локально искомую функцию, при наличии априорной информации и достаточного числа косвенных измерений, приближенно восстанавливается искомая функция на необходимом отрезке (множестве).

Идентификация особенностей, например в виде нефроиды, локально определяет отражающую поверхность в виде окружности (цилиндрической поверхности).

Более сложный класс задач возникает в случае неизвестного характера отражающей поверхности и при косвенных измерениях с движущихся объектов с помощью антенных устройств. Такого рода задачи представляют практический интерес в задачах дистанционного зондирования поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лукьяненко В.А. *Экстремальные задачи. Спецкурс*. – Симферополь: ТНУ, 2012. – 120с.
- [2] Арнольд В.И. *Теория катастроф*. – М.: Изд-во МГУ. – 1983.
- [3] Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*. – М.: Мир, 1980. – 608с.

Факторы типа (II_1)

Смаилова Эльзара Рефатовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)
e-mail: elzara.mamatova@mail.ru

В работе рассматриваются факторы типа (II_1) , построенные по дискретной группе преобразований.

Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H , $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ — подалгебра фон Неймана, \mathcal{M}' — коммутант, а \mathcal{M}'' — бикоммутант \mathcal{M} . Центром алгебры фон Неймана \mathcal{M} называется множество $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

Для любой алгебры фон Неймана \mathcal{M} имеет место вложение:

$$\mathbb{C}_H = \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq Z(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Если $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, то алгебра фон Неймана \mathcal{M} называется коммутативной. В этом случае имеет место вложение $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$.

Если $Z(\mathcal{M}) = \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}\}$, то алгебра фон Неймана \mathcal{M} называется *фактором*.

Обозначим через $P(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{M} : P^2 = P^* = P\}$ множество всех ортопроекторов алгебры фон Неймана \mathcal{M} .

Для любого фактора \mathcal{M} существует функция $D : P(\mathcal{M}) \rightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $D(P) = 0$, если $P = 0$; $D(P) > 0$, если $P \neq 0$.
- 2) $D(P) = \infty$ тогда и только тогда, когда проектор P — бесконечен.
- 3) Если $P \sim Q$, то $D(P) = D(Q)$.
- 4) Если $P \perp Q$, то $D(P \oplus Q) = D(P) + D(Q)$
- 5) Если $P < Q$ и P — конечен, то $D(P) < D(Q)$.

Функция $D(P)$, удовлетворяющая условиям 1), 3), 4), называется относительной размерностью или размерностной функцией. Область изменения размерностной функции, после соответствующей нормировки, есть одно из следующих множеств:

$$(I_n) \quad \Delta = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$(I_\infty) \quad \Delta = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$(II_1) \quad \Delta = [0, 1]$$

$$(II_\infty) \quad \Delta = [0, \infty]$$

$$(III) \quad \Delta = \{0, \infty\}$$

Говорят, что \mathcal{M} — фактор типа $(I_n), (I_\infty), (II_1), (II_\infty)$ или (III) , если множество значений Δ размерностной функции $D_{\mathcal{M}}$ имеет соответствующий вид. Факторы типа $(I_n), (I_\infty)$ называют *дискретными*. Факторы типа $(II_1), (II_\infty)$ называют *непрерывными*. Факторы типа $(I_n), (II_1)$ называют *конечными*. Факторы типа $(I_\infty), (II_\infty)$ называют *бесконечными*. Факторы типа (III) называют *вполне бесконечными*.

Пусть \mathcal{M} — фактор конечного типа, A — эрмитов оператор из \mathcal{M} , $P(\lambda)$ — спектральная функция оператора A . Тогда $P(\lambda) \in \mathcal{M}$ для любого λ и функция

$D_{\mathcal{M}}(P(\lambda))$ является неубывающей функцией от λ . Если $\|A\|_{\mathcal{M}} < C$, то $P(\lambda)$ и $D_{\mathcal{M}}(P(\lambda))$ постоянны вне интервала $[-C, C]$. Поэтому существует число

$$T_{\mathcal{M}}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dD_{\mathcal{M}}(P(\lambda)) = \int_{-C}^C \lambda dD_{\mathcal{M}}(P(\lambda)),$$

которое называется *относительным следом оператора A* .

Если \mathcal{M} — фактор конечного типа, то существует одна и только одна функция $T(A)$, определенная для всех эрмитовых операторов A из \mathcal{M} и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1') $T(1) = 1$;
- 2') $T(\alpha A) = \alpha T(A)$ для всех вещественных α ;
- 3') $T(A + B) = T(A) + T(B)$, если A и B перестановочны;
- 4') $T(A) \geq 0$, если A — положительно определенный оператор;
- 5') $T(U^{-1}AU) = T(A)$, если U — унитарный оператор из \mathcal{M} .

Эта функция есть относительный след $T_{\mathcal{M}}(A)$.

Утверждение 4. *Если существует функция $T(A)$, определенная для всех эрмитовых операторов из фактора \mathcal{M} , удовлетворяющая условиям 1' — 4' и дополнительным условиям:*

- 6'*) $T(AB) = T(BA)$, если $A, B \in \mathcal{M}$, AB и BA — эрмитовы операторы;
- 7'*) $P = 0$, если $T(P) = 0$ и P — оператор проектирования,

то \mathcal{M} — фактор конечного типа, а $T(A)$ — относительный след в \mathcal{M} .

Построение примеров Факторов всегда привлекало внимание специалистов по алгебрам фон Неймана. Первые примеры были построены Дж. Мюрреем и Дж. фон Нейманом. Более подробный обзор можно найти в статье Лодкина А.А., Рубштейна Б.А. Мы рассматриваем пример фактора типа (II_1) , построенного по дискретной группе преобразований.

Пример фактора типа (II_1) . Пусть \mathfrak{G} — счетная дискретная группа всех преобразований $S(x) = ax + b$, $a > 0$ с рациональными коэффициентами a и b , с единичным элементом $E(x) = x$, удовлетворяющая условию: если $S \neq E$, то класс \mathfrak{G}_S всех элементов вида $S_2^{-1}SS_2$, $S_2 \in \mathfrak{G}$, бесконечен. Ясно, что для любого $S \in \mathfrak{G}$ обратный элемент имеет вид $S^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Образуем гильбертово пространство \mathcal{H} , элементами которого являются векторы $x = \{x_S, S \in \mathfrak{G}\}$, $x_S \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию $\sum_{S \in \mathfrak{G}} |x_S|^2 < \infty$,

причем скалярное произведение двух векторов $x = \{x_S, S \in \mathfrak{G}\}$ и $y = \{y_S, S \in \mathfrak{G}\}$ определяется формулой $(x, y) = \sum_{S \in \mathfrak{G}} x_S \overline{y_S}$.

Введем в пространстве \mathcal{H} операторы $U_{S_0}, V_{S_0}, S_0 \in \mathfrak{G}$, полагая

$$U_{S_0} \{x_S, S \in \mathfrak{G}\} = \{x_{SS_0}, S \in \mathfrak{G}\},$$

$$V_{S_0} \{x_S, S \in \mathfrak{G}\} = \{x_{S_0^{-1}S}, S \in \mathfrak{G}\}.$$

Так как

$$U_{S_0} V_{S_0} \{x_S\} = U_{S_0} \{x_{S_0^{-1}S}\} = \{x_{S_0^{-1}SS_0}\}$$

и

$$V_{S_0} U_{S_0} \{x_S\} = V_{S_0} \{x_{SS_0}\} = \{x_{S_0^{-1}SS_0}\},$$

то операторы U_{S_0} и V_{S_0} — коммутируют. Кроме того, U_{S_0} и V_{S_0} — унитарные операторы в \mathcal{H} . Действительно,

$$U_{S_0} U_{S_0}^* \{x_S\} = U_{S_0} U_{S_0^{-1}} \{x_S\} = U_{S_0} \{x_{SS_0^{-1}}\} = \{x_{SS_0^{-1}S_0}\} = \{x_S\},$$

$$U_{S_0}^* U_{S_0} \{x_S\} = U_{S_0^{-1}} U_{S_0} \{x_S\} = U_{S_0^{-1}} \{x_{SS_0}\} = \{x_{SS_0S_0^{-1}}\} = \{x_S\}.$$

Следовательно, $U_{S_0} U_{S_0}^* = U_{S_0}^* U_{S_0} = I_{\mathcal{H}}$ — тождественный оператор в \mathcal{H} .

Аналогично,

$$V_{S_0} V_{S_0}^* \{x_S\} = V_{S_0} V_{S_0^{-1}} \{x_S\} = V_{S_0} \{x_{S_0S}\} = \{x_{S_0^{-1}S_0S}\} = \{x_S\},$$

$$V_{S_0}^* V_{S_0} \{x_S\} = V_{S_0^{-1}} V_{S_0} \{x_S\} = V_{S_0^{-1}} \{x_{S_0^{-1}S}\} = \{x_{S_0S_0^{-1}S}\} = \{x_S\}.$$

Следовательно, $V_{S_0} V_{S_0}^* = V_{S_0}^* V_{S_0} = I_{\mathcal{H}}$.

Пусть \mathcal{M}_1 — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов A , перестановочных со всеми операторами V_{S_0} , а \mathcal{M}_2 — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов B , перестановочных со всеми операторами U_{S_0} . Так как U_{S_0} и V_{S_0} коммутируют, то

$$U_{S_0} \in \mathcal{M}_1, \quad V_{S_0} \in \mathcal{M}_2 \quad \text{для любого } S_0 \in \mathfrak{G}. \quad (1)$$

Всякий ограниченный оператор A в \mathcal{H} можно представить в виде ограниченной числовой матрицы $\|A_{S,S_1}\|_{S,S_1 \in \mathfrak{G}}$. Если $A \in \mathcal{M}_1$, то условие перестановочности с операторами V_{S_0} дает $A_{S_0S,S_0S_1} = A_{S,S_1}$. Полагая $S_0 = S^{-1}$, получим: $A_{S,S_1} = A_{E,S^{-1}S_1}$. Обозначим $A_{S_2} = A_{E,S_2}$. Тогда $A_{E,S^{-1}S_1} = A_{S^{-1}S_1}$.

Итак, матрица оператора $A \in \mathcal{M}_1$ должна иметь вид $\|A_{S^{-1}S_1}\|_{S,S_1 \in \mathfrak{G}}$. Аналогично, матрица оператора $B \in \mathcal{M}_2$ должна иметь вид $\|B_{SS_1^{-1}}\|_{S,S_1 \in \mathfrak{G}}$.

Теорема 1. *-Алгебры \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 являются факторами.

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}'_2 = \mathcal{M}_1$. Для этого заметим, что каждая матрица $A = \| A_{S^{-1}S_1} \|$ перестановочна с каждой матрицей $B = \| B_{SS_1^{-1}} \|$. Действительно,

$$AB = \left\| \sum_{S_2} A_{S^{-1}S_2} B_{S_2S_1^{-1}} \right\|, \quad BA = \left\| \sum_{S_2} B_{SS_2^{-1}} A_{S_2^{-1}S_1} \right\|.$$

Полагая в первой сумме $S_2 = SS_2'^{-1}S_1$, получаем:

$$\sum_{S_2} A_{S^{-1}S_2} B_{S_2S_1^{-1}} = \sum_{S_2'} A_{S^{-1}SS_2'^{-1}S_1} B_{SS_2'^{-1}S_1S_1^{-1}} = \sum_{S_2'} A_{S_2'^{-1}S_1} B_{SS_2'^{-1}},$$

следовательно, $AB = BA$. Отсюда

$$\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}'_2. \quad (2)$$

С другой стороны, из соотношений (1) вытекает, что

$$\mathcal{M}_1 = \{R(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset \mathcal{M}'_2, \quad \mathcal{M}_2 = \{R(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset \mathcal{M}'_1, \quad (3)$$

где $R(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$ — минимальная алгебра фон Неймана, содержащая $(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$, а $R(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$ — минимальная алгебра фон Неймана, содержащая $(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$.

Сравнивая соотношения (3) и (2), видим, что

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}'_2 = R(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G}), \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}'_1 = R(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G}).$$

Найдем пересечение $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. Если оператор A принадлежит этому пересечению, то его матрица $\| A_{S,S_1} \|$ должна удовлетворять обоим условиям

$$A_{S_0S,S_0S_1} = A_{SS_0,S_1S_0} = A_{S,S_1}.$$

Из первого условия, как было показано выше, следует, что $A_{S,S_1} = A_{S^{-1}S_1}$. Из второго условия получим:

$$A_{S,S_1} = A_{SS_0,S_1S_0} = A_{S_0^{-1}S^{-1}S_1S_0},$$

т.е. $A_{S_0^{-1}S^{-1}S_1S_0} = A_{S^{-1}S_1}$. Следовательно, функция A_S постоянна на каждом классе \mathfrak{G}_{S_0} . С другой стороны, в силу ограниченности матрицы $\| A_{S,S_1} \|$, должно выполняться неравенство

$$\sum_{S_2 \in \mathfrak{G}} |A_{S_2}|^2 = \sum_{S_2 \in \mathfrak{G}} |A_{E,S_2}|^2 < \infty. \quad (4)$$

Так как, согласно условию, класс \mathfrak{G}_{S_0} бесконечен при $S_0 \neq E$, то выполнение условия (4) возможно только в том случае, когда постоянное значение

функции A_S на каждом классе \mathfrak{G}_{S_0} равно нулю. Таким образом, $A_{S_2} = 0$ при $S_2 \neq E$. Следовательно, $A_{S,S_1} = \delta_{S,S_1} A_E$, где

$$\delta_{S,S_1} = \begin{cases} 1, & S = S_1, \\ 0, & S \neq S_1. \end{cases}$$

Это означает, что $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}'_2 \cap \mathcal{M}_2$, т.е. что $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — факторы. \square

Теорема 2. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — факторы класса (II_1) .

Доказательство. Рассмотрим, например, фактор \mathcal{M}_1 . Каждому оператору A из \mathcal{M}_1 с матрицей $\|A_{S^{-1}S_1}\|$ поставим в соответствие число $T(A) = A_E$ и докажем, что полученная таким образом функция $T(A)$ удовлетворяет условиям утверждения 4. Во-первых, очевидно, что $T(1) = 1$, $T(\alpha A) = \alpha T(A)$, $T(A+B) = T(A)+T(B)$, так что условия 1', 2', 3' относительного следа выполнены. Далее, если A — положительно определенный эрмитов оператор из \mathcal{M}_1 , то $A = B^*B$, где $B \in \mathcal{M}_1$. Пусть оператору A соответствует матрица $\|A_{S^{-1}S_1}\|$, а оператору B — матрица $\|B_{S^{-1}S_1}\|$. Тогда $A_{S^{-1}S_1} = \sum_{S_2} \bar{B}_{S_2^{-1}S} B_{S_2^{-1}S_1}$, следовательно, при $S = S_1 = E$

$$T(A) = A_E = \sum_{S_2} \|B_{S_2^{-1}}\|^2 \geq 0,$$

причем знак равенства возможен только тогда, когда $B_{S_2} \equiv 0$, т.е. когда $A = 0$. Условия 4' и 7'* тем самым проверены. Аналогично можно доказать, что $T(AB) = T(BA)$ для любых $A, B \in \mathcal{M}_1$.

Таким образом, функция $T(A)$ удовлетворяет всем условиям утверждения 4. Следовательно, \mathcal{M}_1 — фактор конечного класса. С другой стороны, случай (I_n) здесь невозможен, так как \mathcal{M}_1 содержит бесконечное множество линейно независимых элементов U_{S_0} . Следовательно, \mathcal{M}_1 — фактор класса (II_1) .

Аналогично доказывается, что \mathcal{M}_2 — фактор класса (II_1) . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М.А. *Нормированные кольца*. — М., — 1968 — С. 664.
- [2] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*. — Киев:Институт математики НАН Украины, — 2007 — С. 390.
- [3] Мёрфи Дж. *C*-алгебры и теория операторов*. — М.: Изд-во «Факториал», — 1997 — С. 336.
- [4] Takesaki M. *Theory of operator algebras II*. — Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.
- [5] Лодкин А.А., Рубштейн Б.А. *Структура и классификация факторов*. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. Нов. достиж., — 1985, — Т.26, — С. 127-170.

Об устойчивости решений рекуррентных уравнений

Сошенко Екатерина Викторовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 602)

e-mail: soshenkova@mail.ua

Разностные уравнения вида

$$x(k+1) = F(k, x(k)), \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $F(k, \cdot): x \mapsto F(k, x)$ — известная вектор-функция, при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ определенная и непрерывная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, широко используются для описания эволюции во времени разнообразных процессов, состояние которых наблюдается в дискретные моменты времени, в теории управления, в математической биологии, при организации вычислительных экспериментов и т.п. Уравнения вида (1) нередко называют рекуррентными.

Пара $(k_0, x^0) \in \mathbb{N}_0 \times D$ однозначно определяет конечную или бесконечную последовательность

$$x(k_0+1) = F(k_0, x^0), \quad x(k_0+2) = F(k_0+1, x(k_0+1)), \dots$$

— решение $x(k_0, x^0)$ разностного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(k_0) = x^0$. Таким образом, уравнение (1) определяет некоторое семейство вещественных функций целочисленного аргумента $x(k_0, x^0): k \mapsto x(k; k_0, x^0)$.

Пусть $F(k, 0) = 0$ для всякого $k \in \mathbb{N}_0$, тогда уравнение (1) имеет нулевое решение. Обозначим через $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в нуле ($\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{R}^n). Нулевое решение уравнения (1) называется

- *устойчивым*, если для всякого $k_0 \geq 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $x^0 \in B_\delta$ $x(k; k_0, x^0) \in B_\varepsilon$ для всех $k \geq k_0$;
- *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и для всякого $k_0 \geq 0$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всякого $x^0 \in B_{\delta_0}$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k; k_0, x^0)\| = 0$;
- *экспоненциально устойчивым*, если оно асимптотически устойчиво и так, что $\|x(k; k_0, x^0)\| \leq C \exp(-\gamma(k - k_0))$ для некоторых положительных постоянных C и γ ;
- *неустойчивым*, если оно не является устойчивым.

Проблема устойчивости решений разностных уравнений является первоочередной и в этом вопросе можно увидеть много общего с обыкновенными дифференциальными уравнениями, начиная с определения устойчивости. Как и в теории дифференциальных уравнений, основным методом исследования устойчивости разностных уравнений вида (1) является второй метод Ляпунова. Основные теоремы второго метода имеют очевидные аналоги для разностных уравнений, а именно, достаточно заменить производную $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t, x)$ функции $v(t, x)$ в силу системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x)$ на приращение $\Delta v(k, x) = v(k, F(k, x)) - v(k, x)$ функции $v(k, x)$ вдоль решения разностного уравнения.

Пусть уравнение (1) — линейное с постоянными коэффициентами, т. е. имеет вид

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (2)$$

где A — постоянная матрица. Легко видеть, что общее решение уравнения (2) имеет вид: $x(k, c) = A^k c$, где c — произвольный вектор из \mathbb{R}^n . Как известно, все решения системы (2) имеют одинаковый тип устойчивости, поэтому принято говорить об устойчивости линейной системы (2).

Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус матрицы A . Опираясь на известную теорему о том, что в \mathbb{R}^n существует базис из собственных и присоединенных векторов матрицы A , нетрудно доказать, что

- если $\rho(A) < 1$, то система (2) экспоненциально устойчива;
- если $\rho(A) > 1$, то система (2) неустойчива;
- если $\rho(A) = 1$ и все собственные значения, равные 1 по модулю, имеют одинаковые алгебраическую и геометрическую кратности, то система (2) устойчива.

Формулировки и доказательства упомянутых результатов можно найти в [1]. Имеется также много учебников и монографий, посвященных разностным уравнениям на английском языке, в частности, [2]– [3].

Рассмотрим квазилинейную систему

$$x(k+1) = Ax(k) + g(k, x(k)), \quad (3)$$

где $g(k, x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} g(k, x)/\|x\| = 0$ равномерно по $k \in \mathbb{N}_0$. Теорема об устойчивости по первому приближению [1] утверждает, что нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, если $\rho(A) < 1$ и неустойчиво, если $\rho(A) > 1$.

Если $\rho(A) = 1$, то говорят, что имеет место *критический случай устойчивости*. В критическом случае анализ линейного приближения не позволяет

сделать какое-либо заключение об устойчивости нулевого решения. Характер устойчивости в этом случае можно сделать, используя инструменты второго метода Ляпунова.

Рассмотрим два иллюстративных примера исследования устойчивости в критическом случае.

Пример 1. Пусть уравнение (3) скалярное:

$$x(k+1) = x(k) + bx^m(k) + g(k, x(k)), \quad (4)$$

где $g(k, x) = o(|x|^m)$ при $|x| \rightarrow 0$. Покажем, что при четном m нулевое решение этого уравнения неустойчиво при любом $b \neq 0$, а при нечетном $m \geq 3$ — асимптотически устойчиво при $b < 0$ и неустойчиво при $b > 0$.

Пусть $m = 2q$, $q = 1, 2, \dots$. Тогда знакопеременная функция $v(x) = x$ имеет знакоопределенное приращение

$$\Delta v(k, x) = x + bx^m + g(k, x) - x = bx^m + g(k, x).$$

По теореме Ляпунова о неустойчивости нулевое решение уравнения (4) неустойчиво.

Теперь пусть $m = 2q + 1$, $q = 1, 2, \dots$. Положим $v(x) = x^2$, тогда

$$\begin{aligned} \Delta v(k, x) &= (x + bx^m + g(k, x))^2 - x^2 = 2bx^{m+1} + 2xg(k, x) + b^2x^{2m} + \\ &+ [g(k, x)]^2 = 2bx^{m+1} + o(|x|^{m+1}). \end{aligned}$$

Отсюда на основании теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости следует наше утверждение.

Пример 2. Рассмотрим теперь квадратичную автономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + f_{20}x_1^2(k) + f_{11}x_1(k)x_2(k) + f_{02}x_2^2(k), \\ x_2(k+1) &= \alpha x_2(k) + g_{20}x_1^2(k) + g_{11}x_1(k)x_2(k) + g_{02}x_2^2(k), \end{aligned} \quad (5)$$

где $|\alpha| < 1$, $f_{ij}, g_{ij} \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы снова имеем дело с критическим случаем.

Определим семейство знакопеременных функций

$$v(x) = x_1 + cx_2^2,$$

где c — константа. Приращение функции v вдоль решения системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= x_1 + f_{20}x_1^2 + f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 + (\alpha x_2 + g_{20}x_1^2 + g_{11}x_1x_2 + g_{02}x_2^2)^2 - \\ &- (x_1 + x_2^2) = f_{20}x_1^2 + f_{11}x_1x_2 + [2f_{02} + c(\alpha^2 - 1)]x_2^2 + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие обозначает сумму одночленов степени 3 и выше. Главная часть приращения есть квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f_{20} & f_{11}/2 \\ f_{11}/2 & f_{02} + c(\alpha^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

На основании критерия Сильвестра знакоопределенности симметричных матриц делаем следующий вывод. Если $f_{20} > 0$, то при достаточно большом по модулю $c < 0$ матрица положительно определена. Если $f_{20} < 0$, то при достаточно большом $c > 0$ матрица отрицательно определена. По теореме Ляпунова о неустойчивости [1] нулевое решение системы (5) неустойчиво при любом $f_{20} \neq 0$. В случае, когда $f_{20} = 0$ требуется дополнительное исследование.

Метод функций Ляпунова позволяет не только определить характер устойчивости нулевого решения системы (5), но и указать гарантированную область притяжения (или отталкивания) в окрестности нуля.

При исследовании более сложных задач целесообразно преобразовывать уравнения системы посредством последовательности нелинейных замен переменных, приводящих систему к нормальной форме Пуанкаре [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем: учебное пособие. — СПб: Нии Химии СПбГУ, 2003. — 112 с.
- [2] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications. — N.Y.: Marcel Dekker, 2000. — 971 pp.
- [3] Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. — Springer, 2005. — 539 pp.
- [4] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.

Интеграл Бохнера в нормированных конусах

Степанов Алексей Николаевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 601)

e-mail: stepanov.student@gmail.com

В последние десятилетия активно развивается теория абстрактных локально выпуклых (и, в частности, нормированных) конусов. Имеется множество

примеров, которые указывают на важность теории выпуклых конусов для самых разных разделов анализа. Так, недавно И. В. Орловым в [1] было исследовано понятие выпуклого нормированного конуса и на базе этого понятия построено субдифференциальное исчисление отображений векторного аргумента с приложениями в вариационном исчислении.

Идея нашей работы — построить основы теории интеграла отображений $f : I \rightarrow X$ вещественного отрезка $I = [a; b]$ в нормированный конус X .

Отметим также, что многие объекты в анализе нельзя адекватно описать в терминах выпуклых конусов. Например, если рассматривать набор необязательно выпуклых подмножеств линейного пространства со стандартными операциями сложения по Минковскому и умножения на скаляр, то эти действия не будут удовлетворять привычному набору свойств. В частности, не будет выполняться второй дистрибутивный закон $((\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \forall \lambda, \mu \geq 0, \forall x, y \in X)$.

Ввиду этого возникает естественная идея попробовать исследовать структуры, похожие на выпуклые конусы, но теряющие либо второй закон дистрибутивности, либо закон сокращения (или оба эти свойства). В работе Ф. С. Стоякина [2] такие структуры названы *сублинейными конусами* и рассмотрено ослабление вышеупомянутого дистрибутивного закона — *выпуклый дистрибутивный закон (CDL)*: $[x] = [y] \Leftrightarrow x = y$ (здесь $[x]$ — выпуклая оболочка элемента $x \in X$), а также аналогичный *аффинный дистрибутивный закон (ADL)* $(x) = (y) \Leftrightarrow x = y$, связанный с понятием аффинной оболочки элемента $x \in X$:

$$(x) = \left\{ y \in X \mid y + \sum_{k=1}^m \alpha_k x = \sum_{k=1}^n \beta_k x, \alpha_k > 0, \beta_k > 0, \sum_{k=1}^n \beta_k - \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1 \right\}.$$

Эти два закона приводят к новым алгебраическим структурам — *выпуклому сублинейному конусу* и *аффинному сублинейному конусу*. Если помимо этого ещё ввести норму в таких конусах с естественным условием её инвариантности на аффинной (выпуклой) оболочке всякого элемента $x \in X$, то можно говорить о *выпуклом сублинейном нормированном конусе (ВСНК)* или *аффинном сублинейном нормированном конусе (АСНК)*.

Наша цель — рассмотреть подходы к понятию интеграла отображений $f : I = [a; b] \rightarrow X$, где X — АСНК (или ВСНК). Сходимость последовательности $x_n \rightarrow x$ в X будем понимать как существование последовательностей $\{h_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{h_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ из X , таких что $x_n + h_n^{(1)} = x + h_n^{(2)}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n^{(1)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n^{(2)}\| = 0$.

Для отображений в бесконечномерные нормированные пространства выделяют несколько аналогов интеграла Лебега. Наиболее эффективен и близок к классическому интегралу Лебега интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет большинство свойств интеграла Лебега. Поэтому мы отталкиваемся именно от понятия интеграла Бохнера и введём аналог этого понятия для отображений $f : I \rightarrow X$. Начнём с определения интеграла Бохнера простых отображений. Через mes будем обозначать классическую меру Лебега на числовой прямой, I_k, A — измеримые по Лебегу подмножества I , $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A .

Definition 1. Простое отображение $f(t) := \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}(t)$, где $c_k \in X$,

$I = \bigcup_{k=0}^N I_k$, $mes(I_0) = 0$, назовем интегрируемой по Бохнеру, если его норма $\|f(t)\| : I \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. В таком случае

$$(B) \int_A f(t) dt := \sum_{k=1}^N c_k mes(A \cap I_k).$$

Definition 2. Отображение $f : I \rightarrow X$ будем называть интегрируемым по Бохнеру, если существует такая последовательность простых отображений $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$, что для почти всех $t \in I$ $f_n(t) + h_n^{(1)}(t) = f(t) + h_n^{(2)}(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|h_n^{(1)}(t)\| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|h_n^{(2)}(t)\| dt = 0,$$

а также существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_I f_n(t) dt$. В таком случае по определению для всякого измеримого по Лебегу множества $A \subset I$

$$(B) \int_A f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_A f_n(t) dt.$$

Theorem 1. Отображение $f : I \rightarrow X$ интегрируемо по Бохнеру тогда и только тогда, когда f почти всюду есть предел последовательности простых отображений, и функция $\|f(t)\|$ суммируема по Лебегу.

Если в полном сублинейном нормированном конусе (СНК) ввести сублинейный конус $B(I, mes)$ интегрируемых по Бохнеру отображений $f : I \rightarrow X$ относительно mes и отождествить равные почти всюду функции f и g из $B(I, mes)$, то $B(I, mes)$ становится полным СНК с нормой

$$\|f(\cdot)\| := \int_I \|f(t)\| dt.$$

Доказано, что неопределённый интеграл Бохнера отображений в АСНК (ВСНК) является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы. Однако в отличие от вещественного случая уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера. Проблема представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера в нормированных пространствах была исследована Ф. С. Стонякиным в [3]. Было предложено специальное понятие компактной абсолютной непрерывности, которое позволило в некотором смысле снять проблему в классе банаховых пространств. Мы переносим некоторые из этих результатов на отображения в АСНК (ВСНК), отталкиваясь от следующей теоремы [2].

Theorem 2. *Всякий АСНК (ВСНК) X с законом сокращения линейно непрерывно инъективно изометрично вложен в некоторое линейное нормированное пространство E_X .*

Некоторой проблемой является отсутствие, вообще говоря, непрерывности обратного вложения. Эта проблема, в частности, создает некоторое препятствие для непосредственного переноса результатов [3], связанных с пространствами, порожденными выпуклыми компактами в рассматриваемый нами класс нормированных конусов.

Однако в АСНК (ВСНК) можно стандартным образом ввести понятие линейного ограниченного функционала (с условием $|\ell(x)| \leq C\|x\|$ для некоторой постоянной $C > 0$), и понятие сопряжённого пространства X_{lin}^* к X . Идея нашего подхода — замена абсолютно выпуклого компакта из [3] на специальную систему линейных функционалов. По теореме 2 X линейно инъективно изометрично вложен в нормированное пространство E_X и поэтому в X можно ввести метрику $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : \rho(0, x) = \|x\|$. Для соответствующего линейного изометричного вложения $\varphi : X \rightarrow E$ $\rho(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E$. При таком выборе метрики ρ X можно считать метрическим пространством. Заметим также, что $\|\varphi(x)\|_E = \|x\|_X$, то есть $E^* \subset X_{lin}^*$. Это позволяет доказать такой результат.

Theorem 3. *Пусть для отображения $F : I \rightarrow X$, X — полное метрическое пространство, существует такая нормирующая последовательность функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^\infty \subset X_{lin}^*$, что для некоторой сходящейся к нулю числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_n > 0)_{n=1}^\infty$ и $\forall C > 0 \exists \delta > 0$:*

$$\left(\forall \bigcup_{k=1}^p [\alpha_k; \beta_k] \subset I : \sum_{k=1}^p (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^p \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\ell_n(F(\beta_k)) - \ell_n(F(\alpha_k))|}{\varepsilon_n} < C.$$

Тогда для почти всех $t \in I$ существует производная $F'(t) \in X$ и верно

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И. В., *Введение в сублинейный анализ. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, **53** (2014), 64 – 132.
- [2] Стонякин Ф. С., *Сублинейные нормированные конусы: теоремы отделмости и смежные результаты. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, В печати.
- [3] Стонякин Ф. С., *Компактные характеристики отображений в локально выпуклых пространствах и их приложения в векторном интегрировании. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Симферополь: 2011.*

Дистанционное обучение по теме "Геометрия"

Толочко Александр Константинович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: disix7@mail.ru

В связи с интенсивным развитием информационных технологий, и особенно интернет-технологий, вопрос о развития дистанционного обучения приобретает особую значимость.

Дистанционное обучение – это способ обучения на расстоянии, при котором преподаватель и обучаемые физически находятся в различных местах. Исторически, дистанционное обучение означало заочное обучение. Однако сейчас – это средство обучения, использующее аудио, видеотехнику, интернет и спутниковые каналы связи.

В Европе в конце XVIII века, с появлением регулярной и доступной почтовой связи, возникло "корреспондентское обучение". Учащиеся по почте получали учебные материалы, переписывались с педагогами и сдавали экзамены доверенному лицу или в виде научной работы. В России данный метод появился в конце XIX века.

Сравнительно давно в аудиториях распространено компьютеризированное обучение под руководством преподавателя (Computer-Baser Training, СВТ),

при котором используются компакт-диски на студенческой настольной системе. В XXI веке доступность компьютеров и интернета делают распространение дистанционного обучения ещё проще и быстрее. Интернет стал огромным прорывом, значительно большим, чем радио и телевидение.

Несомненным плюсом стало обновление учебных материалов в реальном времени. При интерактивном обучении загрузка материалов учебного курса может осуществляться из виртуальной аудитории с помощью браузера. Появилась возможность общаться и получать обратную связь от любого ученика, где бы он ни находился. Распространение "быстрого интернета" дало возможность использовать "он-лайн" семинары (вебинары) для обучения.

Характерной чертой дистанционного обучения является то, что ученик самостоятельно организует свой темп обучения и последовательность изучаемых предметов. Хотя дистанционному обучению присуща жесткая отчетность, которая обеспечивает полное прохождение курса учеником. Отсутствие прямого контроля ученика по прохождению материала создает иллюзию, что можно не изучая материал, получить диплом. Но обязательная отчетность студента по пройденному разделу курса перед своим преподавателем, предоставляя выполненные тесты и контрольные работы, не даст расслабиться и получить диплом, не приложив особых усилий. Только отчитавшись по пройденному материалу, ученик переходит к изучению следующего курса. Диплом об окончании дистанционного обучения не отличается от обычного (также пишется, что данный ученик прослушал полный курс, и не указывается на какой форме обучения).

Какие возможности дает дистанционное образование:

- снизить затраты на проведение обучения (не требуется затрат на аренду помещений, поездок к месту учёбы, как учащихся, так и преподавателей и т. п.);
- проводить обучение большого количества человек;
- повысить качество обучения за счет применения современных средств, объёмных электронных библиотек и т. д.
- создать единую образовательную среду (особенно актуально для корпоративного обучения).

Удобства дистанционной формы обучения:

- обучение в психологически комфортной, привычной обстановке за компьютером.
- индивидуальные сроки и темп обучения.

- высокая доля самостоятельности наряду с возможностью в любое время получить помощь от преподавателя.
- преодоление территориальных и временных ограничений.

В наше время, основное место в контроле знаний занимает тестирование. Тестирование во всем. Тестирование - это упрощение, сведение всех знаний к одному ответу, без возможности полного и развернутого ответа, без возможности дискуссии и обсуждения, но при этом тесты требуют определенных знаний и умений.

По большей части, теоретический материал и тестирование в моей дипломной работе направлены на изучения основ по геометрии по разным темам, а также на подготовку к ЕГЭ, так как этот вид оценивания знаний является ведущим в нынешнее время и на него делают большой упор. Думая, что подготовиться к ЕГЭ можно решая задачи прошлого года - ошибка. Задачи каждый год меняются и от знания решений задач прошлого года, не зависит умение решать другие задач.

Дистанционное обучение, подготовка к ЕГЭ должны носить развивающий, системный характер, а также создавать базу для решения задач и знаний в общем, а не в частых случаях.

Основная проблема при решении задачи и тестов по геометрии заключается не столько в недостатках знаний формул, теорем и умением их применять, а в сложности пространственного представления и воображения.

Тема "Дистанционного обучения" очень важна в наше время. Этот вид образования становится чрезвычайно популярной формой обучения в силу своего удобства и гибкости. Оно устраняет основной барьер, удерживающий многих людей от получения первого или продолжения образования, избавляя от необходимости посещать занятия по расписанию.

Моя дипломная работа состоит из двух частей:

1. Теоретическая часть с необходимым материалом для понимания темы и задача с разобранным решением.
2. Тестирование, с возможностью проверки знаний на основе теоретического материала. В конце каждого тестирования есть ответы. Где требуется просто ответ, но по большей части - развернутый ответ с объяснением. Ответы помогут вам лучше понять свои ошибки и разобрать непонятный для вас пример.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зарецкая Светлана, Животовская Ирина. *Дистанционное обучение в современном мире*. - М.: Изд-во ИНИОН РАН, - 2002 - С. 136.

- [2] Романов Анатолий, Торощов Владимир. *Технология дистанционного обучения*. – М.: Изд-во Юнити-Дана, – 2000 – С. 304.
- [3] Агапов Сергей, Джалиашвили Зураб. *Средства дистанционного обучения. Методика, технология, инструментарий*. – Петербург: Изд-во БХВ, – 2003 – С. 336.
- [4] Трайнев Владимир. *Дистанционное обучение и его развитие*. – М.: Изд-во Дашков и Ко, – 2006 – С. 296.
- [5] Крамор В. С. *Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. 4-е изд.* – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», – 2008 – С. 336.
- [6] Куланин Е.Д., Федин С.Н. *Геометрия треугольника в задачах: Учебное пособие. Изд. 2-е.* – М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», – 2009 – С. 208 с.
- [7] Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. *Учимся решать задачи по геометрии*. – К.: «Магистр-S», – 1996 – С. 256.

О некоторых задачах с параметрами в курсе алгебры основной школы

Трушина Александра Павловна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: aleksa-evpacity@rambler.ru

Как известно, решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики. При их решении учащиеся должны хорошо владеть теоретическим материалом и стандартными методами решения уравнений и неравенств. Но, помимо этого, от учеников требуется умение проводить разнообразные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решения и не приобрести лишних. Задача с параметром представляет собой целую серию однотипных задач, соответствующих всевозможным числовым значениям параметра. Добавление параметра значительно усложняет задачу, так как увеличивается ее размерность, появляется "глубина". Решение такой задачи требует системного подхода, целостного представления ситуации. Для решения уравнений (неравенств) с параметрами необходимо умение проводить разветвлённые логические построения. При этом необходимо четко и последовательно следить за сохранением равносильности решаемых уравнений (неравенств), учитывая области определения входящих в них выражений. Таким образом, решая различные задачи с параметрами, школьники развивают логическое мышление, математическую культуру и систематизируют знания, полученные ранее. Задачи с

параметрами представляют собой богатейший материал для полноценной математической деятельности учащихся. С их помощью можно проверить глубину знаний математики учащихся в основной школе, выявить склонности к исследовательской деятельности, нестандартность мышления.

Использование стандартных методов при решении задач с параметрами иногда приводит к необходимости выполнения очень громоздких вычислений, что существенно затрудняет решение. Такая ситуация, как правило, способствует началу творческих поисков других путей решения, их исследование, направленное на нахождение наиболее рационального, наиболее "красивого" способа решения. Под исследованием в науке понимается изучение какого-либо объекта с целью выявления закономерностей его возникновения, развития, преобразования. В процессе исследования синтезируются имеющиеся знания, накопленный опыт, а также методы и способы изучения объектов.

Данную тему особенно полезно изучить ученикам, которые собираются поступать в высшее учебное заведение и будут сдавать ЕГЭ по математике, особенно если этот экзамен для поступления должен быть профильным. В составе ЕГЭ задание №18 является уравнением, неравенством или системой с параметром. Это задание одно из самых сложных, и оценивается максимально в 4 первичных балла. Данное задание вызывает трудности у учащихся, не знающих особенностей решения задач с параметрами.

Рассмотрим решение иррационального уравнения с параметром.

Пример. Решите уравнение

$$\sqrt{7x+5} - \sqrt{x-7} = a$$

относительно переменной x при всех значениях параметра a .

Решение. Найдём область допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения, для этого нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x+5 \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{7} \\ x \geq 7 \end{cases}$$

Тогда ОДЗ исходного уравнения будет $x \geq 7$. Оценим при этом значения квадратных корней из исходного уравнения, получим: $\sqrt{7x+5} \geq \sqrt{54}$, $\sqrt{x-7} \geq 0$, тогда $\sqrt{7x+5} + \sqrt{x-7} > 0$. Если теперь домножить последнее выражение на сопряжённое, получим выражение $(\sqrt{7x+5} + \sqrt{x-7})(\sqrt{7x+5} - \sqrt{x-7}) = 7x+5 - x+7 = 6x+12 > 0$, при $x \geq 7$, из чего следует, что выражение $\sqrt{7x+5} - \sqrt{x-7} > 0$. Тогда и левая

часть исходного уравнения также должна быть больше нуля, то есть $a > 0$. Введём замену $t = \sqrt{x-7} \geq 0$. Тогда $x = t^2 + 7$, и уравнение приводится к виду:

$$\sqrt{7(t^2 + 7) + 5} = a + t.$$

Возведём полученное уравнение в квадрат и упростим его, при этом получим:

$$6t^2 - 2at + 54 - a^2 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) будет иметь решение только в том случае, если $D \geq 0$. В данном случае, так как коэффициент при первой степени переменной t чётный, то вместо дискриминанта можно находить $\frac{D}{4}$, это облегчит вычисление.

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6(54 - a^2) = 7a^2 - 324 \geq 0,$$

тогда $a^2 \geq \left| \sqrt{\frac{324}{7}} \right|$, $a \geq \left| \frac{18}{\sqrt{7}} \right|$, но так как $a > 0$ получим, что исходное уравнение будет иметь решение при $a \geq \frac{18}{\sqrt{7}}$, при этом $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{7a^2 - 324}}{6}$, а сами корни исходного уравнения будут находиться по формуле: $x_{1,2} = \frac{2}{9}(a^2 - 9) \pm \frac{a}{18}\sqrt{7a^2 - 324}$.

При $a = \frac{18}{\sqrt{7}}$ уравнение (1) имеет корень $t = \frac{3}{\sqrt{7}}$, а $x = \frac{58}{7}$.

При $\frac{18}{\sqrt{7}} < a \leq 3\sqrt{6}$ уравнение (1) имеет корни $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{7a^2 - 324}}{6}$, а исходное уравнение $x_{1,2} = \frac{2}{9}(a^2 - 9) \pm \frac{a}{18}\sqrt{7a^2 - 324}$.

Если же $a > 3\sqrt{6}$, то нам подходит только неотрицательный корень, то есть тогда:

$$x = \frac{2}{9}(a^2 - 9) + \frac{a}{18}\sqrt{7a^2 - 324}.$$

Ответ. При $a < \frac{18}{\sqrt{7}}$ исходное уравнение не имеет решений; при $a = \frac{18}{\sqrt{7}}$, $x = \frac{58}{7}$; при $\frac{18}{\sqrt{7}} < a \leq 3\sqrt{6}$, $x_{1,2} = \frac{2}{9}(a^2 - 9) \pm \frac{a}{18}\sqrt{7a^2 - 324}$; при $a > 3\sqrt{6}$, $x = \frac{2}{9}(a^2 - 9) + \frac{a}{18}\sqrt{7a^2 - 324}$.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что решение задач с параметрами развивает системное, логическое мышление. Являясь прекрасным материалом для исследовательской работы, решение уравнений (неравенств) с параметром развивает такие умения как наблюдение, сравнение, обобщение и другие, учит творчески мыслить, способствует развитию гибкости мыслительного процесса и, что очень важно, развивает теоретическое мышление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.Егоров, Ж.Работ *Иррациональные уравнения*. – Ж-л "КВАНТ" № 6, – 2001.
[2] Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. *Школа решения задач с параметрами*. – М.: 2009–212с.

Интеллект-карты – как способ эффективной обработки математической информации

Харак Валентина Анатольевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: kh.valent@gmail.com

В статье рассматривается метод интеллект-карт и его применение на занятиях по математическим дисциплинам. Особое внимание уделено применению интеллект-карт при самостоятельной работе студентов.

В учебном плане по большинству математических дисциплин на лекционные и практические занятия выделяется меньше времени, чем на самостоятельную работу студента. Так, например, по математическому анализу общее количество выделенных часов на лекционные и практические занятия составляет 280, в то время как на самостоятельную работу выделяется 296 часов. Поэтому очень важно научить студента правильно организовать самостоятельную работу. Нужно вводить в практику новые методы обучения, которые студент мог бы использовать при самостоятельной работе. Это должны быть такие методы, которые позволяют развивать умение учиться, формировать у студента способности к саморазвитию, творческому применению полученных знаний, повысят конкурентоспособность.

Одним из таких методов может служить метод интеллект-карт (от англ. Mind maps) [1], о котором далее и пойдет речь. В 1974 году миллионы людей во всем мире познакомились с интеллект-картами – изобретением английского писателя и лектор по вопросам эффективного мышления Тони Бьюзена. Интеллект-карты – это технология представления необходимой информации в максимально наглядном, понятном и структурированном виде.

В основе технологии использования интеллект-карт лежит очень важный принцип – использование возможностей левого и правого полушарий одновременно, что позволяет видеть целостную картину, способствует ассоциативному мышлению.

Метод интеллект-карт может найти применение в любой сфере нашей жизни, где требуется совершенствовать свои интеллектуальные способности: в обучении, в профессиональной деятельности, а также в семейной и личной жизни. Их можно использовать при подготовке и проведении презентаций, публичных выступлений, планировании, на экзаменах и т.д.

А теперь коротко познакомимся с основными правилами составления интеллект-карт. Центральный объект – главная тема (идея), на которой будет сфокусировано все наше внимание, помещаем в середине листа. Чем больше формат листа, тем лучше. Основные понятия, связанные с главной темой, изображаем расходящимися от центрального объекта в виде ветвей. На ветвях записываем ключевые слова или образы, ассоциирующиеся с ключевыми понятиями, раскрывающими главную тему. Вторичные идеи также изображаем в виде ветвей, отходящих от ветвей более высокого порядка и т.д. Делаем карту более эффективной и привлекательной с помощью использования множества цветов. Добавляем рисунки, символы, и другую графику, ассоциирующиеся с ключевыми словам. Нужно отметить, что выполнять карту можно не только от руки, но и на компьютере. Существует огромное количество специального ПО по составлению таких карт, однако бесплатное ПО [6], [7] не позволяет создавать качественные карты, а платное [4], [5], предоставляющее большой арсенал инструментов для создания максимально наглядных и понятных карт, – стоит достаточно дорого.

Автор метода Тони Бьюзен в своих книгах [2], [3] подчеркивает, что строгих правил создания интеллект-карт нет, как нет и неправильных карт: вырабатывая свой стиль, менять можно все, лишь бы мышление становилось продуктивнее – для этого интеллект-карты и были придуманы.

А теперь подробнее остановимся на использовании данного метода в обучении математике. Метод интеллект-карт хорошо подходит для обучения математическим дисциплинам, благодаря своей гибкой структуре и правилам. Этот метод подходит как для студентов, так и для преподавателей. Студенты могут в полной мере использовать его при организации самостоятельной работы по математическим дисциплинам: при изучении и закреплении нового материала, при подготовке к экзаменам, при написании рефератов, курсовых и дипломных работ, при подготовке докладов. В этих случаях полезным для студентов будет самостоятельное составление интеллект-карт, тем самым обеспечивая себе всесторонний охват материала и легкость усвоения предлагаемой информации. Такой подход поможет студенту выявить слабые места

в знании предмета, научить самостоятельной работе с учебным и справочным материалом, развивать личностные качества, интеллект, пространственное мышление, уверенность в своих силах и способностях, познавательную активность. Что касается преподавателей, то они могут использовать метод интеллект-карт на занятиях по математическим дисциплинам при подготовке и проведении лекционных и практических занятий. Готовясь к предстоящему занятию, преподаватель может в виде интеллект-карты сделать наброски материала, чтобы ничего не упустить. А проводя занятие, преподаватель может в ходе объяснения материала, составлять на доске карту, постоянно дополняя ее новыми понятиями, так студенты получают целостное представление о предмете. Интеллект-карты могут служить в качестве презентационных материалов на занятиях, а также оказывают помощь преподавателю при планировании учебного процесса, помогают при проверке знаний и умений.

Интеллект-карты – это метод, позволяющий не только учить математике, но и учиться математике. Он позволяет обрабатывать, структурировать и систематизировать математическую информацию. Данный метод делает обучение математическим дисциплинам более интересным и творческим для студентов, повышает качество знаний, конкурентоспособность, помогает организовать групповую работу. По моему мнению, метод интеллект-карт имеет большие перспективы в будущем, т.к. обладает рядом преимуществ перед стандартным способом записи информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buzan T. *Use Your Head*. – London: Guild publishing, Book Club Associates, 1974 – P. 156
- [2] Бьюзен Т. *Научите себя думать!*/пер. с англ. – 2-е изд. – Мн.: Попурри, 2004 – С. 200.
- [3] Бьюзен Т. *Супермышление*/пер. с англ. – 2-е изд. – Мн.: Попурри, 2003 – С. 322.
- [4] <http://www.mindjet.com/> – программа MindjetMindManager
- [5] <http://www.visual-mind.com> – программа VisualMind
- [6] <http://cayra.net/> – программа Cayra
- [7] <http://freemind.sourceforge.net/> – программа FreeMind.

Эволюционные и спектральные задачи, порожденные несимметрическими полуторалинейными формами

Якубова Алие Рустемовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 603)

e-mail: tehnotat@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм.

Пусть Ω - произвольная ограниченная область в \mathbb{R}^m с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Введем сепарабельные гильбертовы пространства F , E и G со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_F$, $(\cdot, \cdot)_E$ и $(\cdot, \cdot)_G$ соответственно, для которых выполнены следующие условия:

$$(1) \quad F \hookrightarrow E, \quad \|u\|_E \leq a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \quad (1.1)$$

(2) На F задан оператор γ , который называется абстрактным оператором следа и ограничено действует из F в G , причем

$$\begin{aligned} \gamma : F \rightarrow G_+ \hookrightarrow G, \quad \mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G, \\ \|\gamma u\|_G \leq b\|u\|_F, \quad b > 0, \quad \forall u \in F. \end{aligned} \quad (1.2)$$

(3) Ядро $\ker \gamma =: N$ оператора γ плотно в E

$$\overline{N} = E. \quad (1.3)$$

Теорема 1. *(первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм (см. [1]). Пусть выполнены условия (1.1) – (1.3) для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия ограниченности и равномерной аккретивности для формы $\Phi(\eta, u)$. Тогда имеет место следующая формула Грина:*

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \\ Lu \in F^*, \quad \gamma \eta \in G_+, \quad \partial u \in (G_+)^*. \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННЫЕ НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

2.1. Первая краевая задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (2.1)$$

$$L_\varepsilon v := v - \Delta v + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \partial_\varepsilon v := \partial_0 v - \varepsilon \sigma \gamma v, \quad (2.2)$$

$$\sigma := \sum_{k=1}^m c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad \partial_\varepsilon v \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

где $L_\varepsilon v \in (H^1(\Omega))^*$, а $\partial_0 u := (\partial v / \partial n)_\Gamma$.

Теорема 2. *Задача (2.1), (2.2) имеет слабое решение $v = v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f \in (H^1(\Omega))^*. \quad (2.3)$$

Это решение выражается формулой

$$v_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f, \quad A_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H^1(\Omega))^*), \quad (2.4)$$

где A_ε – оператор полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$.

2.2. Вторая краевая задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (2.5)$$

Теорема 3. *Задача (2.5) имеет слабое решение $w \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (2.6)$$

Это решение дается формулой

$$w = w_\varepsilon = V_\varepsilon \psi, \quad V_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma); H_{h,\varepsilon}^1(\Omega)). \quad (2.7)$$

2.3. Полная краевая задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (2.8)$$

Опираясь на решения задачи (2.1), (2.2), а также задачи (2.5), приходим к следующему выводу.

Теорема 4. *Задача (2.8) имеет слабое решение $u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.3) и (2.6):*

$$f \in (H^1(\Omega))^*, \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (2.9)$$

При этом оно представляется в виде

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}f + V_\varepsilon\psi, \quad (2.10)$$

где A_ε^{-1} и V_ε – операторы, описанные в теоремах 2 и 3 соответственно.

2.4. Однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона.

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u := u|_\Gamma = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \quad (2.11)$$

Теорема 5. *Задача (2.11) имеет слабое решение $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:*

$$f \in (H_0^1(\Omega))^*. \quad (2.12)$$

В этом случае

$$u_\varepsilon = A_{0,\varepsilon}^{-1}f, \quad A_{0,\varepsilon}^{-1} \in \mathcal{L}((H_0^1(\Omega))^*; H_0^1(\Omega)). \quad (2.13)$$

3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

3.1. Спектральная задача Дирихле.

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (3.1)$$

Задачу (3.1) можно переписать в операторной форме

$$(A_0 - i\varepsilon B_0)u = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(\Omega), \quad (3.2)$$

где $A_0 u := u - \Delta u$, $u \in \mathcal{D}(A_0) := H^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, A_0 – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$;

$B_0 u := \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$ – неограниченный самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$.

Теорема 6. *Задача (3.2), а потому и исходная задача (3.1) имеют дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений λ_k , $k = 1, 2, \dots$, расположенных в правой полуплоскости и имеющих предельную точку $\lambda = \infty$. Все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в секторе $|\arg \lambda| < \delta$ для любого $\delta > 0$. Система корневых (собственных и присоединенных) элементов задачи (3.2)*

полна в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega)$ оператора A_0 . Собственные значения λ_k задачи (3.2) имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k = \lambda_k(A_0)[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

Теорема 7. Спектр задачи (3.1) расположен в параболической области

$$\Lambda_\varepsilon := \left\{ \lambda \geq \lambda_1(A_0) : |\operatorname{Im}\lambda|^2 \leq \varepsilon^2 \|B_0 A_0^{-1/2}\|^2 \cdot \operatorname{Re}\lambda \right\}, \quad (3.4)$$

а корневые элементы этой задачи образуют базис Абеля - Лидского порядка $\alpha > m/2$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

3.2. Спектральная задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon v = \lambda v \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.5)$$

Теорема 8. Задача (3.5) имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = \infty$. Все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе $|\arg\lambda| < \delta$ при любом $\delta > 0$. Система корневых элементов задачи (3.5) полна в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_A = H^1(\Omega)$ оператора A . Собственные значения λ_k имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k = \lambda_k(A)[1 + o(1)] = d_m k^{-2/m}[1 + o(1)], \quad (k \rightarrow \infty).$$

Корневые элементы исходной задачи образуют в пространстве $H^1(\Omega)$ также базис Абеля - Лидского порядка $\alpha > m/2$.

Теорема 9. Спектр задачи (3.5) расположен в правой полуплоскости, в параболической области

$$\Lambda_\varepsilon := \left\{ \operatorname{Re}\lambda \geq c_\varepsilon \lambda_1(A) : |\operatorname{Im}\lambda| \leq \left(\varepsilon \|BA^{-1/2}\| \cdot c_\varepsilon^{-1/2} \right) (\operatorname{Re}\lambda)^{1/2} \right\}. \quad (3.6)$$

3.3. Спектральная задача Стеклова.

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \lambda \gamma w \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.7)$$

Эта задача сводится к задаче на собственные значения

$$(I + \varepsilon S)\eta_\varepsilon = \lambda C\eta_\varepsilon, \quad (3.8)$$

а также к спектральной проблеме

$$(I + T(\varepsilon))^{-1} C_h \eta_h = \mu \eta_h, \quad \eta_h \in L_{2,h}(\Omega), \quad (3.9)$$

$$L_{2,h}(\Omega) := \{\eta \in L_2(\Omega) : \eta = A^{1/2} w, w \in H_h^1(\Omega)\}.$$

Теорема 10. *Спектральная задача Стеклова (3.7) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенный в правой полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений λ_k с предельной точкой $\lambda = \infty$. При любом $\delta > 0$ все собственные значения λ_k , кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе $|\arg \lambda| < \delta$. Система корневых элементов $\{\eta_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.8), после проектирование на подпространство $L_{2,h}(\Omega)$, т.е. система $\{\eta_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$ корневых элементов задачи (3.9), является полной в $L_{2,h}(\Omega)$. Поэтому система корневых элементов $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $w_{\varepsilon,h,k} = A^{-1/2}\eta_{\varepsilon,h,k}$, полна в $H_h^1(\Omega)$. Собственные значения λ_k задачи (3.7) имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(C_h)[1 + o(1)] = d_m^{-1}k^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad (k \rightarrow \infty), \quad \Omega \in \mathbb{R}^m. \quad (3.10)$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, образует базис Абеля - Лидского порядка $\alpha > m - 1$ в пространстве $H_h^1(\Omega)$.

Рассмотрены также спектральные задачи Стефана, С.Г. Крейна, Аграновича, Чуешова и начально-краевые задачи, порождающие эти спектральные.

Автор благодарит Копачевского Н. Д. за постановку задач и руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи* // Украинский матем. вестник. – 2004. – Т.1. – № 1. – С. 69 – 97.
- [2] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях* // Международный научный журнал «Спектральные и эволюционные задачи». – 2011. – Т.21 – № 1. – С. 2 – 39.
- [3] Копачевский Н.Д. *Спектральная теория операторных пучков* // Специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА 2009. – 128 С.
- [4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и ее приложения* // Специальный курс лекций. – Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.», – 2011, – 136 с.

Секция
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**Визуализация трехмерных динамических
объектов на примере кубика Рубика**

Никифоров Сергей Владимирович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 601-П)
e-mail: nikin1994@gmail.com

В работе рассматривается алгоритм построения трехмерных динамических объектов на примере кубика Рубика и особенности использующейся для этого javascript-библиотеки Three.js

Three.js — легковесная библиотека JavaScript, используемая для создания и отображения анимированной компьютерной 3D графики при разработке веб-приложений. Поддерживается подавляющим большинством современных браузеров. Three.js скрипты могут использоваться совместно с элементом HTML5 CANVAS, SVG или WebGL. Преимущества её в том, что библиотека Three.js работает во всех браузерах, которые поддерживают технологию WebGL. Также может работать с базовым интерфейсом элемента CANVAS, благодаря чему работает и на многих мобильных устройствах. К тому же она выполняет низкоуровневую работу с WebGL, что значительно упрощает и ускоряет работу программиста. В Three.js присутствует базовый порядок действий, необходимых для корректного отображения объектов: 1 – Построение сцены, 2 – Размещение камеры, 3 – Добавление объектов и событий, 4 – Рендеринг(процесс получения изображения по модели).

Поставлена задача построить кубик Рубика размером $N \times N$. Центр куба будет расположен в точке $(0, 0, 0)$. Куб состоит из 8 угловых, $6 \cdot (N-2) \cdot (N-2)$ центральных и $(N-2) \cdot 12$ реберных элементов. Пошаговое построение большого куба ведется путем добавления элементов через трехмерный массив. Координаты расположения для каждого последующего куба рассчитываются с помощью векторов, исходящих из центра координат и изменяющихся в соответствии с введенными данными, такими как размер одного элемента и отступ между элементами. Хранятся элементы в трехмерном массиве с соответствующими координатам расположения индексами, что упрощает нахождения нужного элемента. Элементы, которые попадают внутрь куба - отсекаются с помощью

условного оператора, анализирующего индекс элемента. Куб окрашивается в соответствии с заданной цветовой схемой.

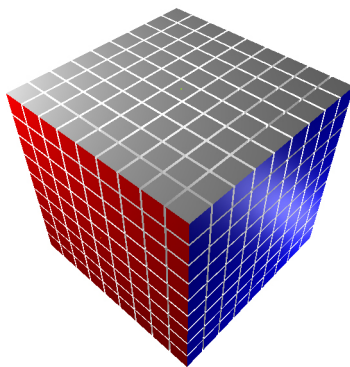


Рис. 1. Пример куба 9x9

Поворот одной из граней куба происходит путем присоединения к группе объектов соответствующего индекса в массиве через цикл, например: `[x][toObject][z]` и поворота этого объекта на 90 градусов в заданном направлении. При каждом повороте объект создается заново. Проблемой данного метода является сложность замены индекса каждого повернутого элемента в массиве. На каждой грани есть элементы, которым можно поставить в соответствие другие элементы на этой же грани. То есть, несколько соответствующих элементов при разных положениях грани могут занимать одну и ту же позицию.

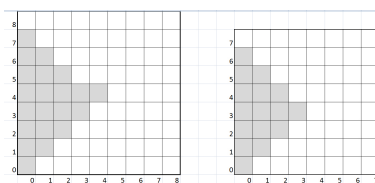


Рис. 2. Пример набора ‘уникальных’ элементов грани

На рис. 2 показан пример с четным и нечетным количеством элементов грани куба. Выделив эти элементы через условие, с помощью цикла их индексы меняются по кругу (рис. 3).

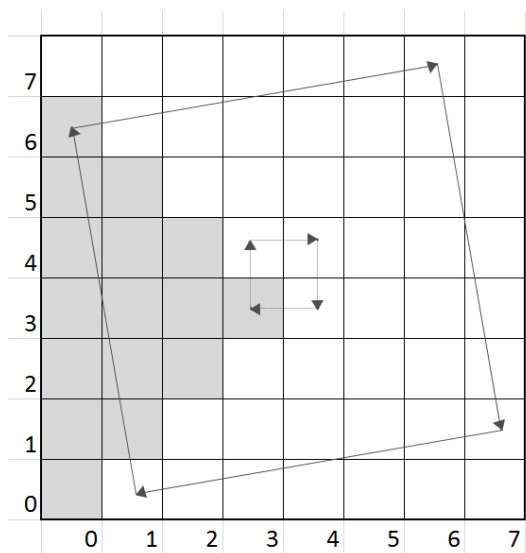


Рис. 3. Визуализация замены индексов элементов

Результатом работы является программа, способная построить куб любого размера с реализованным механизмом поворота граней. Из всего выше описанного следует, что библиотека Three.js является отличным вариантом для трехмерного веб-моделирования и может быть использована как для написания игр, так и для создания интерактивных веб-страниц. Библиотека Three.js находится на стадии разработки и постоянно дополняется и улучшается, но уже сейчас она демонстрирует широкий спектр возможностей, необходимых для написания 3D-моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свободная энциклопедия ru.wikipedia.org/wiki/Three.js Определения и основная информация о Three.js
- [2] Ricardo Cabello <http://threejs.org/> Документация о библиотеке

Выбор инструментов обработки данных в системах поддержки принятия решений

Терещенко Антонина Сергеевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 601П)
e-mail: TereshenkoAS@yandex.ru

Эффективность государственного управления уровнем устойчивого развития и уровнем безопасности определяется сравнительным анализом статистических данных, измеряемых с некоторым интервалом. Моделирование такого рода процессов определяется сложившимся иерархическим характером системы управления. Набор инструментов, обеспечивающих механизм управления, базируется на методе главных компонент и функции конкурентного сходства. Трудоемкость полномасштабных экспериментов приводит к необходимости создания интеллектуализированной информационной системы поддержки принятия решений.

Специфика механизмов управления устойчивым развитием региона и его эффективность определяют методологию исследования. Методы устойчивого развития выделяют социальные, экономические и экологические факторы, используемые в моделировании процессов управления [1]. Многоуровневый и многокритериальный характер оценки деятельности определили выбор иерархических сетевых структур [2] и многокритериальную оптимизацию на таких сетях с условиями ограничения на ресурсы и предпочтения в принятии управленческих решений ЛПР [3, 4].

Моделирование механизмов управления и поддержки принятия решений связано с построением соответствующих систем анализа, синтеза и прогнозирования на основе иерархических структур [2]. Такие структуры присущи управлению и естественно отражают процессы кластеризации данных [5]. В инструментах поддержки механизмов управления используются исходные статистические данные по деятельности предприятий и отрасли, экспертные оценки и знания, прогнозные и прецедентные данные.

Обработка такого рода информации требует создания подсистемы отслеживания текущей динамики показателей состояния деятельности (нормализации данных; формирование интегральной оценки происходящих изменений; анализа закономерностей и выявление изменений).

Анализ полученных интегральных показателей сопровождается извлечением знаний, необходимых для принятий управленческих решений, осуществляется стратегический анализ, предвидение, прогнозирование и планирование в соответствии с разработанной и обоснованной иерархией целей [4].

Эффективность работы предприятий и механизмов управления можно оценить по интегральным показателям, сформированным на основе небольшого числа исходных показателей. Но из-за недостатков существующей системы сбора информации (статистических данных) необходимо привлекать косвенные показатели, а также показатели, полученные с помощью аналогии [5], нечеткие [2], формирующиеся в результате прогнозирования и стратегического планирования.

Необходимость всесторонних оценок отдельных данных или данных из кластера потребовали привлечения инструментов кластеризации на основе функции конкурентного сходства. С помощью такой функции может быть построен аналог функции жизненного цикла (идентификация, которой является сложной задачей).

На основе интегральных показателей, полученных с помощью метода главных компонент, также может проводиться кластеризация выделенной территории и ранжирование по уровням безопасности.

Процессы кластеризации являются объективными и естественными. Выявление кластеров с точки зрения безопасного развития является актуальной задачей и требует более детального формирования блока целей и иерархической структуры показателей, которые должны включать интегральные показатели выделенных блоков.

Обилие необходимых для учета данных сравнительного анализа требует адекватного решения. Если есть возможность выбора наихудшего и наилучшего объектов со всем набором данных, то можно осуществлять кластеризацию (ранжирование) остальных объектов на основе функции конкурентного сходства. Наихудший и наилучший объекты могут быть виртуальными, и представлены экспертами.

Уменьшение размерности массива данных, необходимых для применения функции конкурентного сходства, возможно при использовании интегральных показателей или главных компонент. Развитие данного направления связывается с компьютерными интеллектуализированными системами обработки данных. В рамках таких систем возможно проведение модельных широкомасштабных практических экспериментов, учитывающих многокритериальный характер задач и необходимость прогнозных оценок.

Известно, что даже для простых детерминированных систем существует горизонт прогноза, который не преодолевается использованием современных алгоритмов и компьютерных технологий.

Многокритериальное моделирование, функции конкурентного сходства и набор полученных интегральных показателей адекватно отражают изменения в деятельности предприятий здравоохранения и могут служить наполнением соответствующей системы поддержки управления для анализа, диагностики, прогнозирования и принятия эффективных решений.

Для решения указанных задач необходимо создание региональной системы мониторинга и прогноза, базирующейся на доступной, полной и достоверной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лукьяненко В. А. *Математическое моделирование эффективности функционирования социально-экономических систем* // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума АМУР-2013, Севастополь, 12-21 сентября 2013 / Под ред. доцента А. В. Сигала. - Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2013. - С 251-255.
- [2] Саати Т. *Принятие решений. Метод анализа иерархий* : Пер. с англ. Р. Вагнидзе. - М.: Радио и связь, 1993. - 316 с.
- [3] Моисеев Н.Н. *Математические задачи системного анализа* / Н.Н. Моисеев. - М.: Наука, 1981. - 488 с.
- [4] Ногин В.Д. *Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход*. и – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 176 с.
- [5] Козлова М.Г., Лукьяненко В.А., Иванова Ю.Е. *Кластеризация объектов с иерархической структурой* // Финансовые рынки и инвестиционные процессы: тезисы докладов Международной научно-практической конференции, Партенит, 15-16 октября 2013 / под.ред. М. Ю. Кусого. - Симферополь: ТНУ, 2013. - С. 59-62.

Разработка мобильных приложений учебного назначения. Обучение крымскотатарскому языку

Халилова Сание Мухаметовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 401)

e-mail: sanie-halilova@mail.ru

Введение

Важный этап в становлении и развитии ребенка - обучение языку, в частности алфавиту. Существует большое количество Интернет-ресурсов, способствующих эффективному обучению. Однако, ресурсов, посвященных крымскотатарскому языку, практически нет. К тому же, учитывая резкий скачок увлеченности детей мобильными телефонами, можно обоснованно предполагать, что оптимальными обучающими программами становятся мобильные приложения. Исходя из этого, считаем разработку подобных программ важной и перспективной темой.

Содержание работы

Дошкольный возраст можно назвать сензитивным периодом к развитию памяти, усвоению знаний, навыков, периодом активного освоения смыслов и целей человеческой деятельности, интенсивной ориентации в них. Именно в этом возрасте (3-7 лет) нужно обучать ребенка алфавиту.

Универсальной методики для обучения чтению на любом языке не существует, однако можно выделить наиболее важные подходы к процессу обучения. Так, изучив различные методики, приходим к выводу, что при обучении ребенка алфавиту необходимо максимально визуализировать буквы, воспроизводить звуки и использовать анимацию для привлечения внимания ребенка и достижения заинтересованности.

В дошкольном возрасте усваивание материала достигается путем многократного его повторения с применением максимальной визуализации. В этой связи, компьютер можно рассматривать как эффективное дидактическое средство. Педагогически выверенное использование информационно-коммуникационных технологий способствует усовершенствованию процесса обучения и развития ребенка дошкольного возраста.

К содержанию мобильных приложений выдвигается ряд требований. В частности, изображения, аудио- и видео-файлы должны быть профессионально обработаны и отличаться высоким качеством. Кроме того, учитывая целевую аудиторию разрабатываемого приложения, необходимо минимизировать отрицательное влияние цифровой техники (в частности, мобильных телефонов) на здоровье и развитие детей.

Существуют различные среды, с помощью которых люди, причастные к обучению и воспитанию, но не имеющие навыков программирования, могут разрабатывать мобильные приложения.

В ходе работы было решено остановиться на IntelXDK - инструменте для программирования мобильных приложений на HTML5. Среда обладает понятным интерфейсом и удобным инструментарием для создания собственного программного продукта.

В процессе работы получены следующие результаты:

1. Изучены методические подходы к конструированию обучающих мобильных приложений для дошкольников.
2. Рассмотрены среды для создания мобильных приложений.
3. Определены основные этапы разработки мобильных приложений для обучения дошкольников родному языку.
4. Разработаны пошаговые инструкции для учителей и родителей по созданию мобильного приложения для обучения дошкольников. В качестве иллюстрации разработано мобильное приложение для обучения крымскотатарской азбуке.

Выводы:

Разработка мобильного приложения для обучения крымскотатарскому алфавиту - один из первых взносов в развитие крымскотатарского языка. Сформулированные в ходе работы методические рекомендации по разработке обучающих приложений позволят родителям и учителям, не имеющим навыков программирования, самостоятельно создавать продукты, способствующие обучению ребенка. Конечный результат подобных разработок - предоставление пользователям Интернета возможности находить нужную информацию на крымскотатарском языке (в том числе программ для обучения языку).

Исследования температурных напряжений в прямоугольной призме

Шпилевой Евгений Владимирович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 601-П)

e-mail: shpilevoy92@list.ru

В работе рассматривается одна из типичных задач термоупругости, о нагреве прямоугольной призмы в условиях (обобщенного) плоского напряженного состояния.

Распределение температуры $T(y)$ в данной задаче является функцией лишь одной координаты.

$$T(y) = \frac{1 - y^2}{\eta},$$

где

$$\eta = \frac{a}{b}$$

(параметр, зависящий от соотношения сторон основания призмы). Частное решение дифференциального уравнения для термоупругого потенциала

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha * T(x, y)$$

выбираем в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha * T(x, y) = C \frac{1 - y^2}{\eta},$$

при этом

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Соответственно аналитическое решение однородного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = 0$$

в форме рядов Фурье с неопределенными коэффициентами x_k, y_k должны удовлетворять следующим граничным условиям по границе области основания призмы При $x = 1$ и $x = -1$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} + C_1 \frac{1 - y^2}{\eta} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

При $y = \eta$ и $y = -\eta$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Из граничных условий следует бесконечная система для коэффициентов x_k и y_k

$$\eta = \frac{a}{b}$$

$$x_k = \frac{4k^3\eta^3}{\pi(\coth[k\pi\eta] + \frac{k\pi\eta}{\sinh[k\pi\eta]^2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2 + k^2/\eta^2}$$

$$y_k = \frac{4k^3\eta^3}{\pi(\coth[k\pi\eta] + \frac{k\pi\eta}{\sinh[k\pi\eta]^2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2 + k^2/\eta^2} + \frac{6\eta}{k\pi(\coth[k\pi\eta] + \frac{k\pi\eta}{\sinh[k\pi\eta]^2})}$$

Решим данную бесконечную систему, используя средства программы Wolfram Mathematica 10.

Методом решения будет метод улучшенной редукции.

y/b	a=b	a=b	a=2b	a=2b
	$\sigma_{xx}(0, y)/S$	$\sigma_{xx}(0.5, y)/S$	$\sigma_{xx}(0, y)/S$	$\sigma_{xx}(0.5, y)/S$
0.0	-0.1409	-0.082	-0.3201	-0.2345
0.2	-0.1309	-0.077	-0.2831	-0.2099
0.4	-0.0953	-0.0582	-0.1709	-0.1333
0.6	-0.0163	-0.0133	0.204	0.0045
0.8	0.1369	0.08	0.2966	0.2196
1.0	0.4106	0.2589	0.6629	0.5353

В таблице представлены точные значения распределения нормального напряжения σ_{xx} по основанию (квадратному $a=b$ и прямоугольному $a=2b$)

На рисунках представлены трехмерные графики распределения напряжений.

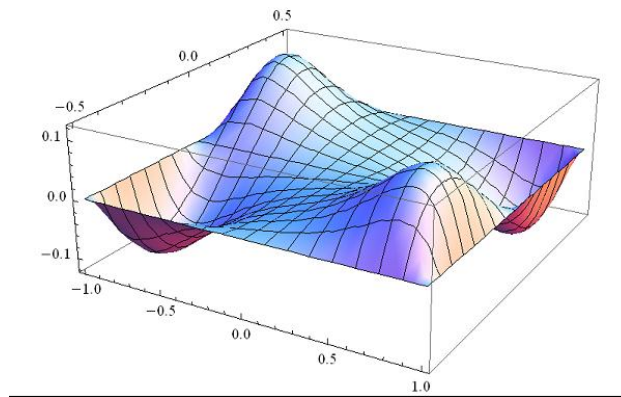


Рис. 1. График распределения сдвигового напряжения σ_{xy} , основание призмы прямоугольное

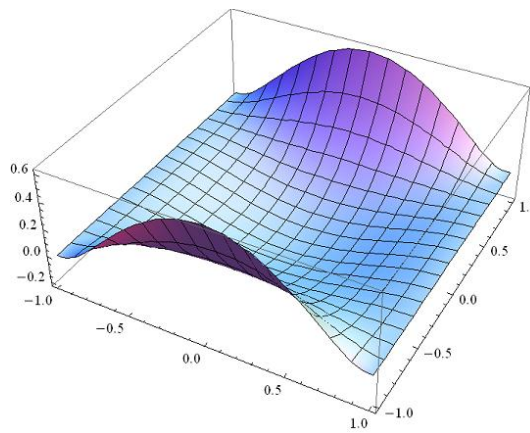


Рис. 2. График распределения нормального напряжения σ_{xx} , основание призмы прямоугольное.

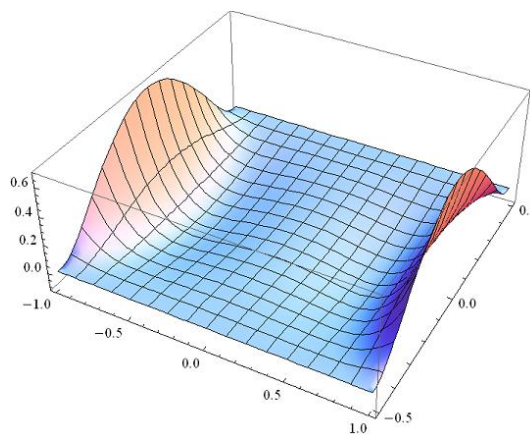


Рис. 3. График распределения нормального напряжения σ_{yy} , основание призмы прямоугольное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мелешко В.В. *Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинках.* – Прикладная математика. – 2005. – 41, №9. – С 101-117
- [2] Тимошенко С.П. *Теория упругости.* – М.: ОНТИ, – 1934.

Секция
ИНФОРМАТИКА

**Взаимодействие интерфейсов прикладного
программирования при автоматизации
составления расписания учебных занятий**

Авагян Эдвард Авагович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)
e-mail: edovvv@gmail.com

В работе рассматривается задача формирования расписания учебных занятий для различного количества дисциплин, преподавателей, студенческих групп и аудиторий. Создан прототип приложения с использованием языков программирования C++ и Пролог, позволяющий генерацию и редактирование вариантов расписания.

Проблема автоматизации составления расписания — достаточно актуальная задача в системах управления учебным процессом вуза, но на данный момент нет единого, общепринятого способа ее решения. В общей постановке задача составления расписания представляет собой процесс распределения некоторого конечного набора событий во времени в условиях ресурсных и других ограничений. В качестве исходных данных для составления расписания выступают списки групп студентов, дисциплин, а также учебная нагрузка на группы. Имеющийся ресурс выражен в качестве списка преподавателей, которые могут читать некоторые предметы в заданных группах, списка аудиторий, количества учебных дней в неделю, максимального количества занятий в день. Необходимо составить оптимальное расписание занятий для каждой группы по дням недели, распределить учебные аудитории в каждый из дней недели, распределить нагрузку на преподавателей по дням с учетом их пожеланий. То есть наиболее удобным образом распределить имеющиеся ресурсы в соответствии с запросами и выделить время для занятий каждой группы. Существование удачно составленных расписаний говорит о том, что задача составления оптимального расписания разрешима, или хотя бы о том, что для нее существуют допустимые решения. Составление расписания относится к задачам целочисленного программирования, сложность решения которых растет экспоненциально с ростом числа и возможных значений варьируемых

переменных (такие задачи относятся к классу NP-трудных задач). Кроме того, для нее характерно наличие большого объема различной по своему составу исходной информации и большого числа трудноформализуемых требований. Указанные сложности препятствуют автоматизации процедуры составления расписания, несмотря на наличие широкого спектра методов целочисленного программирования [1].

В последние годы предпринимаются множественные попытки совершенствования планирования учебного процесса путем построения алгоритмов оптимизации задач планирования учебной работы вуза с использованием различных математических методов и средств разработки [2].



Рис. 1. Структура основного класса.

Для решения существующих проблем требуется построение гибкой и легко адаптируемой системы с использованием современных информационных технологий. Необходима система, составляющая расписание в соответствии с выбранными критериями и заданными требованиями. Данная система должна иметь возможность дополнения и изменения существующей базы данных

и пользовательского интерфейса. В результате проделанной работы разработан прототип приложения, облегчающего пользователю работу по генерации и модификации расписания учебных занятий. Необходимые структуры данных вместе с основными операциями реализованы с использованием языка C++. Содержание основного класса объектной модели, содержащего информацию о расписании, показано на Рис. 1. Процедура автоматической генерации вариантов расписания занятий реализована на языке Пролог на основе одного из методов поиска в пространстве состояний. Операция перехода между состояниями заключается в извлечении занятия из списка ещё неразмещённых учебных занятий и помещении его на свободное место в расписании, с проверкой отсутствия накладок по преподавателю, группе и аудитории.

Данная система имеет удобный пользовательский интерфейс, позволяющий легко освоить работу с программой, гибкость же программного кода в случае необходимости позволит удовлетворить растущие требования к системе.

В настоящее время обрабатывается взаимодействие данного приложения с редактором электронных таблиц, в котором расписание принимает окончательный вид и оформляется для вывода на печать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кабальнов, Ю.С. *Композиционный генетический алгоритм составления расписания учебных занятий*. – Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, – Т. 7, № 2, – 2006.
- [2] Леонова, М.В. *Моделирование задач составления расписаний занятий в вузах: Обзор и разные подходы к решению*. – Вестник Запорожского национального университета: физико-математические науки, – № 1, 2013 – С.52–59.

Игровые модели автоматического управления наземным транспортом на основе нечеткой ЛОГИКИ

Аметов Осман Зениевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)

e-mail: w.os@mail.ru

Работа посвящена задаче компьютерного моделирования процесса автоматического движения наземного транспортного средства на плоской поверхности

для различных сценариев. Чтобы построить такую модель, необходима разработка программных систем и инструментальных средств, для формирования управления автоматическим движением транспортного средства

В последнее время все больший интерес разработчиков стали привлекать автономные мобильные роботы и автоматически управляемые транспортные средства в неуправляемой среде, которые становятся всё актуальнее в повседневном окружении человека. Уже сейчас мы можем увидеть современные беспилотные автомобили способные выполнять маневры разной степени сложности (Google self-driving car, Tesla car).

Задача заключается в построении простых компьютерных моделей автоматического управления движением автомобиля на плоскости и построения траектории этого движения. Само управление осуществляется на основе аппарата нечёткой логики. В зависимости от задачи поставленной перед автомобилем (например парковка), или среды с которой он взаимодействует (например присутствие на карте препятствий), модель должна иметь соответствующий нечеткий контроль управления.

Для создаваемой системы нечеткого управления объектом будет модель легкового автомобиля (рис. 1) определенного размера (l, w). Управление автомобиля выполняется на уровне *ускорения* (v), *торможения* (v), *поворота колёс* (θ). Начальное положение автомобиля определяется соответствующими координатами (x_0, y_0), а также тем, под каким *углом* (φ) он расположен относительно осей или относительно финишной позиции [1]. Для решения задачи

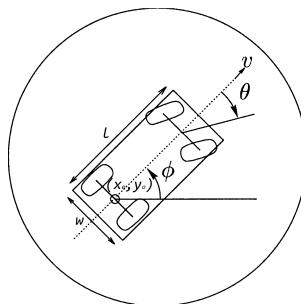


Рис. 1. Модель автомобиля

моделирования в качестве основных информационных технологий выбраны

системы управления на основе нечеткого вывода, такие как *нечеткий контроллер*, с заданной нечеткой базой правил (рис. 2). Применение нечеткого контроллера обусловлено его эффективностью в контексте сложных, нечетко заданных процессов. Преимущества предлагаемого варианта решения – это простота модели [2]. В нечетком контроллере база правил настраивается с учётом масштаба карты. Для определения направления движения, нечеткий контроллер получает данные о состоянии автомобиля (φ), расстоянии до цели на карте ($dist$), а также, при наличии препятствий, данные о них (p_1, \dots, p_N), и производит процесс *фаззификации*. После определения выходных параметров (v, θ) через нечёткую базу правил, нечеткий контроллер производит *дефаззификацию*. Таким образом определяется направление и скорость движения автомобиля [3].

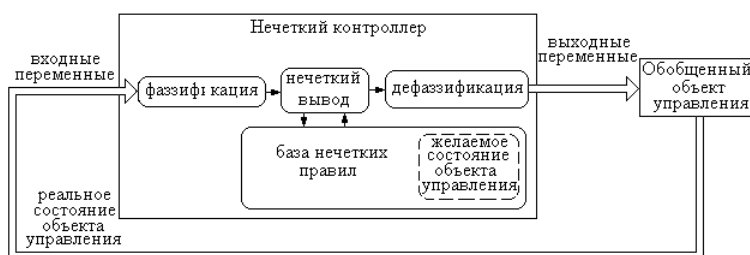


Рис. 2. Схема нечеткого контроллера

Рассмотрим три сценария моделирования подробнее.

- Первый – это классическая задача парковки. Задача заключается в том, чтобы автомобиль занял положение в парковочном месте под определенным углом [1].
- Второй – движения по карте к заданной точке без препятствий.
- Третий – движения по карте к заданной точке с препятствиями [4].

В зависимости от сценария, компьютерная модель отличается входящими в контроллер параметрами и базой нечетких правил.

Общая схема взаимодействия между элементами модели выполняющей задачи автоматического управления и построения траектории движения изображена на рис. 3.

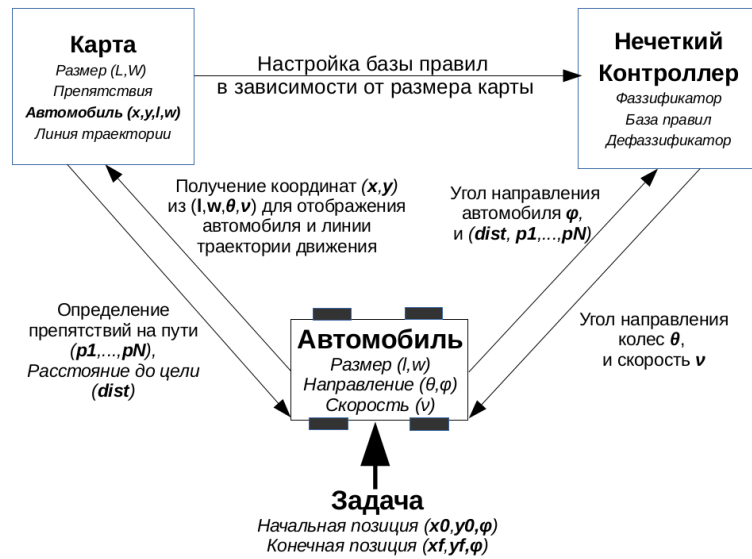


Рис. 3. Общая схема взаимодействия между элементами модели

Моделирование и реализация программного решения осуществлялось с использованием таких прикладных программ как Wolfram Mathematica и Matlab. Результатом компьютерного моделирования являются построенные траектории движения для каждого из сценариев: парковка, движение к цели, движение к цели с препятствиями (рис. 4). Таким образом мы видим, что поставленные задачи компьютерного моделирования выполнены.

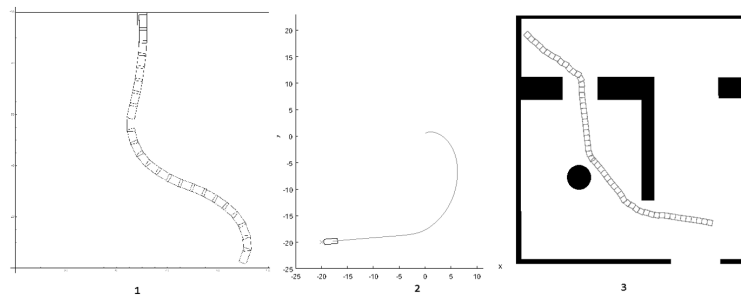


Рис. 4. Результат моделирования движения для различных сценариев

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Riid, D. Pahhomov, E. Rustern *Fuzzy Logic Control for Automobiles: Navigation*. – Tallinn University of Technology, – 2006.
- [2] Guanrong Chen, Trung Tat Pham *Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy control systems*. – CRC Press LLC, – 2001 – С. 329.
- [3] Ying Bai, Hanqi Zhuang, Dali Wang *Advanced Fuzzy Logic Technologies in Industrial Applications*. – Springer-Verlag London Limited, – 2006 – С. 324.
- [4] Ramdane Hedjar, Mansour Al Sulaiman *Fuzzy Logic Navigation and Obstacle Avoidance by a Mobile Robot in an Unknown Dynamic Environment*. – International Journal of Advanced Robotic Systems, – 2012.

Визуализация методов численного решения систем алгебраических уравнений

Амонтъев Павел Алексеевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)

e-mail: simffer@mail.ru

В самых различных задачах возникает необходимость решать системы нелинейных уравнений. Конечно, когда речь идёт о нелинейных уравнениях в общем случае, нет ни теорем о существовании, ни теорем о единственности решения. Тем не менее, имея дело с системой

$$f(x) = 0,$$

предполагаем, что искомое решение существует. Оно, быть может, не единственно, и метод, который будет рассмотрен ниже, не имеет целью найти все решения; обычно достаточно будет какого-то одного. Более того, предположим, что из каких-то содержательных соображений известно примерное расположение этого решения, некоторая не очень большая область, в которой оно находится. Таким образом, лучше говорить не о решении систем нелинейных уравнений, а об уточнении весьма грубого приближения к некоторому решению.

Рассмотрим как можно решить систему алгебраических уравнений. В случае, если система линейная, целесообразно прибегнуть к таким методам, как метод Гаусса, метод Крамера или метод Ричардсона. Однако, если вид

функции нам неизвестен, воспользуемся одним из итерационных методов численного решения. В частности, рассмотрим метод Ньютона. Этот метод основывается на принципах метода простой итерации.

Классический метод Ньютона или касательных заключается в том, что если x_n - некоторое приближение к корню x_* уравнения $f(x) = 0, f \in C^1$, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции $f(x)$, проведенной в точке x_n .

Уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x_n имеет вид:
 $f'(x_j) = \frac{y-f(x_n)}{x-x_n}$.

В уравнении касательной положим $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

Тогда алгоритм последовательных вычислений в методе Ньютона состоит в следующем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Сходимость метода касательных квадратичная, порядок сходимости равен 2. Таким образом, сходимость метода касательных Ньютона очень быстрая. Если корень x_* является корнем второй кратности и выше, то порядок сходимости падает и становится линейным [1].

К недостаткам метода Ньютона следует отнести его локальность, поскольку он гарантированно сходится при произвольном стартовом приближении только если везде выполнено условие $|f f''|/(f'^2) < 1$, в противной ситуации сходимость есть лишь в некоторой окрестности корня.

Также недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления производных на каждом шаге.

Недостатком почти всех итерационных методов нахождения корней является то, что они при однократном применении позволяют найти лишь один корень функции, к тому же, мы не знаем какой именно. Чтобы найти другие корни, можно было бы брать новые стартовые точки и применять метод вновь, но нет гарантии, что при этом итерации сойдутся к новому корню, а не к уже найденному, если вообще сойдутся [2].

В особенностях наличия/отсутствия и расположения корней уравнения, а также работы метода Ньютона и других итерационных методов, позволяет разобраться визуализация графиков функций, а также последовательности шагов итерационного метода. Рассмотрим визуализацию на примере уравнения

$$5^x - 6x - 3 = 0$$

При начальном приближении $x_0 = 1.3$ уже третий шаг метода Ньютона даёт приемлемое приближение для одного из корней уравнения, как видно из

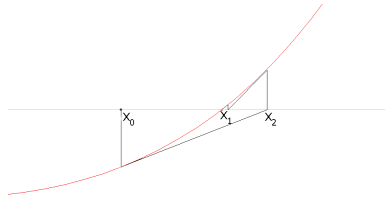


Рис. 1. Метод Ньютона сходится

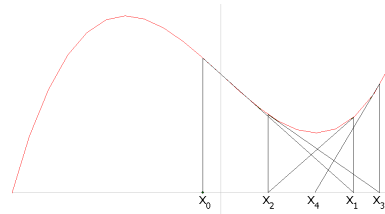


Рис. 2. Метод Ньютона не сходится

Рис. 1. В то же время на Рис. 2 показано, как при использовании для уравнения

$$3x^3 - 5x + 5 = 0$$

начального приближения $x_0 = -0.14$ при применении метода Ньютона наблюдаются проблемы со сходимостью.

В двумерном случае метод Ньютона тоже имеет геометрический смысл метода касательных, только теперь касательные принимают смысл не линий на плоскости, а плоскостей в трёхмерном пространстве. Например, для системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(y - x) + 1.6x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

на Рис. 3 показано расположение графиков соответствующих функций в плос-

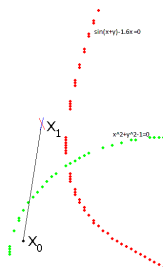


Рис. 3. Метод Ньютона в плоскости $x-y$

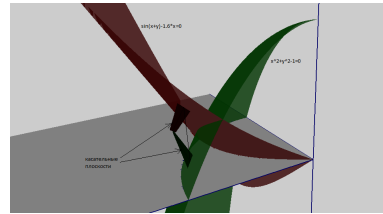


Рис. 4. Метод Ньютона в пространстве

кости $x - y$, а также один шаг метода Ньютона при начальных значениях $x = -0.9$, $y = 0.2$. Из этой диаграммы трудно понять, почему метод Ньютона

выбрал именно такое направление и длину шага. Разобраться в этом поможет трёхмерная визуализация, в которой по третьей оси задаются значения функций левых частей уравнений. Она показана на Рис. 4.

На этом рисунке можно видеть, что такое направление и длина шага задаётся пересечением плоскостей, касательных к графикам соответствующих функций, с координатной плоскостью. Таким образом, трёхмерная визуализация позволяет геометрически пояснить поведение метода Ньютона в случае систем уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Амосов, А.А., Дубинский, Ю.А., Копченова, Н.П. *Вычислительные методы для инженеров*. – М.: Мир, 1998. – 544с.
 [2] Волков, Е.А. *Численные методы*. – М.: Физматлит, 2003. – 248с.

Проектирование системы безопасности частной компьютерной сети

Апанович Денис Алексеевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)

e-mail: apanovichtatyana@mail.ru

В работе рассматривается задача, которая стоит перед проектировщиком локальной сети, стремящимся уменьшить вероятность блокировки потоков информации.

1. ВИРТУАЛЬНЫЕ ЧАСТНЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ СЕТИ

Путём замены одного из компьютеров большой («глобальной») компьютерной сети на роутер малой («локальной») компьютерной сети можно получить «подсеть». Рекурсивно можно построить разветвлённый односвязный нециклический граф и получить древовидную топологию. Итак, если роутер звездообразной сети A состоит в сети B , сеть A считается «подсетью» сети B . При этом возможны два подхода:

- IP-адресация участников древовидной сети «сквозная», т. е., каждый участник древовидной сети, независимо от глубины, на которой он находится, виден из корневой сети.

- Участникам подсети A_1 разрешается иметь такие же IP-адреса, как участникам независимой от A_1 подсети A_2 . При этом участники подсетей A_1 и A_2 не видны из корневой сети.

В силу ограниченности множества всевозможных IP-адресов, приходится использовать второй подход («виртуальные» подсети). При нём для прокладки пути через маршрутизаторы необходимо грамотно построить таблицы маршрутизации. Основные принципы коммутирования будут изложены в следующем пункте.

2. КОММУТАЦИОННЫЕ СЕТИ КЛОЗА

Определение 1. «Матричным коммутатором» размерности $m \times n$ назовём набор выключателей, коммутирующих m входов с n выходами. Математической моделью «матричного коммутатора» является бинарная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } \forall i = \overline{1, m} : \forall j = \overline{1, n} : a_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Пример «матричного коммутатора» — программируемая микросхема ПЗУ, где каждая точка коммуникации — плавкий предохранитель. При программировании необходимые предохранители программатор прожигает выборочно с помощью высокого напряжения, а при считывании с помощью низкого напряжения можно определить, в какой точке коммуникации какое состояние предохранителя. Легко видеть, что ёмкость такой микросхемы составляет $m \cdot n$ бит:

Утверждение 5. Количество всевозможных состояний матричного коммутатора размерности $m \times n$ составляет $2^{m \cdot n}$.

Определение 2. Кроссбаром (англ. "Crossbar") размерности $m \times n$ назовём «матричный коммутатор» размерности $m \times n$, выполняющий следующие условия:

- Запрещается один и тот же вход одновременно подключать к нескольким разным выходам.
- Запрещается к одному и тому же выходу одновременно подключать несколько разных входов.
- Каждый вход должен иметь возможность подключиться к какому-нибудь выходу. Отсюда следует, что количество входов не должно превышать количество выходов ($m \leq n$).

Утверждение 6. Количество всевозможных состояний кроссбара $m \times n$ составляет $\frac{n!}{(n-m)!}$ (при условии, что все входы куда-то подключены).

Определение 3. Пусть имеется r «входящих» кроссбаров. Каждый имеет размерность $n \times m$. Столько же «исходящих» кроссбаров размерности $m \times n$ (таким образом, имеем $r \cdot n$ входов и столько же выходов). Пусть имеется также m кроссбаров «среднего яруса», каждый из которых имеет размерность $r \times r$. Все эти кроссбары соединим по схеме рис. 1. Полученную сеть назовём «сетью Клоза».

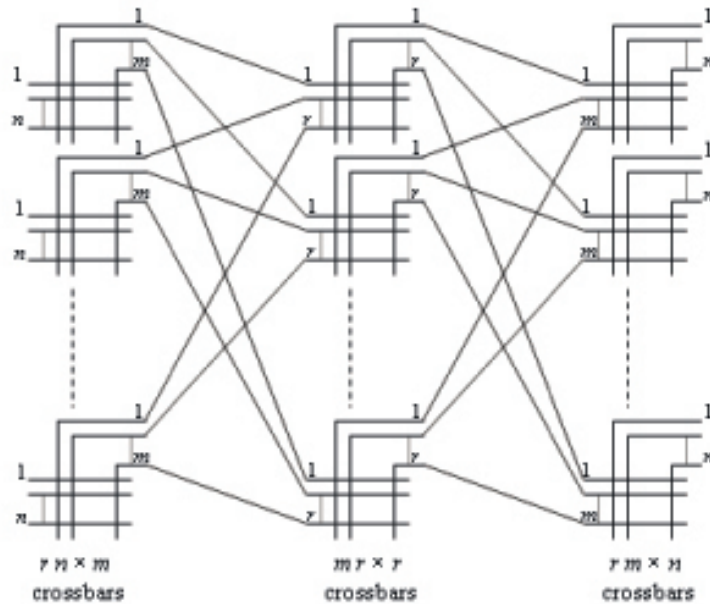


Рис. 1. Сеть Клоза

Смысл в построении сетей Клоза заключается в том, что сеть Клоза имеет меньшее количество точек коммутации по сравнению с аналогичным «однойдерным» кроссбаром.

Пример 1. Рассмотрим кроссбар размерности 2×2 . Количество возможных состояний составляет, согласно утверждению 6, лишь $\frac{2!}{0!} = 2! = 2$ (параллельное коммутирование и перекрёстное коммутирование), между тем, количество точек коммутации составляет $2 \cdot 2 = 4$.

Иными словами, для того, чтобы переключаться между двумя состояниями кроссбара 2×2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, необходимо манипулировать 4 перемычками. При большем количестве входов и выходов этот недостаток кроссбара будет всё ощутимее:

Утверждение 7. Количество точек коммутации в сети Клоза $2 \cdot r \cdot t \cdot n + t \cdot r^2 = (2 \cdot n + r) \cdot r \cdot t$. Между тем, аналогичный кроссбар имел бы размерность $r \cdot n \times r \cdot n$, при этом содержал бы $(r \cdot n)^2$ точек коммутации.

Определение 4. Сеть Клоза называется «строго неблокирующей», если свободный вход входящего кроссбара всегда может быть соединён со свободным выходом исходящего кроссбара без необходимости перекоммутации уже существующих соединений.

Следующий вывод составляет основу классической статьи [1]:

Теорема 1. Достаточное условие для того, чтобы сеть Клоза являлась «строго неблокирующей», можно записать формулой:

$$t \geq 2 \cdot n - 1. \quad (2.1)$$

Определение 5. Сеть Клоза называется «условно неблокирующей» или «неблокирующей при перекоммутациях», если свободный вход входящего кроссбара всегда может быть соединён со свободным выходом исходящего кроссбара при допущении перекоммутации уже существующих соединений

Очевидно, что если сеть Клоза является «строго неблокирующей», она является и «условно неблокирующей», но достаточное условие для того, чтобы сеть Клоза была «условно блокирующей», много мягче условия (2.1): $t \geq n$.

Определение 6. Если $t < n$, то сеть Клоза называется «допускающей блокировки».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Clos, Charles A study of non-blocking switching networks // Bell System Technical Journal. — 1953. — №32 (2). — 406–424 pp.

- [2] Philipp Hall On Representatives of Subsets // Journal of the London Mathematical Society. — 1935. — №10. — 26–30 pp.
- [3] Желваков Б.Б. *Архитектура корпоративных информационных систем. Учебное пособие.* — С.-П.: Государственный инженерно-экономический университет, кафедра Информационных систем в экономике, — 2012 — С. 622.

Выявление закономерностей во множествах данных на основе моделей дисперсионного анализа

Баклушин Станислав Юрьевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)

e-mail: Stasbaclushyn@mail.ru

Рассматриваются вопросы применения моделей и методов дисперсионного анализа в задачах изучения и анализа многомерных данных. Рассмотрены основные модели одномерного и многомерного дисперсионного анализа и методы проверки гипотез. Приведены иллюстрирующие примеры и прикладные задачи анализа в области образования.

Одним из мощных и широко распространенных методов многомерного статистического анализа является дисперсионный анализ. Более того, он занимает особое место в статистических исследованиях, поскольку практически все модели анализа данных опираются на изучение вариации признаков и численные оценки этой вариации (дисперсии). Концепция дисперсионного анализа была предложена Р. Фишером в 1920-х годах. Несмотря на глубокую проработанность теоретических обоснований и широкое использование в прикладных задачах, методы дисперсионного анализа остаются актуальными в современных исследованиях, использующих процедуры статистического анализа больших массивов данных.

Сочетание ANOVA (Analysis of Variances) само означает анализ вариаций (дисперсий). Для этой группы методов характерно наличие одной зависимой переменной, на вариацию которой оказывают влияние одна или несколько независимых переменных – факторов. При этом факторы могут иметь количественный характер; предполагается возможность их изменения в нескольких уровнях. Зависимая переменная обязана быть количественной и нормально распределенной. В этом заключается важное отличие метода дисперсионного анализа от Т-теста сравнения средних, который не опирается на анализ

причины вариации между сравниваемыми группами и работает только для количественных нормально распределенных данных.

Для многомерного статистического анализа характерно сочетание MANOVA (Multicriterion Analysis of Variances). В этом случае предполагается наличие группы зависимых переменных, варьирующих под влиянием ряда факторов. В этом случае возрастает сложность вычислений, но содержание и основные принципы не меняются: проверяются гипотезы о равенстве средних в подгруппах, соответствующих плану эксперимента.

Модель дисперсионного анализа есть математическое соотношение, представляющее каждую переменную в виде суммы среднего значения и ошибки; среднее значение представляется в виде суммы генерального среднего и «эффекта» от каждого фактора и комбинаций факторов. Возникающие статистические задачи связаны с оценкой этих эффектов и проверкой гипотез о них.

Теоретической основой моделирования является общая линейная модель, выражающая значения зависимой переменной через линейную комбинацию факторов, включенных в анализ, с учетом ошибки. С помощью метода наименьших квадратов определяются оценки параметров модели, а также оценка дисперсии как средний квадрат ошибки, или остаточная сумма квадратов. Получают также разложение общей суммы квадратов на компоненты, связанные с дифференциальными эффектами и эффектами взаимодействий. Для проверки гипотез используется F-критерий Фишера.

В рамках одномерной модели рассматриваются однофакторный ANOVA (One way ANOVA), двухфакторный ANOVA с пересекающимися факторами, а также ANOVA с повторными наблюдениями (Repeated Measures ANOVA). Применение этих моделей для выявления закономерностей данных проиллюстрировано примером анализа сводных данных оценки знаний студентов факультета.

Задачи и методы многомерного дисперсионного анализа (MANOVA) опираются на обобщенную линейную модель, которая образуется из взятых вместе общих линейных моделей для всех зависимых переменных, включенных в анализ. В этом случае рассматриваются остаточные суммы квадратов и остаточные суммы произведений, на основе которых определяются несмещенные оценки дисперсий.

Наиболее важное значение отводится матрице R_1 остаточных сумм квадратов и произведений. Водится также матрица $(R_1 - R_0)$ сумм квадратов и произведений, обусловленных отклонением от гипотезы.

Разложение $R1 = R0 - (R1 - R0)$ является обобщением многомерного дисперсионного анализа. Таким образом, отклонение от гипотезы может быть определено сравнением матриц $R0$ и $(R1 - R0)$.

Для проверки гипотезы могут быть использованы различные функции, зависящие от корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ характеристического уравнения $\det(R1 - \lambda R0) = 0$. В числе критериев наиболее часто используются следующие:

1) критерий наибольшего характеристического корня $V = \max \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ предложен С. Н. Роем (Roy S. N., 1965) на основе эвристического метода, поскольку этот корень отражает максимальное отклонение от гипотезы;

2) Λ -критерий Уилкса: $\Lambda = \frac{|R0|}{|R1|}$ предложен Уилксом (Wilks S. S., 1961). Статистика Λ при некоторых сочетаниях параметров имеет F распределение. В общем случае Λ имеет приближенно распределение хи-квадрат с ps степенями свободы. Лучшая аппроксимация для Λ -критерия предложена Рао (Rao S. R.) и сводится к F -распределению;

3) критерий следа Лоули и Хотеллинга (Lawley D. N., Hotelling H., 1951) $T^2 = \Sigma \lambda_i$. Этот критерий считается удобным для практических вычислений, так как не требует нахождения собственных значений. Здесь также можно при определенном сочетании параметров использовать хи-квадрат распределение или F распределение.

Рассматривается ряд примеров дисперсионного анализа для одномерного и многомерного случая, разработанных автором для задач анализа в области образования и основанных на статистических данных успеваемости, результатах опросов. Эти примеры могут быть использованы в качестве сценариев статистического моделирования в лабораторном практикуме по анализу данных.

Так, например, рассмотрены модели дисперсионного анализа, данные для которых взяты из сводной ведомости успеваемости студентов факультета по итогам сессии. Генеральная совокупность (весь контингент бакалавриата) разбита на группы по направлениям подготовки (коды М, ПМ, ПМИ) и курсам (1, 2, 3, 4). Оцениваемые отклики в модели – относительное значение успеваемости (ABS), относительное значение качества (QUA). В качестве возможных факторов, определяющих различие средних в группах рассматриваются направления и курсы.

По отдельности рассмотрены две одномерные модели с зависимыми переменными ABS и QUA. Наблюдения образуют полные факторные планы 3×4 . Получены оценки дифференциальных эффектов по итогам одной сессии.

Гипотеза о равенстве средних принимается по значению F-критерия. Интерпретация принятия гипотезы такова: относительные значения успеваемости и качества не показывают статистически значимой зависимости от факторов.

Рассмотрена также модель многомерного дисперсионного анализа на базе полного двухфакторного плана с двумя зависимыми переменными ABS и QUA. Значение Λ -критерия Уилкса также не отклонило гипотезу о равенстве средних, что согласуется с результатами и интерпретацией одномерного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аренс, Х. *Многомерный дисперсионный анализ*. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 230с.
- [2] Аффифи, А. *Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ*. – М.: Мир, 1982. – 488с.
- [3] Тюрин, Ю.Н. *Анализ данных на компьютере: учеб. пособие для студентов вузов*. – М.: Форум, 2008. – 366с.

Интеллектуализация обработки данных в задачах восстановления изображений

Белозуб Владимир Антонович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602И)

e-mail: disstroier@mail.ru

Восстановление функций по данным косвенных измерений является типичной задачей дистанционного зондирования, восстановления изображений. Соответствующие системы моделируются линейными или нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями, экстремальными задачами и их дискретными аналогами. Как правило, такие задачи являются некорректными. Для их решения разрабатываются регуляризирующие алгоритмы [1 - 3]. Существенно используется информация (знания) о решении и характере вносимых измерительной системой погрешностей. Не существует универсального алгоритма решения таких задач. Актуальной является разработка интеллектуальных агентов (ИА)[4], использующих знания о моделях, алгоритмах, решениях (априорная информация), погрешностях, прецедентах. Такие ИА могут быть однотипными или специализированными, работать в группе, обмениваться информацией, осуществлять

декомпозицию задачи. Исследуем частный случай разработки ИА для задачи обработки данных с моделью в виде нелинейного интегрального уравнения первого рода типа Урысона

$$\int_a^b f(s)k(t-z(s))ds = u(t), c \leq t \leq d. \quad (0.1)$$

Исследуем случаи, в которых допускается сведение к линейным интегральным уравнениям, обыкновенным дифференциальным уравнениям или уравнениям в частных производных [5, 6]. Пусть известна априорная информация о монотонности функции $z(s)$ ($z(s)$ принадлежит классу монотонно возрастающих функций), функция $\psi(\tau) = \alpha(\phi(\tau))/z'(\phi(\tau)) \in W_2^1$, где $\tau = z(s)$. При заданных уровнях погрешности $\eta = (h, \delta)$: h - оператора и δ - правой части найдется такое значение параметра регуляризации $\alpha(\eta)$, что приближенное решение \tilde{z}_η^α находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$z'(s)\psi(z(s)) = f(s), a \leq s \leq b, \quad (0.2)$$

где функция $\psi(z)$ является решением уравнения Эйлера для функционала А. Н. Тихонова: $M^\alpha = \alpha \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|B_h\psi - u_\delta\|_{L_2}^2$, где $B\psi = n * \psi$. По априорной информации о монотонности, гладкости и уровне погрешности ИА осуществляет построение приближенного решения функции ψ ,

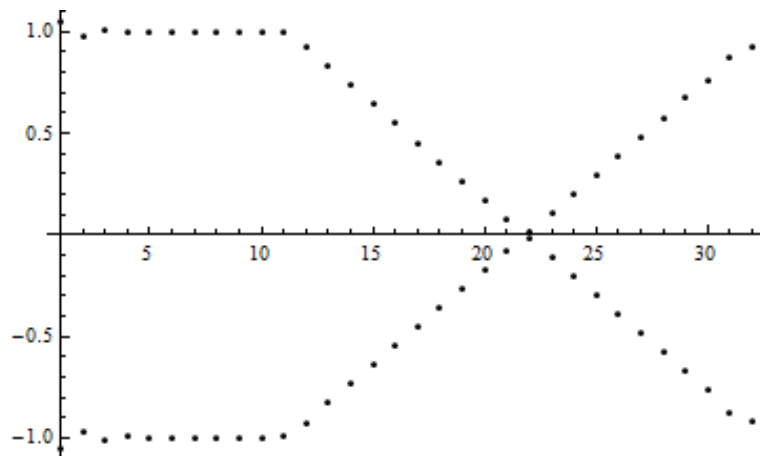


Рис. 1. Пример работы ИА

а по дифференциальному уравнению (0.2) находится искомая функция

$z(s)$. При этом искомыми являются также величины $z(a)$ и $z(b)$. Для квазиреального вычислительного эксперимента необходимо решить (многokrатно) как прямую, так и обратную задачи. Используя результаты работы [1] разработан пакет программ на языке Си для ИА, реализующий алгоритмы решения (0.1) с учетом поступающей информации. Для примера $f(s) = 1 - s^2$, $z(s) = s - \frac{3}{2}$, $k(x) = e^{-80(x-\frac{1}{2})^2}$, $-1 \leq s \leq 1$, $-3 \leq t \leq 0$, рис. 1 показывает результат работы ИА.

В результате работы алгоритма уточняется локальный носитель для функций $f(s)$ и $\psi(z)$, устранена избыточная информация, полученная в ходе сканирования, то есть определен участок восстанавливаемой функции $\psi(z)$. Разработанный пакет для ИА успешно справляется с хорошо восстанавливаемыми функциями, когда уровень погрешности η невелик или когда доступна информация, устраняющая двусмысленность функций. Рассмотрим другой пример с использованием $f(s) = s - s^3$ и $-2 \leq t \leq 0$. Из рис. 2 можно видеть, что решение неустойчиво на концах отрезка. Соответственно, предложенный ИА качественно вос-

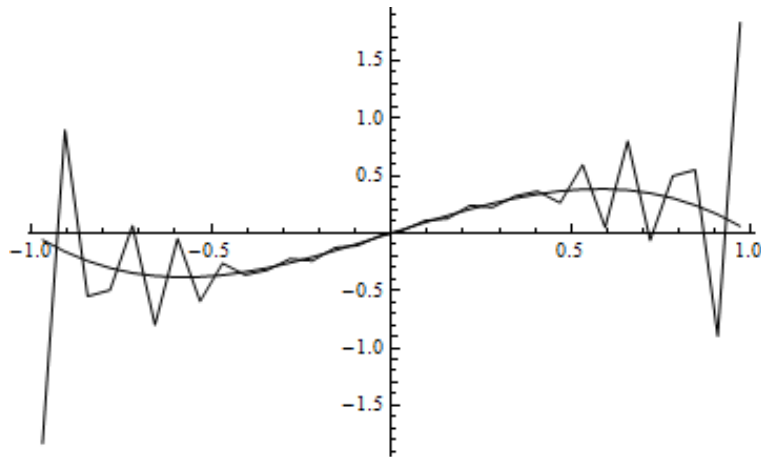


Рис. 2. Пример неустойчивости решения на границах отрезка

станавливает решение на более узком отрезке. Этого вполне достаточно для восстановления кусочно-монотонных функций, но предварительно необходимо решить задачу о нахождении точек экстремума искомой функции. На рис. 3 можно видеть, что участок прямой можно выделить локально, все остальное же определяется как шум.

В качестве уточняющей информации используются результаты сканирования со сдвигом по t . Появляется избыточная информация для восстановления функции $\psi(z)$ и тем самым функции $z(s)$. Используя информацию от сканирования с различных точек, можно повысить точность восстановления искомой функции $z(s)$.

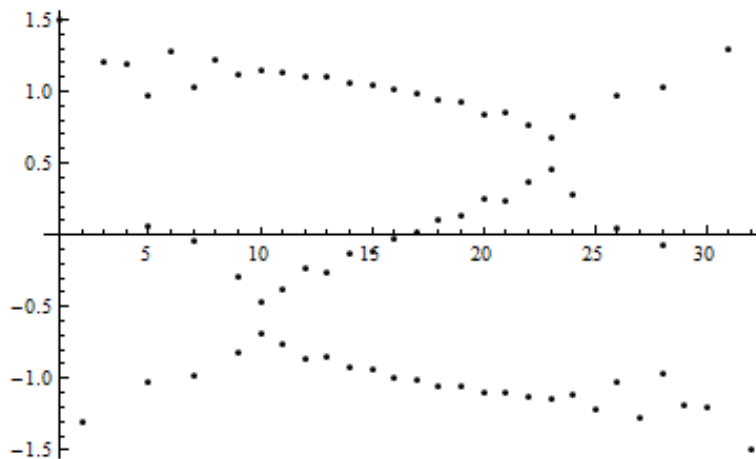


Рис. 3. Пример работы ИА в неустойчивом режиме

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гончаровский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. *Некорректные задачи астрофизики*. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
- [2] Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений*. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
- [3] Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией*. – Екатеринбург: УИФ "Наука" 1993. – 263 с.
- [4] Донской В.И. *Интеллектуальное управление: обзор / В.И. Донской // Таврический вестник информатики и математики*. – Симферополь, 2014. – №2 (25). – С. 14-35
- [5] Лукьяненко В.А., Белозуб В.А. *Нелинейные уравнения типа свертки с дельтаобразными ядрами : Международная конференция "XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (КРОМШ-2015): сборник тезисов*. – Симферополь: ООО ФОРМА, 2015. – С. 95.
- [6] Лукьяненко В.А., Козлова М.Г., Хазова Ю.А. *Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений типа свертки первого рода с неизвестным сдвигом // Метод функций Ляпунова и его приложения : X Крымская международная математическая школа*. – Симферополь: ДИАИПИ, 2010. – С. 83-84

Проблема принятия решений и задача многокритериальной оптимизации

Булатов Фикрет Эскендерович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)

e-mail: frt550@gmail.com

В работе рассматриваются проблема и класс задач теории принятия решений, а также задача многокритериальной оптимизации.

Проблема принятия решений возникает, если нам предоставляется несколько альтернативных вариантов и нужно выбрать только один из них. Считаем, что такой выбор не случайный и совершается в соответствии с некоторыми критериями. Теория принятия решений рассматривает все процессы, оказывающие влияние на выбор лучшего варианта из множества допустимых альтернатив.

Традиционно принято выделять следующие задачи принятия решений:

- упорядочение альтернатив, имеющих оценки по многим критериям;
- классификация многокритериальных альтернатив;
- выделение лучшей альтернативы.

Во многих практических задачах принятия решений альтернативы оцениваются не по одному, а по нескольким критериям. Например, при покупке оборудования мы сталкиваемся с такими критериями: стоимость, надежность, производительность и т.д. Наличие нескольких критериев делает задачу принятия решений многокритериальной.

Поиск решения многокритериальной задачи не представляет особых сложностей, если предпочтение по одному критерию влечет за собой такое же предпочтение по другому критерию, т.е. критерии кооперируются. Решение многокритериальной задачи также не представляет особых сложностей, если критерии нейтральны по отношению друг к другу, т.е. поиск решения по одному критерию никаким образом не отражается на поиске решения по другому критерию [1].

Однако в общем случае несколько критериев могут противоречить друг другу, и, как правило, нельзя выбрать какой-то один вариант, который будет оптимальным по всем критериям. Необходимо найти компромиссное решение [2].

К примеру, в задаче покупке оборудования критерии стоимости и производительность конфликтуют, если нам необходим дешевый и мощный вариант: высокая производительность, как правило, соответствует высокой стоимости, и наоборот.

Как известно, для любой многокритериальной задачи целесообразно рассмотреть множество решений (т.е. значений параметра управления), оптимальных по Парето. Эти решения оптимальны в том смысле, что не существует возможных решений, которые бы превосходили бы Парето-оптимальные решения одновременно по всем критериям. Точнее, превосходили бы хотя бы по одному критерию, а по остальным были бы столь же хорошими [3].

Задача многокритериальной оптимизации.

$$\text{maximize}\{f(x) = (f_1(x), \dots, f_K(x))\}, x \in X$$

где $f(x) : X \rightarrow R^K$ – целевая вектор-функция, где $K \geq 2$

Так как не существует единого решения, которое было бы максимальным для всех целевых функций, вместо него можно искать множество Парето оптимальных значений $X^* \subseteq X$.

Множество Парето оптимальных значений.

$$\forall x^* \in X^* \nexists x \in X : x \succ x^*,$$

где

$$x \succ x^*$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\forall i \in 1..K, (f_i(x) \geq f_i(x^*))) \wedge (\exists i \in 1..K, f_i(x) > f_i(x^*))$$

Выражение $x \succ x^*$ означает, что x доминирует над x^* . Говорят, что x доминирует над x^* по Парето, если x не хуже x^* по всем критериям и хотя бы по одному критерию превосходит x^* . В таком случае в выборе x^* нет смысла, т.к. x по всем параметрам не уступает, а по каким-то и превосходит x^* .

Принятие решений — это прикладная научная дисциплина. Основную роль в ее развитии играют практики, помогающие людям в сложных задачах выбора. Создание методов принятия решений требует рассмотрения математических, психологических и информационных проблем. В связи с этим в развитии принятия решений как научного направления принимают участие математики, психологи, специалисты по искусственному интеллекту, теории организаций, информационным технологиям, вычислительной технике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уткин Л. В. *Анализ риска и принятие решений при неполной информации*. – СПб.:Наука, 2007, – 404 с.
- [2] Висенц Торра *Математика и выборы. Принятие решений*. – М.:Де Агостини, 2014, – 160 с.
- [3] Орлов А. И. *Теория принятия решений. Учебное пособие*. – М.: Изд-во "Экзамен", 2005, – 656 с.

Структурное распознавание образов на примере задачи о распознавании структуры рукописной таблицы

Ганиев Ибраим Шукриевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601)
e-mail: olologin@gmail.com

В статье объясняются общие принципы построения систем структурного распознавания образов на примере задачи распознавания структуры рукописной таблицы

ВВЕДЕНИЕ

Существует целый класс задач распознавания образов не поддающийся решению при помощи обычного статистического подхода, стандартных нейросетей или SVM. Примерами таких задач могут послужить распознавание химической структуры, математической формулы, таблицы. Это лишь некоторые задачи структурного распознавания, но уже можно заметить: образ состоит из иерархии более простых образов, и сама иерархия несёт в себе много информации об объекте. В случае с математической или химической формулой важно не только распознать символ, но и верно распознать структуру, где этот символ находится, является ли он степенью, знаменателем или числителем дроби и т. д. В подобных задачах отсутствие информации о структуре делает все остальные данные бесполезными. Для подобных задач выделяют отдельный подход в распознавании — *структурное распознавание образов*. Вопрос: чем класс задач структурного распознавания отличается от задач обычного распознавания образов?

- (1) Каждый образ представляет собой иерархию взаимоотношений между более простыми образами (непроизводными элементами), при этом эта иерархия важна для получения результата, т.е. важно положение более простых образов в структуре образа.
- (2) Множество всевозможных классов образов в задаче настолько велико что сложно получить даже репрезентативную выборку из этого множества.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ СТРУКТУРЫ РУКОПИСНОЙ ТАБЛИЦЫ

Сформулируем *задачу распознавания структуры рукописной таблицы*.
Дано: цветное растровое изображение произвольной нарисованной от руки таблицы, которая может содержать объединённые ячейки, неровные, прерывистые, косые линии. *Требуется* — представить таблицу в виде описания на формальном языке, к примеру на языке html или L^AT_EX.

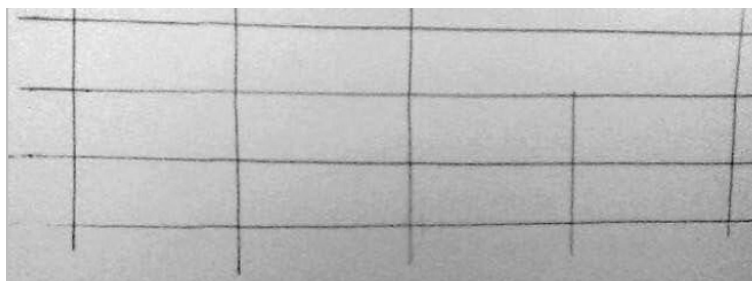


Рис. 1. Пример изображения на входе

Данная задача является задачей структурного распознавания. Рассмотрим некоторые определения данного подхода.

Определение 1. *Подклассом образов понимается некоторая категория, определяемая рядом свойств, общих для всех её элементов [1].*

Определение 2. *Непроизводный элемент — подобраз являющийся составным элементом образа, структурой в непроизводном элементе мы можем пренебречь [1].*

Определение 3. *Операции композиции — всевозможные взаимоотношения между непроизводными элементами, для химической формулы это может*

быть наличие химической связи между группами производных элементов, для математического выражения это могут быть различные операции между производными элементами, например взаимная ориентация производных элементов на плоскости [2].

Определение 4. *Язык описания образа — язык обеспечивающий структурное описание образа в терминах множества производных элементов и операций композиции этих элементов. Как правило является грамматикой, Но в некоторых случаях вместо грамматики в данном блоке могут использоваться графы зависимостей [2].*

В нашем случае производными элементами будут являться разные типы пересечения пар отрезков (Т-образные, Г-образные, Х-образные), операция композиции — наличие связи между соседними производными элементами, в зависимости от их ориентаций и типов пересечения.

ОБЩЕЕ УСТРОЙСТВО СИСТЕМЫ СТРУКТУРНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

Любую систему структурного распознавания образов можно разделить на три основных стадии следующие друг за другом, а именно: стадия предобработки, стадия представления объекта, стадия структурного анализа [1].

Предобработка осуществляет предобработку образа объекта, сюда относятся кодирование и аппроксимация, функции фильтрации и удаления шумов. В случае нашей задачи этот блок занимается переводом цветного изображения в градации серого [3] и последующей адаптивной бинаризацией [3].

Представление объекта занимается сегментацией объекта, поиском производных элементов, обнаружением структуры путём композиции производных элементов, их классификацией в зависимости от образа производного элемента и его положения в структуре в соответствии с заданной грамматикой. В нашей задаче этот блок будет заниматься поиском множества различных отрезков с помощью преобразования Хаффа [3], нахождением пересечений между ними, а также созданием структуры объединения соседние производимые элементы последовательно, учитывая их ориентацию и тип. Таким образом мы получим планарный граф вершинами которого будут точки пересечения, а наличие отрезка между соседними на фото пересечениями будет означать наличие ребра между соответствующими вершинами графа.

Структурный анализ объекта занимается проверкой производных элементов и операций композиции между этими элементами, согласно ранее

заданному языку описания образа. Также этот блок занимается построением ответа системы. Т.е. в случае нашей задачи он будет заниматься обходом построенного ранее планарного графа связей между производными элементами, учитывая горизонтальным или вертикальным является определённый отрезок соединяющий производные элементы на изображении, а также тип производного элемента. Это позволит нам получить с каждой строки и столбца, объединив их в таблицу мы можем описать её на любом формальном языке.

Вывод

Рассмотренный обобщённый подход предлагает вариант декомпозиции задачи структурного распознавания на структуру и неприводимые объекты, в результате чего ранее нерешаемые статистическими подходами задачи могут быть сведены к простым разделённым задачам статистической классификации и поиску структуры. С помощью этого подхода удаётся решить задачу распознавания структуры рукописной таблицы. Подобные задачи сегодня не редкость, и помимо обычного распознавания достаточно абстрактных понятий как то математические выражения, химические формулы и таблицы, подобными способами строят современные системы позволяющие создавать вполне корректные описания объектов на сцене (фото) и связей между ними (Как, например, «Человек сидит в кресле и держит стакан») [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фу К. *Структурные методы в распознавании образов*. – М.: Мир, 1977. –1152 с.
- [2] Новикова Н. М. *Структурное распознавание образов. Учебно-методическое пособие для вузов* — Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008.
- [3] Р. Гонсалес, Р. Вудс. *Цифровая обработка изображений* — М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
- [4] *CaptionBot*. Microsoft. URL: <https://www.captionbot.ai/>

Объектная модель задачи оптимального проектирования

Гребеньков Павел Валерьевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)

e-mail: valerijovich@mail.ru

В работе рассматривается создание и исследование компьютерной модели задачи минимизации массы симметричной трёхстержневой фермы (показано на Рис. 1) из двух материалов при одном случае нагружения, с ограничениями сверху на уровни напряжений в стержнях, и снизу на величины проектных параметров. Исследовано поведение созданной модели при различных вариантах задания используемых материалов. Кроме того, проведено сравнение оптимальных проектов фермы, построенных на базе линейно-упругой модели материалов, а также при учёте реального нелинейного поведения материалов.

Данная работа посвящена исследованию и разработке компьютерной модели для визуализации двумерной задачи оптимального проектирования трёхстержневой фермы. В связи с целью данной работы, были поставлены следующие задачи: - изучить теоретическое описание данной задачи; - программно реализовать данную задачу, создать удобный для пользователя интерфейс и визуально отобразить оптимальные значения конструкции; - протестировать созданную программную модель на разных материалах и сравнить полученные данные для нелинейных и линейных свойств материалов.

Данная работа содержит три раздела. Первый раздел посвящен теоретическим основам для получения представлений о данной задаче. Второй – разработку компьютерной модели и пользовательского интерфейса. В третьем разделе рассматриваются поведения при сравнении линейной и нелинейной моделей материалов.

В теории оптимального проектирования изучаются вопросы наилучшего выбора силовой схемы, формы, свойств материалов и условий работы конструкции, исследуются общие закономерности экстремальных решений и развиваются эффективные методы оптимизации. В результате исследований по оптимальному проектированию выясняются предельные возможности улучшения конструкций, оценивается качество традиционных (неоптимальных) сооружений и выявляются наиболее эффективные способы их совершенствования. Изучением и количественным определением минимумов и максимумов

Выбор функционалов, рассматриваемых при оптимальном проектировании, является частью постановок задач оптимизации. На этот выбор влияют многие обстоятельства: основное назначение конструкции, условия эксплуатации, технологические возможности ее создания, ограничения по стоимости, свойства модели, принимаемой для описания механического поведения конструкции, априорные свойства оптимальной задачи [1]. Далее обсудим некоторые типичные функционалы, наиболее часто рассматриваемые при оптимизации конструкций. Вес - одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений. Вес конструкции характеризует как расход материалов, необходимых для ее создания, так и некоторые ее эксплуатационные свойства. Например, увеличение веса конструкций летательных аппаратов приводит не только к увеличению количества материалов, идущих на изготовление конструкции, но и к большому расходу топлива при полете, ухудшению ряда других летных характеристик [2].

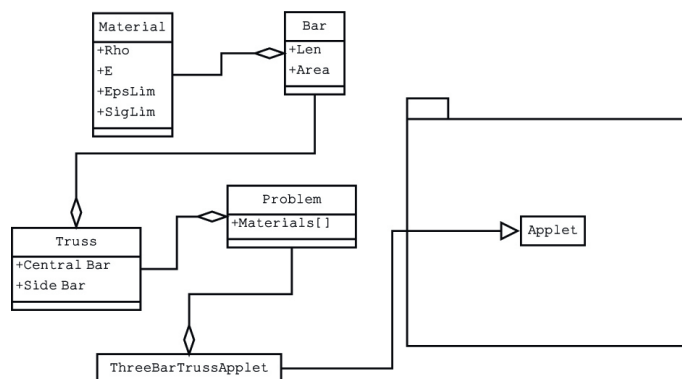


Рис. 3. UML-диаграмма классов объектной модели задачи

Визуально показана задача минимизации массы симметричной трёх-стержневой фермы из двух материалов при ограничениях на максимально допускаемые напряжения и ограничениях на минимально допускаемые значения проектных параметров (область допустимых значений показана на Рис. 2). Проектными параметрами являются площади поперечного сечения стержней. Была реализована и компьютерная модель в виде программного приложения – Java апплета (показано на Рис. 3). Протестированы и исследованы поведения задачи при задании различных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Баничук, Н.В. *Введение в оптимизацию конструкций*. – М.: Наука, 1986. – 302с.
 [2] Ходж, Ф.Г. *Расчет конструкций с учетом пластических деформаций*. – М.: ГНТИ машиностроительной литературы, 1963. – 380с.

Моделирование реалистичных эффектов при соударениях

Дашков Николай Александрович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-и)
 e-mail: NikoDashkov@mail.ru

На сегодняшний день, когда вычислительная мощность компьютеров стала довольно высокой, визуализация различных эффектов при соударениях считается весьма востребованной задачей, поскольку такая реализация применяется повсеместно и является неотъемлемой частью практически любой смоделированной сцены. Все эффекты оказывают большое влияние на реалистичность, и их реализуют в самых разных сферах (разработка компьютерных игр, моделирование спецэффектов, создание анимации). Однако редко когда в приложениях учитывают эффекты, связанные с вращением.

При лобовом центральном соударении центры масс обоих тел двигаются вдоль одной и той же линии. Силы взаимодействия, возникающие при соударении, параллельны направлению движения. Если применить к такой системе двух тел закон сохранения импульса, то полный импульс системы будет равен алгебраической сумме импульсов обоих тел (Рис. 1). При упругом соударении на протяжении кратковременного соприкосновения тела двигаются с общей скоростью, затем они разлетаются и продолжают двигаться с разными скоростями. При этом выполняются законы сохранения импульса и механической энергии [1]:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Эффект Магнуса — физическое явление, возникающее при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа. Образуется сила, действующая на тело и направленная перпендикулярно направлению потока. Это является результатом совместного воздействия таких физических явлений, как

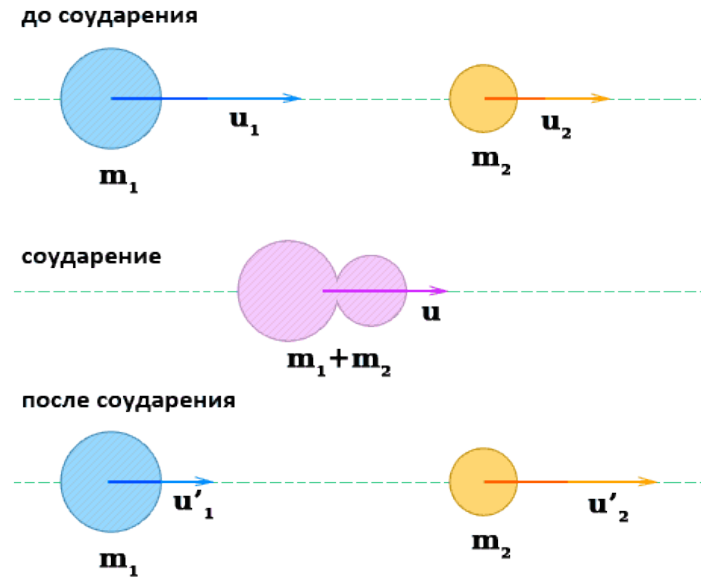


Рис. 1. Упругое соударение

эффект Бернулли и образования пограничного слоя в среде вокруг обтекаемого объекта. Вращающийся объект создаёт в среде вокруг себя вихревое движение. С одной стороны объекта направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока и, соответственно, скорость движения среды с этой стороны увеличивается. С другой стороны объекта направление вихря противоположно направлению движения потока, и скорость движения среды уменьшается. Ввиду этой разности скоростей возникает разность давлений, порождающая поперечную силу от той стороны вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока противоположны, к той стороне, на которой эти направления совпадают. Эффект впервые описан немецким физиком Генрихом Магнусом в 1853 году. Формулы для расчета силы [2]:

- Идеальная жидкость:

$$\vec{R} = -p\vec{\Gamma} \times \vec{u}_\infty$$

- Вязкая жидкость:

$$F = \frac{1}{2}\rho V^2 AC_l$$

При учёте вращения тел следует также учитывать изменение угла отскока при их соударениях со стенками, когда угол падения оказывается не равен углу отражения. Например, мяч со скоростью v_0 подлетает к стене с углом 90° к её поверхности, вращаясь с угловой скоростью вокруг оси параллельной стене. Пусть $N(t)$ — зависимость от времени силы упругой реакции стены. Время будем отсчитывать от момента, когда мяч пришёл в соприкосновение со стеной. Если μ — коэффициент трения скольжения мяча по стене, то в момент времени t составляющая скорости мяча, параллельная стене, определяется формулой [3]

$$v_x(t) = \frac{\mu}{m} \int_0^t N(t) dt,$$

где m — масса мяча. Зависимость от угловой скорости мяча даётся формулой

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu R}{I} \int_0^t N(t) dt,$$

где R — радиус мяча, а I — его момент инерции (мы предполагаем, что удар не очень сильный и деформация мяча мала по сравнению с радиусом). Записанные формулы справедливы только до момента времени t , в которой закончится проскальзывание мяча по поверхности стены, ведь мы воспользовались законом, справедливым только для силы трения скольжения. Интуитивно ясно, что при малых значениях коэффициента трения μ проскальзывание может продолжаться в течение всего времени отскока, а при больших значениях μ проскальзывание может прекратиться, когда мяч ещё прижат к стене. Это значит что в момент времени t , когда проскальзывание прекратилось,

$$v_x(t) = R\omega(t)$$

и мяч начинает просто катиться по стене. Следовательно, с момента времени t , угловая скорость и x -составляющая скорости мяча постоянны. Подставив в последнее равенство выражения для v_x и ω , получим

$$\int_0^t N(t) dt = \frac{\omega_0 R}{\frac{\mu}{m} + \frac{\mu R^2}{I}}.$$

Запишем момент инерции мяча в виде $I = \gamma m R^2$, где $\gamma = 2/5$, если мяч сплошной и однородный, и $\gamma = 2/3$, если мяч — надутая воздухом массивная

оболочка. Тогда

$$\int_0^t N(t)dt = \frac{\omega_0 R}{\mu(\gamma + 1)}.$$

Описанные в данной статье принципы можно использовать при создании компьютерных игр, моделировании отдельных спецэффектов или же, как отдельную анимацию. Программист связанный с компьютерной графикой и работающий, например, с такими программами как 3D Max, Maya или же Cinema 4D studio не обойдется без знаний о моделировании эффектов. В настоящее время разрабатывается приложение с демонстрацией указанных эффектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д.В. Сивухин *Общий курс физики*. – М.: Наука, – 1986.
 [2] https://ru.wikipedia.org/wiki/Эффект_Магнуса
 [3] С. Хорозов *Под каким углом отскочит мяч?*. – Квант. – № 4, 1997 – С. 40–42.

Разработка веб-приложения физического процесса диффузии газа

Деньшаева Ленне Серверовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)
 e-mail: lenie93@mail.ru

Разработка веб-приложения физического процесса диффузии газа методическое пособие для школьников, реализованное на языке JavaScript.

ВВЕДЕНИЕ

Всемирная паутина является готовой платформой для создания и использования распределенных машинно-ориентированных систем на основе веб-сервисов. Веб-сервер выступает в качестве сервера приложений, к которым обращаются не конечные пользователи, а сторонние приложения. Это позволяет многократно использовать функциональные элементы, устранить дублирование кода, упростить решение задач интеграции приложений. Веб-сервис обладает рядом преимуществ по сравнению с «настольными» программами.

В первую очередь веб-сервис не требует установки на компьютер. Для доступа к нему достаточно наличие подключения к Интернет. Все, что нужно - установленный браузер последних версий. База данных, созданная в онлайн-системе, хранится на сервере в специализированном дата-центре. Благодаря резервному копированию она надежно защищена от потерь, а зашифрованный канал передачи данных гарантирует их конфиденциальность и защиту от перехвата. Также не нужно следить за обновлением программы - все происходит автоматически.

1. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС ДИФфуЗИИ

Рассматривается физический процесс взаимной диффузии газов. В начальный момент времени в сосудах находятся частицы разных сортов. Давления и температуры газов одинаковы. Со временем, при тепловом движении частиц, происходит постепенное проникновение частиц в соседние сосуды, в результате чего в каждом из них оказываются частицы обоих сортов. Спустя некоторое время концентрации компонентов смеси станут одинаковыми в обеих половинках сосуда. Такое проникновение молекул одного газа в среду молекул другого газа называется взаимной диффузией. Скорость диффузии сильно зависит от длины свободного пробега молекул. Длина свободного пробега (λ) есть среднее расстояние, пролетаемое частицей между двумя последовательными столкновениями. За секунду молекула в среднем проходит путь, равный ее средней скорости $\langle V \rangle$. Процесс диффузии протекает достаточно медленно, если длина свободного пробега намного меньше размеров сосуда. Для двухкомпонентной системы смеси двух газов с парциальными плотностями стационарная диффузия, происходящая вдоль оси X, описывается первым законом Фика:

$$jM_i = -D \frac{\delta p_i}{\delta x_i} (1)$$

Здесь jM_i – плотность потока массы i -й компоненты, т.е. масса молекул рассматриваемого типа, переносимая через единичную площадку, перпендикулярную к градиенту плотности, в единицу времени. Коэффициент пропорциональности между плотностью потока диффундирующих частиц и градиентом их концентрации называется коэффициентом диффузии D . Коэффициент диффузии для газов определяется формулой:

$$D \cong \frac{1}{3} \langle \nu \rangle \langle \lambda \rangle (2)$$

$\langle v \rangle$ – средняя скорость хаотического движения молекул, $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега.

2. JAVASCRIPT РЕАЛИЗАЦИЯ

Исходный код реализации алгоритма на JavaScript задаётся следующим образом:

```
\for (var i = 0; i < parts.length; i++)\\ проходим по всем частицам
{
for (var j = 0; j < parts.length; j++)\\и ещё раз.
Это частицы с которыми будем проверять пересечение
{
if (i != j)\\убеждаемся что перед нами две разные частицы{
var dist = ddDist(parts[i].x, parts[i].y, parts[j].x, parts[j].y);
if (dist <= parts[i].radius + parts[j].radius)\\если расстояние
между центрами частиц меньше сумме их радиусов- они пересеклись{
var vect = normVect(ddVect(parts[i].x, parts[i].y,
parts[j].x, parts[j].y));
\\получаем нормированный вектор относительно
первой частицы по направлению ко второй
var coi = Math.max(parts[i].radius + parts[j].radius
/ dist, 1)* 0.3;\\коэффициент вхождения. Т.е. чем сильнее
одна частица вошла в другую, тем с большей скоростью её оттолкнём.
parts[i].vx += -vect[0] * coi;\\устанавливаем обратный
столкновению вектор движения.
parts[i].vy += -vect[1] * coi;\\отталкиваем частицу
parts[j].vx += vect[0] * coi;\\ устанавливаем вектор
для обратного (относительн второй частицы) движения
parts[j].vy += vect[1] * coi;\\ тоже отталкиваем в обратную
от места столкновения сторону
if (ddDist(0, 0, parts[i].vx, parts[i].vy) > 1)
{ parts[i].vx *= 0.9; parts[i].vy *= 0.8; }
\\если скорость частицы больше 1, то постепенно замедляем её
В функции calculate()
```


ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализовано веб-приложение физического процесса диффузии газа в интерактивном режиме запуск любом браузере компьютера. Частицы передвигаются, сталкиваются и разлетаются в разные стороны:

- Создан класс частицы.
- Вывод графики
- Расчёт векторов столкновения с учётом радиусов и изменения полёта.
- Передвижение частиц, отскок от стен сосудов и коридор между ними
- Счётчик объектов в сосудах.

Приложение может использоваться в качестве демонстрационного пособия по физике в школах, средних специальных учебных заведениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Савельев И.В. *Курс общей физики. Т.1. М.: «Наука», 1982.* –
 [2] Алекс Маккоу «*Веб-приложения на JavaScript*», 2012.

Оценивание коэффициентов в моделях ARMA

Дергачёв Евгений Иванович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)
 e-mail: evgeniydergachev@mail.ru

Для оценки коэффициентов модели авторегрессии AR(p) (не уменьшая общности, можно считать, что выборочное среднее равно 0, если это не так, надо просто вычесть его из каждого наблюдения)

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

можно применить обычный метод наименьших квадратов (МНК). Если ϵ_t - белый гауссовый шум, то значения X_t распределены нормально, а оценки коэффициентов, произведённые МНК, состоятельны и асимптотически нормальны.

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{t=1}^n (X_t - a_1 X_{t-1} - \dots - a_p X_{t-p})^2 \rightarrow \min$$

Для устранения неопределённости положим, что наблюдения с неположительными индексами равны 0. Воспользовавшись необходимым условием экстремума (приравняв частные производные по a_i к нулю), получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^n (X_t - a_1 X_{t-1} - \dots - a_p X_{t-p}) * X_{t-1} = 0 \\ \sum_{t=1}^n (X_t - a_1 X_{t-1} - \dots - a_p X_{t-p}) * X_{t-2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{t=1}^n (X_t - a_1 X_{t-1} - \dots - a_p X_{t-p}) * X_{t-p} = 0 \end{cases} \quad (0.1)$$

Решив данную систему, получим значения параметров a_i .

Попробуем применить МНК для оценки коэффициентов модели скользящего среднего MA(q)

$$X_t = b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

Снова для устранения неопределённости полагаем, что члены с неположительными индексами равны 0. Тогда

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= X_1 \\ \epsilon_2 &= X_2 - b_1 * \epsilon_1 = X_2 - b_1 * X_1 \\ \epsilon_3 &= X_3 - b_1 * \epsilon_2 - b_2 * \epsilon_1 = X_3 - b_1 * (X_2 - b_1 * X_1) - b_2 * X_1 \\ \epsilon_4 &= X_4 - b_1 * \epsilon_3 - b_2 * \epsilon_2 - b_3 * \epsilon_1 = \\ &= X_4 - b_1 * (X_3 - b_1 * (X_2 - b_1 * X_1) - b_2 * X_1) - b_2 * (X_2 - b_1 * X_1) - b_3 * X_1 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что с каждым шагом степень полинома увеличивается на единицу, а количество слагаемых растёт экспоненциально от выбранного q , что делает данный метод оценки параметров модели неприменимым на практике в силу высокой сложности вычислений.

Для уменьшения вычислительных затрат Бокс и Дженкинс предложили использовать процедуру поиска на сетке. Идея заключается в следующем: если известны значения коэффициентов b_i , то посчитать сумму квадратов отклонений проблемы не составляет. Значит можно перебрать значения коэффициентов и выбрать лучшие в плане минимизации суммы квадратов отклонений.

Для оценки параметров ARMA(p, q) может применяться комбинация метода наименьших квадратов с поиском на сетке.

Введём оператор сдвига L:

$$LX_t = X_{t-1}$$

Тогда модель ARMA(p, q) можно записать в следующем виде:

$$(1 - a_1L - \dots - a_pL^p)X_t = (1 + b_1L + \dots + b_qL^q)\epsilon_t$$

или

$$X_t = \frac{(1 + b_1L + \dots + b_qL^q)\epsilon_t}{1 - a_1L - \dots - a_pL^p}$$

Введём вспомогательный случайный процесс:

$$Z_t = \frac{\epsilon_t}{1 - a_1L - \dots - a_pL^p}$$

Тогда

$$X_t = (1 + b_1L + \dots + b_qL^q)Z_t$$

Выразим отсюда Z_t , полагая члены с неположительными индексами равными нулю.

$$Z_1 = X_1$$

$$Z_2 = X_2 - b_1Z_1$$

$$Z_3 = X_3 - b_1Z_2 - b_2Z_1$$

.....

Найдём значения параметров b_i с помощью процедуры поиска на сетке.

$$Z_t = a_1Z_{t-1} + a_2Z_{t-2} + \dots + a_pZ_{t-p} + \epsilon_t$$

Относительно процесса Z_t модель стала авторегрессионной, и параметры a_i можно оценить с помощью МНК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Канторович Г.Г. *Экономический журнал Высшей школы экономики. Том 6, №2.* – Москва, – 2002.

Многомерное шкалирование

Иванов Олег Олегович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)
e-mail: goodbye1993@mail.ru

1.1. Основные идеи многомерного шкалирования.

В случаях, когда исследуемое явление не поддается непосредственному описанию и моделированию, используют методы многомерного шкалирования (Multidimensional Scaling). Суть этих методов состоит в воссоздании некоторого теоретического пространства и отображении в нем реальных объектов. За основу берутся не значения признаков объектов, а данные об их сходстве или различии. Источником данных могут быть сведения о самих объектах, но чаще – субъективные мнения экспертов. Цель анализа данных в многомерном шкалировании – определение местонахождения объектов в пространстве восприятия, построенном по субъективным оценкам. Латентные факторы, определяющие это пространство, позволяют указать координаты объектов по шкалам (осям) и измерить расстояния между ними. Примерами пространств восприятия могут служить: пространство двух шкал «капиталоемкость» – «трудоемкость» с расположенными в нем предприятиями разных отраслей, которое позволяет судить об их состоянии; пространство шкал «экономичность» – «качество» в маркетинговых исследованиях; пространство шкал «профессионализм» – «контактность» в психологическом исследовании восприятия личности и другие.

Широкий круг приложений многомерное шкалирование находит в психологии и педагогике, в социологии, политологии и других сферах деятельности, где возникают задачи исследования мнений, настроений, взаимодействий, конфликтов и других ситуаций с невыраженными количественными оценками. Размерность пространства восприятия обычно не превышает трех, чтобы сделать возможной визуализацию. Шкалы пространств определяются как оси значений латентных переменных, и в этом используются методы факторного анализа, с учетом важного отличия. В факторном анализе мера сходства выражается корреляционной матрицей, а в многомерном шкалировании используется произвольный тип матрицы сходства объектов. Очень важной особенностью многомерного шкалирования является то, что независимо от типа решаемой задачи, его можно использовать как инструмент наглядного представления исходных данных. В рамках теории многомерного шкалирования

развиваются два основных направления: метрическое, основанное на использовании количественных латентных факторов, и неметрическое, предназначенное для обработки ранговых данных. Пример: При решении задач прокладки маршрута используется матрица расстояний для каждой пары пунктов. Если изначально не дана географическая карта размещения пунктов, то на основе матрицы расстояний может быть воссоздана схема размещения пунктов. Таким образом, будет воссоздано двумерное пространство восприятия. В результате применения алгоритма многомерного шкалирования воссоздано пространство восприятия (рис.1.)

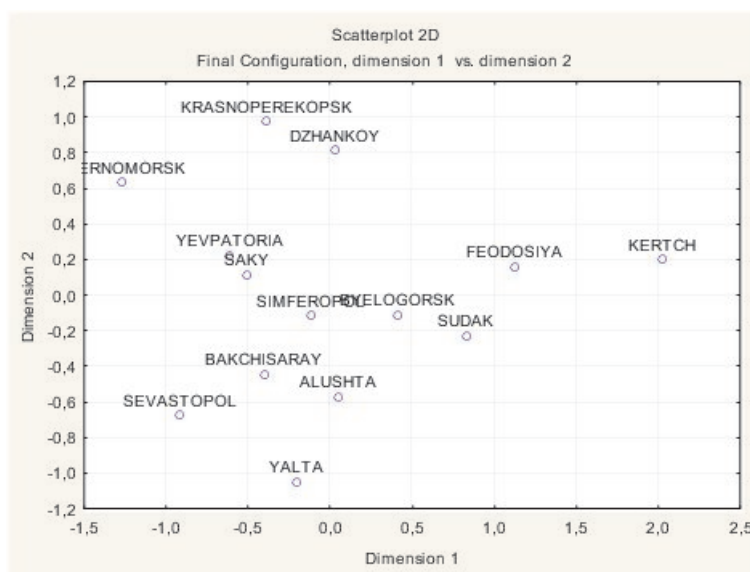


Рис. 1. Расположение объектов в воспроизведенном пространстве.

1.2. Многомерное шкалирование и другие методы анализа

Рассмотрим задачи и методы многомерного шкалирования в сравнении с кластерным анализом. Сходство этих методов состоит в применении их для исследования структуры объектов, поскольку они опираются на данные о близости и используют дистанционные модели. В результате применения обоих методов можно получить группировки объектов. Различие состоит, прежде всего, в выражении связи между данными о близости и расстояниями. В кластерном анализе на основе данных «объект-признак» формируется матрица расстояний, как правило, обладающих свойствами метрики. В многомерном

шкалировании исходные данные вида «объект-объект» с помощью линейных или монотонных функций преобразуются в расстояния. Результаты кластерных решений, полученных методами объединения, представляются в виде иерархического дерева, которое может быть преобразовано в координатное пространство, но с большим числом дихотомических осей. В дивизимных кластерных методах группы объектов отображаются списками членов кластеров, и потому в обоих случаях наглядное представление кластерной структуры возможно только для небольших размерностей (небольшого числа признаков). Кроме того, кластерные решения не дают координатного представления объектов. В методах многомерного шкалирования решение уже ориентировано на небольшое число координатных осей пространства восприятия и представляет собой удобный способ сжатия данных. На практике кластер-анализ и многомерное шкалирование рассматриваются как дополняющие друг друга методы. Многомерное шкалирование ближе к факторному анализу, несмотря на различное исходное представление данных. Большинство методов факторного анализа использует меры близости пар объектов, выраженные корреляционной матрицей. Как и многомерное шкалирование, факторный анализ позволяет получить количественное координатное представление структуры взаимосвязей между объектами. Но при этом факторное решение дает еще и оценки значений факторов. Поэтому эти методы часто применяются для анализа одних и тех же проблем, но выводы могут различаться, так как многомерное шкалирование может использовать не только оценки близости, но и меры различия профилей или условные вероятности, в отличие от только корреляционных матриц факторного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Многомерный статистический анализ в экономике* / Л.А.Сошникова, В.Н.Тамашевич, Г.Уебе, М.Шефер. – / 401-445 с.
- [2] *Многомерное шкалирование* . – / Л.И.Руденко

Разработка Android приложения для контроля знаний учащихся

Каплин Виктор Юрьевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)
e-mail: buteksky@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена разработке приложения на базе OS Android для контроля знаний учащихся. Для создания данного приложения необходимо решить следующие задачи:

- построение алгоритмической модели приложения;
- разработка удобного пользовательского интерфейса;
- отладка и тестирование программы — тестирование работы программы и исправление обнаруженных при этом ошибок;

В качестве базы данных, как чаще всего и происходит в Android устройствах, используется база данных типа SQLite с таблицами и запросами. База данных может реализовываться как локально (непосредственно на устройстве), так и удаленно (на сервере) и взаимодействие происходит по принципу клиент – сервер [1-3].

Данные локальной базы данных (файлы данных) находятся на одном (локальном) устройстве. Для обеспечения разделения данных (доступа к данным) между несколькими пользователями, в качестве которых выступают программы, работающие на одном или нескольких устройствах, в локальных базах данных применяется метод, получивший название блокировка файлов.

Программа работы с удаленной базой данных состоит из двух частей: клиентской и серверной. Клиентская часть программы, работающая на устройстве пользователя, обеспечивает взаимодействие с серверной программой: посредством запросов, передаваемых на удаленный компьютер, предоставляет доступ к данным.

Серверная часть программы, работающая на удаленном компьютере, принимает запросы, выполняет их и пересылает данные клиентской программе. Запросы представляют собой команды, представленные на языке SQL.

В задаче контроля знаний важна структура хранения данных в SQL Server [2].

SQL Server организует следующую иерархию хранения: база данных, файл, страница, блоки.

В SQL существуют уже 7 типов страниц: страница данных (Data page), индексные страницы (Index page), страницы журнала транзакций (Log page), текстовые страницы (Text/image page), карты распределения блоков (Global allocation map page), карты свободного пространства (Page free space page), индексные карты размещения (Index allocation map page).

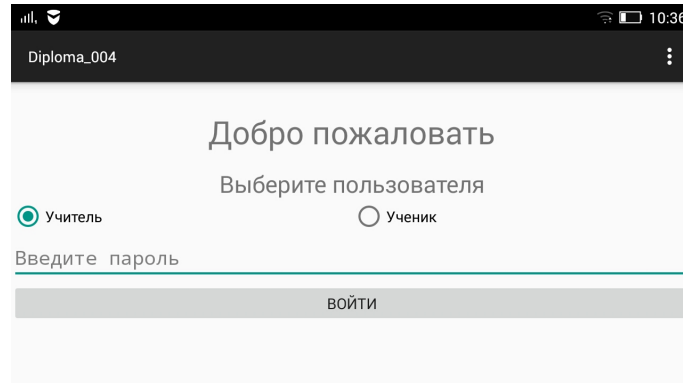


Рис. 1. Activity авторизации

В приложении использована серверная база данных с различными правами доступа: преподаватель и студент (см. Рис. 1).

При запросе с устройства клиента на сервере обрабатываются права доступа и предоставляются данные соответственно запросов.

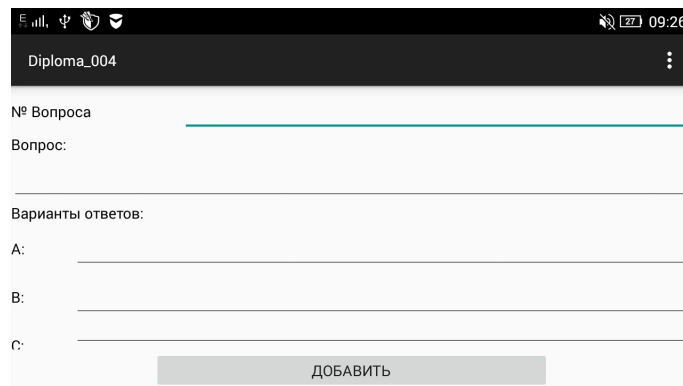


Рис. 2. Activity добавления вопросов

Преподаватель имеет полный доступ к добавлению, удалению, редактированию тем и вопросов, а также, просмотру и редактированию результатов тестирования.

Добавление вопросов проходит с устройства преподавателя. Преподаватель выбирает или создает тему. После выбора темы открывается активити, где вводятся все компоненты вопроса: № вопроса, вопрос, варианты ответа, правильный вариант (Рис. 2). Когда все данные заполнены и преподаватель нажимает кнопку «Добавить», вопрос отправляется в удаленную базу данных SQL, которая хранится на бесплатном хостинге. Студент в свою очередь, заходит со своего устройства и имеет ограниченные права доступа. Он имеет возможность просмотра базы данных с вопросами/заданиями и добавлением в базу данных результатов своего результата, непосредственно после каждого нажатия кнопки «Ответить», на случай, если соединение с сервером было разорвано, студент мог продолжить тестирование с того вопроса, на котором остановился (Рис. 3). После окончания тестирования доступ к текущей таблице результатов закрывается, без возможности просмотра или редактирования. Результаты полученные в ходе выполнения тестирований, так же как и вопро-

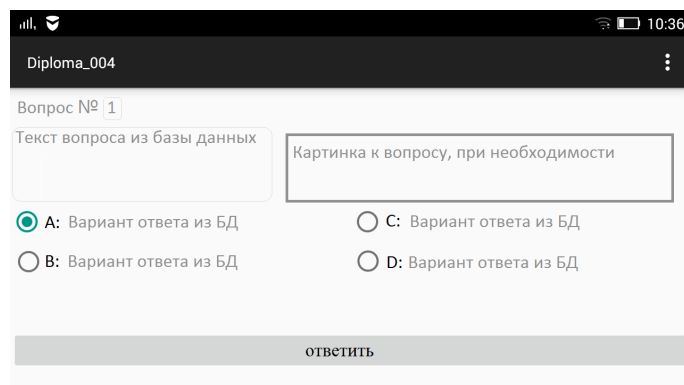


Рис. 3. Activity задания с 1 правильным ответом

сы, хранятся в отдельной базе данных на удаленном хостинге, в формате .txt, к которым студенты не имеют доступа. Это исключает возможность узнать заранее ответы, или изменить готовые результаты.

Результаты тестов первого и второго уровней предоставляются преподавателю уже проверенными на правильность/неправильность и с предварительной оценкой компетентности, заранее заданной преподавателем в ходе добавления вопросов в базу данных, а результат полученный в ходе выполнения третьего уровня тестирования предоставляются преподавателю для проверки.

После прохождения авторизации как «Преподаватель», приложение автоматически проверяет версию удаленной базы данных на появление новых результатов, и если таковые имеются, автоматически загружает их на устройство преподавателя, оповещая его об этом.

Со своего устройства, после просмотра результатов, у преподавателя есть права на их удаление. Однако, удаление происходит только из локальной базы данных, на сервере же, результаты хранятся еще длительное время, откуда, при необходимости, можно заново загрузить нужные нам результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Полякова Л.Н. *Основы SQL*. – Интернет-университет информационных технологий, 2004г. – 368 с.
- [2] Ожегов Денис *Введение в SQLite*. – Ресурс доступен из <http://phpclub.ru/detail/article/sqlightintro.html>
- [3] *Типы данных в SQLite версии 3..* – Перевод с английского: vanilinkin, специально для xBB.uz. Оригинальный ресурс доступен по <http://www.sqlite.org/datatype3.html>

Обзор подходов, использующихся при построении рекомендательных систем

Кутайсов Дмитрий Вадимович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)

e-mail: dmitry.light@gmail.com

В работе рассматриваются рекомендательные системы и использующиеся при их построении подходы.

Рекомендательные системы - это программы и технологии, которые формируют рекомендации независимо для каждого конкретного пользователя на основе его прошлых покупок и поисков, а также на основе поведения других пользователей.

Рекомендательные системы заработали популярность в Интернете, помогая пользователям справляться с огромным количеством информации, и

стали одним из самых распространенных инструментов в электронной коммерции. Сегодня большинство крупных коммерческих веб-сайтов рекомендует своим пользователям различные предложения, например, товары или людей, которые могут представлять интерес. Рекомендательные механизмы сортируют огромные объемы данных для выявления потенциальных предпочтений пользователей [1].

Известные компании, веб-сайты и сервисы, использующие рекомендательные системы [2, 3]:

- *Amazon, eBay, Ozon* — крупные коммерческие интернет-сервисы. Они рекомендуют книги, фильмы, товары, основываясь на том, что покупал, просматривал, оценивал и какие оставлял отзывы пользователь;
- *Last.fm, Pandora, Spotify, Яндекс.Музыка* — рекомендации музыкальных композиций. *Last.fm* использует данные о музыке — автор, стиль, дата, тэги и т. п. *Pandora* основывается на «содержании» музыкальной композиции, используя проект «Music Genome Project», в котором профессиональные музыканты анализируют композицию по нескольким сотням атрибутов;
- *Google, Yahoo!, Яндекс* — рекомендуют пользователям веб-сайты. Поискники пытаются предсказать, насколько документ отвечает данному запросу;
- *SurfingBird* - российская рекомендательная поисковая система;
- Социальные сети (*Facebook, ВКонтакте, Одноклассники*) — рекомендации друзей.

Также простейшими примерами рекомендательных «систем», используемых повсеместно, являются статьи экспертов, рейтинги популярных продуктов, хит-парады и т. д. Но в дальнейшем будем рассматривать только подходы, вырабатывающие индивидуальные рекомендации для пользователя.

В большинстве рекомендательных систем применяется один из двух базовых подходов: коллаборативная фильтрация (collaborative filtering) и контентная фильтрация (content-based filtering). Гибридные подходы совмещают обе эти концепции [3].

Контентная фильтрация составляет рекомендации на основе поведения пользователя в прошлом. Например, этот подход может использовать информацию о просмотрах (какие блоги читает пользователь и характеристики этих блогов). Если пользователь обычно читает статьи на определенную тему или оставляет комментарии и отзывы, то контентная фильтрация может использовать эту ретроспективную информацию для выявления подобного контента

и предлагать похожий контент в качестве рекомендованного для этого пользователя. Этот контент может быть определен в ручном режиме или извлечен автоматически.

Коллаборативная фильтрация считается самой популярной и широко используемой концепцией, применяемой в рекомендательных системах. Коллаборативная фильтрация — это процесс отфильтровывания информации, в котором принимают участие несколько агентов, пользователей, участников. В узком смысле в рекомендательных системах так называют подход, при котором система предлагает пользователю продукты, которые понравились другим пользователям с похожими вкусами. Сходство вкусов двух пользователей вычисляется из сходства поставленных ими рейтингов или оценок в прошлом.

Пусть задано множество пользователей и множество продуктов, и некоторые пользователи как-то оценили некоторые продукты. Данные состоят из троек вида $(u, i, r_{u,i})$, где i обозначает продукт, u — пользователя, а $r_{u,i}$ — рейтинг, который пользователь u поставил продукту i .

Представим эти данные как матрицу, каждый столбец которой соответствует пользователю, а строка — продукту. Необходимо предсказать неизвестные элементы матрицы, а именно — какие из неизвестных элементов будут максимальными в своём столбце, то есть какие продукты больше всего понравятся тому или иному пользователю [2].

фильм/пользователь	Анна	Сергей	Елена	Николай
Любовь до конца	5	5	0	0
Романтическое путешествие	5	?	?	0
Милые щенки	?	5	0	?
Автомобильные погони	0	0	3	5
Боевые искусства	0	0	3	?

Пример таблицы рейтингов фильмов

Формальная постановка задачи коллаборативной фильтрации.

Будем использовать следующие обозначения [4]:

- U — множество пользователей (субъектов);
- I — множество продуктов (объектов);
- Y — пространство описаний транзакций;
- $D = (u_t, i_t, y_t)_{t=1}^m \in U \times I \times Y$ — транзакционные данные;
- $\|r_{ui}\|$ — матрица кросс-табуляции размера $|U| \times |I|$, где $r_{ui} = \text{aggr}\{(u_t, i_t, y_t) \in D \mid u_t = u, i_t = i\}$;

Пусть задано множество пользователей U , множество продуктов I . Задачи: спрогнозировать значения незаполненных ячеек r_{ui} ; оценить сходство $p(u, u')$, $p(i, i')$, $p(u, i)$; построить список рекомендаций для u и для i .

Среди проблем коллаборативной фильтрации можно выделить разреженность данных и проблему холодного старта. Реальные коммерческие рекомендательные системы должны работать с огромным массивом данных, а пользователи могут поставить оценки лишь небольшому количеству продуктов. Тогда матрица пользователей-продуктов будет сильно разрежена, а качество рекомендаций снизится. В связи с этим возникает также проблема холодного старта: неясно, что рекомендовать новому пользователю в системе и кому рекомендовать новый товар. Для решения этих проблем были предложены разные подходы, в частности, снижение размерности матрицы субъектов-объектов (SVD, PCA), гибридные алгоритмы (content-boosted CF) и другие [3].

Таким образом, рекомендательные системы используются в большинстве коммерческих веб-сайтов, приложений и сервисов. Рассмотренные подходы являются самыми распространенными и успешными, они достаточно просты для понимания. На основе коллаборативной фильтрации и алгоритма факторизации низкоранговой матрицы планируется создать рекомендательную систему, прогнозирующую оценки фильмов и формирующую список предложений для конкретного пользователя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ricci F., Rokach L., Shapira B., Kantor P.B. *Recommender Systems Handbook*. – Springer, – 2011.
- [2] Николенко С. *Рекомендательные системы: постановка задачи*. – 2012 – <http://habrahabr.ru/company/surfingbird/blog/139022/>
- [3] Su X., Khoshgoftaar T.M. *A Survey of Collaborative Filtering Techniques*. – Advances in Artificial Intelligence – 2009.
- [4] Воронцов К.В. *Курс лекций по машинному обучению. Коллаборативная фильтрация*. – 2011 – <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/9/95/Voron-ML-CF.pdf>

Сравнительный анализ алгоритмов нахождения максимального разреза

Куценко Владимир Владимирович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602)
e-mail: rabbit.abys.kv@gmail.com

Задача о максимальном разрезе (MAX-CUT) формулируется следующим образом. Для неориентированного графа $G = \langle V, E \rangle$ необходимо найти такие подмножества $R \subset V$ и $B = V/R$, чтобы число ребер между R и B было максимально [1]. В работе исследуются алгоритмы приближенного решения задачи о максимальном разрезе (MAX-CUT) для ориентированных и не ориентированных графов. Так как задача максимального разреза является NP -полной, то для больших размерностей используются только приближенные методы решения [2]. В работе приводится сравнительный анализ эвристических алгоритмов и их комбинаций с переборными. Эвристика – это любая процедура, которая находит допустимое решение $\tilde{x} \in \{0, 1\}$.

Постановка задачи звучит следующим образом. Дан неориентированный взвешенный граф G с n вершинами и m ребрами. Разрезом C называется некоторое подмножество вершин. Весом разреза называется сумма весов ребер, проходящих через разрез

$$\omega(C) = \sum_{(i,j) \in E, j \in C, i \notin C} c(i, j),$$

где через E обозначено множество всех ребер графа G , а через $c(i, j)$ – вес ребра (i, j) . Требуется найти разрез максимального веса.

Для большинства эвристик можно только надеяться, что полученное решение будет близким к оптимальному [3]. Алгоритмы рассматриваются на графах размерностью от 10 до 200 с шагом 10, по 20 графов каждой размерности. Взвешенная матрица расстояний для них генерируется случайным образом.

В вычислениях используется эвристический метод поиска в глубину Карорис Кирупсис Ставропулос или (KSS), а из методов локального поиска используются табу-поиск, жадный алгоритм, узловой жадный алгоритм и узловой жадный алгоритм с учетом предыдущего шага. Используются эвристические алгоритмы, основанные на методе глобального равновесного поиска (GES) и GES+Tabu [2]. Такие алгоритмы, исходя из некоторого начального

решения, на каждом шаге поиска заменяют решение на другое, лучшее, найденное в окрестности текущего. Отличительной особенностью табу-поиска является то, что в памяти хранятся найденные решения и список табу, который используется для предупреждения заикливания в локальном минимуме. Алгоритм завершает работу после фиксированного числа итераций либо, если в течение нескольких шагов наилучшее решение осталось неизменным [3].

Сравнивается работа эволюционных алгоритмов. Генетический алгоритм (ГА), алгоритм связывающих путей (PR) и некоторые эвристики ГА: ГА+Табу-поиск, ГА+Жадный, ГА+Ядра. Эволюционные алгоритмы применяются во многих приложениях. Они являются итеративными. В ГА популяции изначально генерируются случайно, каждая особь популяции считается предполагаемым решением. Используя функцию оценки, устанавливается пригодность особи в качестве решения [3].

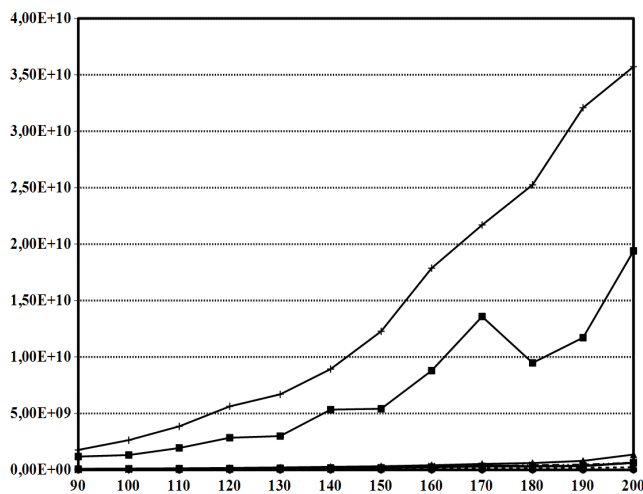


Рис. 1. График среднего времени работы алгоритмов (без GES+Tabu)

На рисунках 1 и 2 построены графики среднего времени работы алгоритмов. Для их построения по оси OX берутся размерности графов, а по оси OY устанавливается время в наносекундах. На рис. 1 для большей наглядности уже исключен алгоритм GES+Tabu, дающий наибольший временной рост.

В таблице 1 представлены полученные результаты работы алгоритмов на случайных графах. Данные в таблице упорядочены в порядке убывания времени работы.

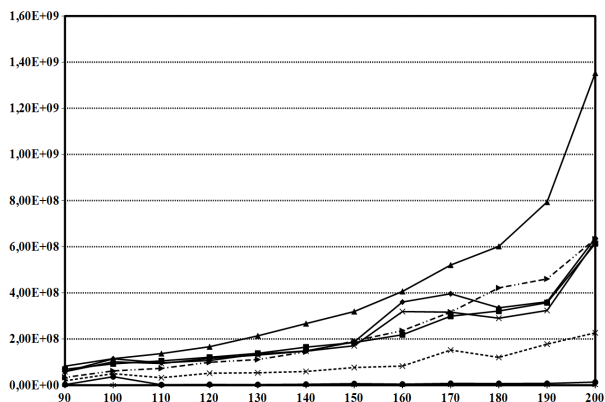


Рис. 2. График среднего времени работы алгоритмов (без GES и PR):

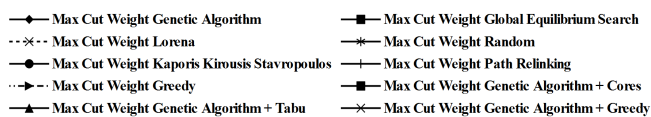


ТАБЛИЦА 1. Время работы и отклонение.

	Время (с.)	Отклонение
GES + Tabu	2465,4104702	6090
Path Relinking	35,7197465	6937
GES	19,3973433	15685
GA + Tabu	1,3527289	5390
GA	0,6371963	0
Greedy	0,6335497	7570
GA + Greedy	0,6233704	2506
GA + Cores	0,6135553	513419
Lorena	0,2267480	22033
KKS	0,0132480	19850
Node Greedy Mod	0,0021864	23612
Node Greedy	0,0021549	20155
Random	0,0000068	28364

Проведен сравнительный анализ по времени работы и отклонению эвристических алгоритмов для решения задачи MAX-CUT на случайных графах.

Полученные результаты являются предварительными для выбора алгоритмов с последующим их использованием в решении задачи MAX-CUT для графов больших размерностей и определения устойчивости (задача реоптимизации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Козлова М.Г. *Приближенное решение задачи о максимальном разрезе и ее применение* / Козлова М.Г., Германчук М.С., Куртнебиев Э.Д. // Информатика та системні науки (ІСН-2013): IV Всеукраїнська науково-практична конференція: мат. конф. – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 150-153.
- [2] Шило В.П., Шило О.В., Роцин В.А. *Метод глобального равновесного поиска решения задачи о максимальном взвешенном разрезе графа* / Кибернетика и системный анализ. – 2012. – Т.48, №4. – С. 101-105.
- [3] Щербина О.А. *Метаевристическіе алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор)* / ТВИМ. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2014. – №1. – С. 56-73.

Распознавание дорожных знаков на изображении

Лисовицкий Денис Владимирович

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского

Таврическая академия

факультет математики и информатики

кафедра информатики (группа 602)

e-mail: LisDenisimus@gmail.com

Введение

Одной из основных причин дорожно-транспортных происшествий с тяжёлыми последствиями является превышение скорости. Система распознавания дорожных знаков призвана предупреждать водителей о необходимости соблюдения скоростного режима. Данная система определяет дорожные знаки и напоминает водителю о необходимости соблюдения тех или иных правил дорожного движения.

Задача распознавания дорожных знаков упрощается тем, что они имеют несколько отличительных признаков, которые могут быть использованы для их обнаружения и идентификации, например все они разработаны в определенных цветах и формах, с текстом или символом, которые контрастируют с фоном. В связи с тем, что дорожные знаки обычно повернуты лицевой стороной, сумма вращательных и геометрических искажений при распознавании будет ограничена.

Такая информация о дорожных знаках как форма и цвет также может использоваться, чтобы классифицировать их. Однако, есть несколько факторов, которые могут препятствовать эффективному обнаружению и распознаванию. Этими факторами могут быть изменения в освещенности (включая такие изменения как: сумерки, туман, затенение), преграды перед знаком, размытое изображение и плохие погодные условия. Следует отметить, что в некоторых местах дорожные участки содержат много сложных геометрических форм (включая здания, вывески, билборды и т.д.), которые могут быть неправильно классифицированы как дорожные знаки.

Рассматриваемый Джеком Гринхальдом метод «Real-Time Detection and Recognition of Road Traffic Signs» [1] состоит из следующих двух этапов:

- 1) обнаружение дорожных знаков выполняется с помощью алгоритма MSERs (Maximally Stable Extremal Regions) [2];
- 2) распознавание выполняется с помощью HOG (Histogram of oriented gradients), а классификация методом SVM (Support vector machine).

Другой немаловажный аспект — использование своей базы дорожных знаков. Следует отметить, что для классификатора важно быть обученным на всех возможных выборках знаков, избегая неправильной классификации со схожими объектами на изображении. Для наиболее точного распознавания используются большие учебные выборки, которые генерируются с применением случайных искажений к исходным изображениям: геометрические искажения, размывание, изменения освещения. Это необходимо для того чтобы захватить наибольшее количество всевозможных случаев искажений реального изображения.

Обнаружение дорожных знаков

Для обнаружения дорожных знаков с белым фоном, MSERs может использовать шкалу яркости. Каждое изображение бинаризуется на многих различных пороговых уровнях, и на каждом из них выделяются связанные компоненты. Те связанные компоненты, которые не изменяют свою форму на протяжении нескольких пороговых уровней, отбираются MSERs в качестве кандидатов. Несколько особенностей обнаруженных связанных компонентов используются, чтобы в дальнейшем сократить количество кандидатов. Этими особенностями могут являться ширина, высота, формат изображения, периметр области и площадь, периметр ограничивающего прямоугольника и его площадь. Удаление связанных компонентов, которые не соответствуют требованиям, помогает ускорить процесс и улучшить точность. Далее для обнаружения дорожных знаков с красным или синим фоном, воспользуемся другим

методом. Вместо использования шкалы яркости в MSERs сначала преобразовываем «red–green–blue» в «нормализованное red/blue» изображение таким образом, что для каждого пикселя оригинала новое значение будет найдено как отношение синего цвета к сумме всех других, и новое отношение красного цвета к сумме всех других. Большее из этих двух значений используется в качестве пиксельного значения нормализованного red/blue изображения. Далее находим кандидатов MSERs для этого нового изображения. Хотя MSER предлагает надежную форму обнаружения для знаков в сложных сценах, это может быть в вычислительном отношении затратно. Поэтому, чтобы увеличить скорость, возможно использовать пороговые значения только в некоторых диапазонах, а не во всех возможных промежутках.

Классификация дорожных знаков

Стадия распознавания используется, для подтверждения того, что выделенная область является дорожным знаком и классификации точного типа знака. Для классификации областей кандидата воспользуемся алгоритмом Histogram of oriented gradients (HOG) [3]. Основной идеей алгоритма является допущение, что внешний вид и форма объекта на участке изображения могут быть описаны распределением градиентов интенсивности или направлением краев. Реализация этих дескрипторов может быть произведена путем деления изображения на маленькие связные области, именуемые ячейками, и расчета для каждой ячейки гистограммы направлений градиентов или направлений краев для пикселей, находящихся внутри ячейки. Комбинация этих гистограмм и является дескриптором (служебная структура в памяти, которая определяет сегмент, длина дескриптора равна 8 байт). Для увеличения точности локальные гистограммы подвергаются нормализации по контрасту. С этой целью вычисляется мера интенсивности на большем фрагменте изображения, который называется блоком, и полученное значение используется для нормализации. Нормализованные дескрипторы обладают лучшей инвариантностью по отношению к освещению.

Дескриптор HOG имеет несколько преимуществ над другими дескрипторами. Поскольку HOG работает локально, метод поддерживает инвариантность геометрических и фотометрических преобразований, за исключением ориентации объекта. Подобные изменения появятся только в больших фрагментах изображения.

Конечным шагом в распознавании объектов с использованием HOG является классификация дескрипторов при помощи системы обучения с учителем [4]. Прежде чем классификатор начнет работать его необходимо обучить

на множестве специально подобранных учебных примеров, которое было сгенерировано нами и состоящее из двух частей: положительные (условно) примеры и отрицательные примеры. В данном случае применим подход «обучение с учителем» то есть каждый учебный пример представляет собой пару «учебный вход, правильный ответ». Применяется алгоритм обучения SVM [4], подстраиваясь под обучающий набор. После обучения классификатор способен классифицировать объекты (дорожные знаки) на различных изображениях.

Заключение

Была рассмотрена система обнаружения и распознавания дорожных знаков. Для обнаружения областей на изображениях был использован метод MSERs, который нечувствителен к изменениям в освещении и к условиям освещения. Транспортные символы распознавались с помощью функции HOG и алгоритма классификации SVM. Данная система может определять знаки из целого диапазона идеографических транспортных символов, использующихся в настоящее время, которые формируются на основании сгенерированной выборки обучения. Система сохраняет высокую точность даже в случаях с неблагоприятными внешними факторами, мешающими распознаванию, например, туман, дождь, частичное скрытие дорожного знака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Jack Greenhalgh and Majid Mirmehdi, "IEEE TRANSACTIONS ON INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS, VOL. 13, NO. 4, DECEMBER 2012" pp.1498–1506..*
- [2] *J. Matas, "Robust wide-baseline stereo from maximally stable extremal regions," Image Vis. Comput., vol. 22, no. 10, pp. 761–767, Sep. 2004..*
- [3] *N. Dalal and B. Triggs, "Histograms of oriented gradients for human detection," in Proc. CVPR, 2005, pp. 886–893. .*
- [4] *C. Cortes and V. Vapnik, "Support vector networks," J. Mach. Learn., vol. 20, no. 3, pp. 273–297, Sep. 1995 .*

Современные подходы к реализации физической модели освещения в 3D-пространстве

Максимов Никита Константинович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)

e-mail: gfresq55@ya.ru

Статья даёт краткое представление о современных подходах к имитации освещения в трёхмерном пространстве. Также представлены примеры использования в различных сферах компьютерной графики.

ВВЕДЕНИЕ

Освещение в компьютерной графике определяется как симуляция физики света. Эта симуляция может быть как невероятно точной с отслеживанием потоков световой энергии, взаимодействующей с материалами, просчитывая отражения всех лучей света, так и быть просто базированной на определённых физических законах распространения света как в случае с нефотореалистичным рендерингом, который вдохновлён различными художественными стилями и позволяет производить визуализацию объектов для технических иллюстраций, анимационных фильмов, игр (cel-shading). В обоих случаях для описания реакции поверхности на свет используется определённая модель освещения, которая позволяет добиться нужного визуального результата.

1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ ОПИСАНИЯ СВЕТА

Взаимодействие света и поверхности — это сложный физический процесс. Когда луч света, обладающий определённой частотой, сталкивается с объектом может случиться несколько событий. Были разработаны математические модели, описывающие и аппроксимирующие это взаимодействие, и рассчитывающие что случается при попадании света на поверхность и при отражении от нее. Перечислим возможные события[1]:

1. *Поглощение.* Световая волна может быть поглощена объектом, конвертируя поступающую энергию в тепло.

2. *Отражение.* Световая волна может отразиться от поверхности в некотором направлении.

3. *Преломление.* Часть волны и энергии может быть пропущена через поверхность, которая при этом немного изменяет её направление (жидкости).

4. *Подповерхностное рассеивание.* Свет проникает под поверхность полупрозрачного объекта и рассеивается, взаимодействуя с материалом, а затем выходит, создавая эффект внутреннего свечения объекта.

5. *Полное внутреннее отражение.* Свет попадает на границу, отделяющую среды с различными индексами преломления под определённым углом, полностью отражаясь назад в среду (свет в оптическом кабеле).

Различные поверхности и материалы можно разделить на несколько классов в зависимости от их взаимодействия с входящим световым лучом:

1. *Диффузные материалы* — материалы, отражающие луч равномерно во множество направлений из-за неровностей поверхности (например, камень). Диффузное отражение можно рассмотреть как особый случай подповерхностного рассеивания в материале; тот, где свет входит и выходит в той же точке из-за очень маленького внутреннего рассеивания.

2. *Бликовые материалы*, которые преимущественно производят бликовое отражение, что обозначает свет, отражаемый поверхностью преимущественно в направлении вектора отражения по отношению к нормали поверхности (множество глянцевых поверхностей).

3. *Материалы, обладающие двумя типами отражения*, т.е. материалы, приблизительно в равной степени отражающие свет и диффузно, и зеркально (фольга, пластик).

В основе каждой модели лежит математическая функция, называемая BRDF, описывающая принципы взаимодействия света при контакте с поверхностью. *Bidirectional reflectance distribution function* (BRDF) — двулучевая функция отражательной способности (поверхностных отражений) описывает как свет отражается или поглощается поверхностью в зависимости от разных углов падения и свойств материала.

Модель освещения — определённая функция, используемая для определения цвета и яркости, которой должен обладать пиксель в зависимости от условий освещения и свойств поверхности объекта. Она описывает процесс передачи энергии и зависимость количества покидающей поверхность энергии от количества входящей. Модели освещения можно разделить на физически обоснованные и эмпирические.

2. ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОСВЕЩЕНИЯ

Такие модели имеют комплект параметров, которые не основаны на физических законах, но позволяющие с помощью подстройки получить правдоподобный нужный вид конечной модели. Бывает такие модели дают более качественный результат за счет большего контроля за субъективным внешним

видом, чем за точностью. Включает модель Ламберта (только диффузный цвет), Фонга (модель представляет собой комбинацию диффузной составляющей (модели Ламберта) и зеркальной составляющей), Блинна-Фонга и другие.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОСВЕЩЕНИЯ

Физически обоснованные модели базируются на настоящих законах физики света и пытаются взять в расчёт физические свойства некоторого реального материала. Такие модели обязательно включают близкую к физически корректной BRDF. Часто они принимают во внимание особенности поверхности материала, например альбедо, что с лёгкостью позволяет реализовать такие сложные взаимодействия как слои (воспроизведение слоя лака на древесине) или же поведение частиц материала (моделирование песка и жидкостей). Одним из подвидов моделей являются микрограневые модели освещения, которые предполагают, что сложные поверхности могут быть представлены некоторым распределением небольших частиц (граней). Эти грани являются очень маленькими совершенными отражателями, и для задания такого поведения поведения понадобится некоторое статистическое распределение микрограней, которое будет являться распределением нормалей на рассматриваемой поверхности. Примером такой модели является модель Кука-Торренса[1], которая с высокой точностью позволяет имитировать поверхность металлов и пластмасс, но широко используется в современных рендерах компьютерных игр и других визуализациях реального времени. BRDF для модели Кука-Торренса выглядит следующим образом:

$$f_r(p, \omega_o, \omega_i) = \frac{D(\omega_h)G(\omega_o, \omega_i)F_r(\omega_o)}{4(\omega_o n)(\omega_i n)}$$

где $D(\omega_h)$ — функция вероятностного распределение микрограней поверхности, $F_r(\omega_o)$ — коэффициент отражения Френеля, а $G(\omega_o, \omega_i)$ — функция геометрической составляющей, учитывающей самозатенение и маскирования микрогеометрией объекта, n — нормаль к точке поверхности.

4. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ

В своей работе я предлагаю использовать физическую модель освещения для реализации визуализации компьютерных игр. Физическая модель выбрана за счёт более лёгкой достижимости фотореализма, предсказуемости результатов при изменении освещения и взгляда, лёгкой расширяемости и более интуитивной работе с материалами для художников, выполняющих наполнение мира. Модель представляет собой комбинацию модели Кука-Торренса с

элементами другой микрограневой модели — GGX[1], что позволяет улучшить такие элементы картинки как плавные размытые отражения хромированных деталей. За счёт использования нескольких аппроксимаций и оптимизаций, таких как приоритетная выборка, использование сферической гауссовой аппроксимации для компонента Френеля и связывание зависимостью функцию самозатенения от функции распределения микрограней Trowbridge-Reitz, удалось получить правдоподобный результат, который одинаково хорошо подходит как для грубых материалов вроде одежды, так и блестящей керамики, при этом используя минимум вычислительных ресурсов, позволяя проводить рендеринг сцен в реальном времени.

Вывод

Представленное решение является лишь одним из многих возможных подходов, которое обобщает последние исследования в этой области. Применение физически-корректных моделей в реальном времени — это относительно новая практика в реализации которой участвуют крупнейшие мировые компании, позволяя продвинуться ближе к цели создания неотличимой от реальности трёхмерной картинки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Cook and K. Torrance. *A reflectance model for computer graphics*. – Computer Graphics (SIGGRAPH '81 Proceedings), – 1981 – PP. 301–316.

Прогнозирование временных рядов методом группового учета аргументов

Рычков Александр Юрьевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601)

e-mail: magic.goop1993@gmail.com

Пусть известно значение некой функции в первых n точках. Зная эту информацию необходимо спрогнозировать значение в $n + 1$ точке. Разработаем программу для решения данной задачи методом группового учета аргументов.

Метод группового учета аргументов, МГУА (Group Method of Data Handling, GMDH) — метод порождения и выбора регрессионных моделей оптимальной сложности. Под сложностью модели в МГУА понимается число параметров. Для порождения используется базовая модель, подмножество элементов которой должно входить в искомую модель. Для выбора моделей используются внешние критерии, специальные функционалы качества моделей, вычисленные на тестовой выборке.[1]

Дана обучающая выборка:

$$X = \{x_{ij} | i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, y_j\},$$

где N - количество рассматриваемых факторов, M - количество элементов временного ряда. В ходе работы, обучающая выборка делится на три части: L - обучающая выборка, по которой будут настраиваться параметры модели, T - тестовая выборка, на которой проверяется качество модели (внешний критерий), C - контрольная выборка, проверка модели на данных не учествовавших в обучении.

За основу взят комбинаторный алгоритм, его задача перебрать все модели-претенденты. Линейные функции многих переменных взяты в качестве базовой модели МГУА:

$$f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n.$$

В этой модели $x = \{x_i | i = \overline{1, N}\}$ - множество свободных переменных и \vec{a} - вектор параметров - весовых коэффициентов.

Индуктивно порождаются модели-претенденты. Каждая порождаемая модель задается линейной комбинацией элементов $\{a_i, x_i\}$. Вектор параметров \vec{a} вычисляется методом наименьших квадратов:

$$\vec{a}_L = (X_L^T X_L)^{-1} X_L^T Y_L.$$

Внутренний критерий выглядит следующим образом [1] :

$$\epsilon_L^2 = |Y_L - X_L \vec{a}_L|.$$

В соответствии с критерием $\epsilon_L^2 \rightarrow \min$ происходит настройка параметров \vec{a} и вычисление ошибки на обучающей подвыборке.

Для выбора наилучшей модели используется тестовая выборка и внешний критерий вида [1] :

$$\Delta_T^2 = |Y_T - X_T \vec{a}_L|.$$

Далее полученную модель можно проверить на контрольной выборке для оценки качества прогнозирования.

Пример работы программы. На рисунке "Рис. 1" показано, что с увеличением сложности модели оценки по внутреннему критерию стремятся к 0, в тоже время оценки по внешнему критерию, начиная с определённого уровня сложности модели, возрастают. Пересечение кривых - количество параметров в построенной модели.

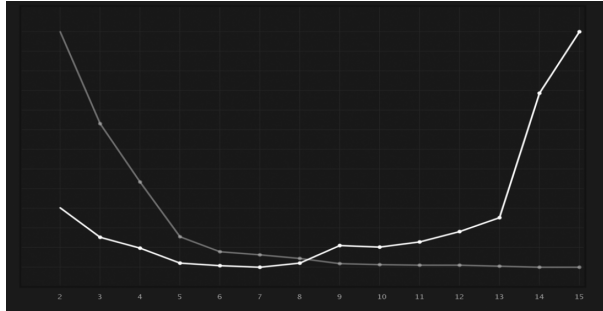


Рис. 1. Внутренний и внешний критерий.

На рисунке "Рис. 2" показан результат работы программы. Серым цветом показана исходная выборка. Белым цветом показано, как программа настроила модель на обучающей и тестовой выборке. Черным цветом показан результат прогноза на контрольной выборке.

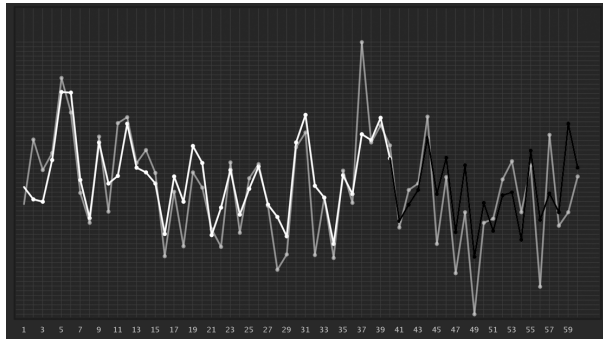


Рис. 2. Результат обучения и прогноза.

В ходе разработки и отладки программы была обнаружена положительная особенность работы метода – отбор информативных признаков. Как

правило модели, построенные МГУА, задействовали меньшее количество признаков, чем имели исходные данные, тем самым исключались неинформативные признаки и повышалось качество классификации. Таким образом, МГУА является мощным инструментом для анализа данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Machine Learning *Метод группового учёта аргументов.* – www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Метод_группового_учета_аргументов

Сравнение оценочных функций при реализации эвристического поиска

Сабитов Эдем Шевкетович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601И)

e-mail: edem.sabitov@gmail.com

Рассматривается тестовая задача поиска в пространстве состояний, используемая для численного исследования эвристической силы различных эвристических оценок, используемых в алгоритме A^ , реализованном на языке Пролог.*

Эвристический поиск [1] является одним из методов поиска в пространстве состояний для решения интеллектуальных задач. Суть подобных задач состоит в том, что нам следует найти кратчайший путь перехода из начального состояния в целевое. Эвристический поиск использует оценочную функцию, с помощью которой можно сравнивать состояния в пространстве. Эта функция оценивает близость к целевому состоянию. Алгоритм A^* во взвешенном графе находит маршрут наименьшей стоимости от начальной вершины до выбранной конечной. Используемая при этом оценочная функция имеет вид:

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

Здесь $g(n)$ соответствует расстоянию на графе от узла n до начального состояния, а $h(n)$ - оценка расстояния от n до узла, представляющего конечное (целевое) состояние. Чем меньше значение оценочной функции $f(n)$, тем «лучше», т.е. узел n лежит на более коротком пути от исходного состояния к целевому. Если $h(n)$ — нижняя оценка расстояния до целевого состояния, т.е. если $h(n)$ никогда не дает завышенной оценки расстояния, то алгоритм A^*

всегда отыщет оптимальный путь до цели при помощи оценочной функции $f(n)$. Алгоритм, обладающий таким свойством, называется разрешимым [1].

В качестве тестовой задачи рассматривается широко известная игра «8», облегчённый вариант более известной игры «15», отличающийся меньшими размерами игрового поля (3x3 вместо 4x4). На языке Пролог предложение, задающее вид целевого состояния, имеет следующий вид:

```
целевое([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, ' ']]).
```

Состояние задаётся списком, состоящим из трёх вложенных списков, каждый из которых соответствует строке игрового поля.

Поскольку у данной задачи пространство состояний состоит из двух частей, между которыми не существует переходов, начальное состояние имеет смысл задавать, отступив от целевого на заданное количество ходов [2].

Переходы в данной задаче соответствуют перемещениям свободной клетки. Поменять местами можно содержимое двух любых соседних клеток, если одна из них свободна. Например, переход, соответствующий обмену левой верхней клетки и клетки, соседней с ней по горизонтали, записывается в виде следующего предложения:

```
переход([[X11, X12, X13], L2, L3], [[X12, X11, X13], L2, L3], Name):-
X11=' ', Name = l; X12=' ', Name = r.
```

Здесь имя перехода в целях получения более компактного результата, сокращено до одной буквы (l — влево, r — вправо). Аналогичным образом задаются и другие варианты переходов.

Исходный код реализации алгоритма A* на Прологе задаётся следующим образом:

```
'A*' (Sol) :- start(Start), 'A*' (Start, Sol, OpenNum-ClosedNum), nl,
Vnum is OpenNum+ClosedNum, печать_реш(Sol), length(Sol, N1),
N is N1-1, write(длина=N), write(('перебрано' -Vnum, '
из них раскрыто'-ClosedNum, 'не раскрыто' -OpenNum)).
'A*' (Start, Sol, OpenNum-ClosedNum) :- h(Start, F),
a_star([v(Start, noparent, 0, F)], [], Sol-(OpenNum-ClosedNum)).
a_star(Opens, Closes, Sol-(OpenNum-ClosedNum)) :-
Opens=[v(V, Prev, _, _) | _], goal(V), !,
build_path(Prev, Closes, [V], Sol), length(Opens, OpenNum),
length(Closes, ClosedNum).
a_star([v(V, Prev, G, F) | Opens], Closes, Sol) :- findall(v(V1, V, G1, F1),
(next(V, V1, C), not(member(v(V1, _, _, _), Opens)),
not(member(V1, _, Closes))), G1 is G+C, h(V1, H1), F1 is G1+H1), Childs),
```

```
ord_insert_list(Childs,Opens,NewOpens),
a_star(NewOpens,[V-Prev|Closes],Sol).
a_star([],_,fail).
```

В качестве эвристических оценочных функций $h(n)$ для данной задачи рассматривается расстояние Хемминга (т.е. количество фишек, находящихся не на своих местах), манхеттенское расстояние (сумма разностей горизонтальной и вертикальной координат между текущим и целевым положениями фишки, просуммированная по всем фишкам), а также, для сравнения со слепыми методами поиска, функция, возвращающая тождественный нуль, превращающая алгоритм **A*** в обычный поиск в ширину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] sapr-mgsu.narod.ru/biblio/ex-syst/Glava2/Index4.htm
- [2] Братко И. *Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта: Пер с англ.* – М.: Мир, – 1990.
- [3] Бондарев В. Н. Аде Ф. Г. *Искусственный интеллект: Учебное пособие для вузов.* – Севастополь: Изд-во СевНТУ, – 2002.

Использование языка Prolog при создании системы аналитических вычислений

Сидаченко Михаил Викторович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602И)

e-mail: michaellux@yandex.ru

Описывается создание прототипа системы аналитических вычислений, реализованного при помощи языков программирования C++ (пользовательский интерфейс) и Prolog (рабочая часть программы).

Современные системы аналитических вычислений (называемые также системами компьютерной алгебры) содержат в себе множество инструментов (от собственного языка программирования до инструментов, работающих со звуком) [1]. Но базовая часть системы предназначена для символьных вычислений, когда все операции производятся в аналитическом виде. Системы символьных вычислений несут в себе богатый арсенал различного рода возможностей. Упрощение выражений, разложение на простые дроби, дифференцирование, интегрирование – всё это лишь часть того, что может система [2].

Эволюция систем привела к тому, что системы обрели возможность самостоятельно доказывать теоремы. Этому поспособствовало применение логических языков программирования в качестве основного. Одним из таких языков является Prolog.

Символьные вычисления были одним из начальных применений Пролога. Примерами таких программ являются программа символьного интегрирования [3, 5], программа доказательства теорем геометрии [4, 5]. Благодаря декларативной природе Prolog программисту требуется только изложить необходимые правила работы с символьными выражениями практически в своём естественном виде, а требуемый результат при помощи них получается с использованием системы логического вывода, встроенной в Prolog. На рис. 1 представлена структура прототипа системы аналитических вычислений, разрабатываемой на языке Пролог с использованием также языка C++ в качестве средства разработки пользовательского интерфейса. Используемый компилятор Пролога даёт возможность через специальный API встраивать Prolog-код в проекты, написанные на C++, Java и других.

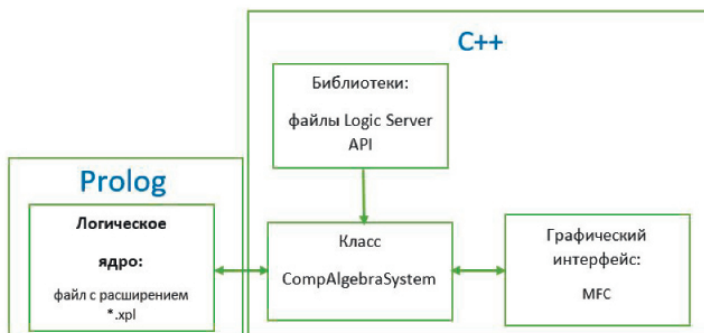


Рис. 1. Пример простейшей системы аналитических вычислений

Покажем на примере функции `diff` (дифференцирование выражений) и `simplify` (элементарное упрощение выражений) как работает система. Их программный код:

```
diff(X,X,1) :- !.
diff(A,X,0) :- atomic(A), A\=X, !.
diff(A+B,X,DA+DB) :- diff(A,X,DA), diff(B,X,DB), !.
diff(A*B,X,A*DB+DA*B) :- diff(A,X,DA), diff(B,X,DB), !.
diff(sin(X),X,cos(X)) :- !.
```

```

diff(sin(A),X,cos(A)*DA) :- diff(A,X,DA), !.
diff(sqrt(A),X,1/(2*sqrt(A))*DA) :- diff(A,X,DA), !.
diff(-A,X,(-1)*DA) :- diff(A,X,DA), !.
simp(Expr,0) :- (Expr=_*0, !; Expr=0*_ , !; Expr=0/_ , !;
    Expr=sin(0), !; Expr=sqrt(0), !;
    Expr=log(1), !; Expr=ln(1)), !.
simp(Expr,1) :- (Expr=A/A, !; Expr=_**0, !;
    Expr=1**_, !; Expr=cos(0)), !.
simp(Expr,AS) :- (Expr=A+0, !; Expr=A-0, !; Expr=0+A, !;
    Expr= -(-A), !; Expr=A*1, !; Expr=1*A, !; Expr=A/1, !;
    Expr=A**1), simp(A,AS), !.
simp(0-A,AS) :- simp(-(A),AS), !.
simp(Expr,ExprS) :- Expr=..[_ ,A], number(A), ExprS is Expr, !.
simp(Expr,ExprS) :- Expr=..[_ ,A,B], number(A),
    number(B), ExprS is Expr, !.
simp(Expr,ExprS) :- Expr=.. [Op,A],
simp(A,AS), ExprS=.. [Op,AS], !.
simp(Expr,ExprS) :- Expr=.. [Op,A,B], simp(A,AS),
simp(B,BS), ExprS=.. [Op,AS,BS], !.
simp(Expr,Expr).
simplify(Expr,ExprS) :- simp(Expr,ExprS1),
    (ExprS1=Expr,ExprS=Expr,! ;
simplify(ExprS1,ExprS)), !.

```

Получив файл xpl и загрузив его в C++ среду, протестируем её работу на нескольких примерах.

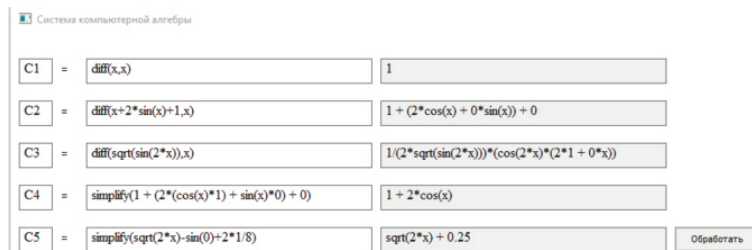


Рис. 2. Демонстрация работы программы (этап тестирования)

По виду приведённого фрагмента исходного Пролог-кода можно судить, что математические правила на Прологе формулируются практически в своём

естественном виде, без семантического разрыва между формулировкой задачи и её программной реализацией. Это позволяет легко дополнять уже готовые работающие программы новыми методами решения математических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Википедия *Система компьютерной алгебры* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.ru.wikipedia.org/wiki/Система_компьютерной_алгебры, свободный. – (Дата обращения: 26.05.2015).
- [2] Википедия *Символьные вычисления* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.ru.wikipedia.org/wiki/Символьные_вычисления, свободный. – (Дата обращения: 05.04.2016).
- [3] Bergman M., Kanoui H. *Application of Mechanical Theorem Proving to Symbolic Calculus*. – Marseille: CNRS, – 1973.
- [4] Welham R. *Geometry Problem Solving*. – Scotland: University of Edinburgh, – 1976.
- [5] Стерлинг Л., Шапиро Э. *Искусство программирования на языке Пролог*. – М.: Изд-во Мир, – 1990 – С. 235.

Персистентные структуры данных и их эффективная реализация

Соколов Борис Сергеевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)
e-mail: sokolov031193@gmail.com

Персистентные структуры данных (англ. *persistent data structure*)

– это структуры данных, которые при внесении в них каких-то изменений сохраняют все свои предыдущие состояния и доступ к этим состояниям.

Уровни персистентности

Есть несколько уровней персистентности:

- частичная (англ. *partial*),
- полная (англ. *full*),
- конфлюэнтная (англ. *confluent*),
- функциональная (англ. *functional*).

В частично персистентных структурах данных к каждой версии можно делать запросы, но изменять можно только последнюю версию структуры данных.

В полностью персистентных структурах данных можно менять не только последнюю, но и любую версию структур данных, также к любой версии можно делать запросы.

Конфлюэнтные структуры данных позволяют объединять две структуры данных в одну (деревья поиска, которые можно сливать).

Функциональные структуры данных полностью персистентны по определению, так как в них запрещаются уничтожающие присваивания, т.е. любой переменной значение может быть присвоено только один раз и изменять значения переменных нельзя. Если структура данных функциональна, то она и конфлюэнтна, если конфлюэнтна, то и полностью персистентна, если полностью персистентна, то и частично персистентна. Однако бывают структуры данных не функциональные, но конфлюэнтные.

Способы преобразования структур данных в персистентные

Есть несколько способов сделать любую структуру персистентной:

- полное копирование (англ. *full copy*) когда при любой операции изменения полностью копируется структура данных и в получившуюся новую копию вносятся изменения,
- копирование пути (англ. *path copying*),
- метод «толстых» узлов (англ. *fat node*).

Рассмотрим для начала частичную персистентность. История изменений структуры данных линейна, в любой момент времени можно обратиться к любой версии структуры данных, но поменять возможно только последнюю версию. В нашем понимании структурой данных будет называться набор узлов, в которых хранятся какие-то данные, и эти узлы связаны ссылками.

Метод копирования пути

Пусть есть сбалансированное дерево поиска. Все операции в нем делаются за $O(h)$, где h — высота дерева, а высота дерева $O(\log n)$, где n — количество вершин. Пусть необходимо сделать какое-то обновление в этом сбалансированном дереве, например, добавить очередной элемент, но при этом нужно не потерять старое дерево. Возьмем узел, в который нужно добавить нового ребенка. Вместо того чтобы добавлять нового ребенка, скопируем этот узел, к копии добавим нового ребенка, также скопируем все узлы вплоть до корня, из которых достигим первый скопированный узел вместе со всеми указателями.

Все вершины, из которых измененный узел не достижим, мы не трогаем. Количество новых узлов всегда будет порядка логарифма. В результате имеем доступ к обоим версиям дерева.

Так как рассматривается сбалансированное дерево поиска, то поднимая вершину вверх при балансировке, нужно делать копии всех вершин, участвующих во вращениях, у которых изменились ссылки на детей. Таких всегда не более трех, поэтому асимптотика $O(\log n)$ не пострадает. Когда балансировка закончится, нужно пойти вверх до корня, делая копии вершин на пути.

Этот метод хорошо работает на стеке, двоичных (декартовых, красно-черных) деревьях. Но в случае преобразования очереди в персистентную операция добавления будет очень дорогой, так как элемент добавляется в хвост очереди, который достижим из всех остальных элементов. Также не выгодно применять этот метод и в случае, когда в структуре данных имеются ссылки на родителя.

Метод «толстых» узлов

Пусть в структуре данных есть узел, в котором нужно сделать изменения (например, на рисунке ниже в первой версии структуры данных в узле X есть поле $a = 3$, а во второй версии это поле должно быть равно 4), но при этом нужно сохранить доступ к старой версии узла X и не нужно экономить время. В таком случае можно хранить обе версии узла X в большом комбинированном узле.

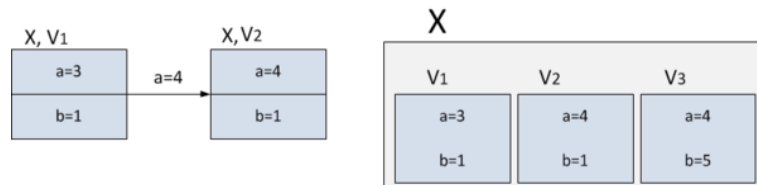


Рис. 1

В примере выше в этом «толстом» узле будет храниться первая версия V_1 , у которой $a = 3$ и вторая версия V_2 , у которой $a = 4$. Если далее последуют еще какие-то изменения (например, поле b узла X станет равно 5) добавим в толстый узел X еще одну версию – V_3 .

Пусть нужно сделать запрос ко второй версии структуры данных (на рисунке выше это запрос $X.a-?$). Чтобы сделать этот запрос, нужно зайти в

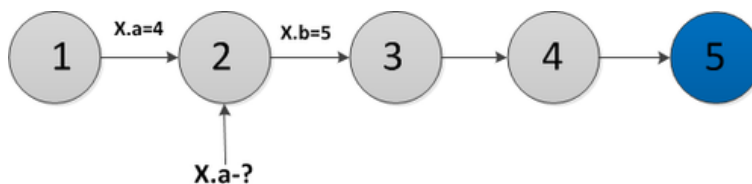


Рис. 2

узел X и найти в списке версий максимальную версию, которая меньше или равна версии запроса (в примере на рисунке это версия 2), и в этой версии узла найти значение поля a (в примере $a = 4$). Чтобы быстро найти нужную версию в списке версий, хранящихся в «толстом» узле, нужно хранить их в виде дерева. Тогда мы сможем за логарифм найти нужную версию и к ней обратиться. Значит, все операции, которые будут производиться на этой структуре данных, будут домножаться на логарифм от числа версий.

Структура толстого узла может быть и другой: к каждой вершине можно хранить лог ее изменений, в который записывается версия, в которой произошло изменение, а также само изменение. Такая структура толстого узла рассмотрена ниже, в разделах об общих методах получения частично и полностью персистентных структур данных. Лог может быть организован по-разному. Обычно делают отдельный лог для каждого поля вершины. Когда что-то меняется в вершине, то в лог соответствующего поля записывается это изменение и номер версии, с которой данное изменение произошло. Когда нужно обратиться к старой версии, то двоичным поиском ищут в логе последнее изменение до этой версии и находят нужное значение. Метод fat node дает замедление $\log t$, где t — число изменений структуры данных; памяти требуется $n + t$, где n — число вершин в структуре данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дополнительные главы алгоритмов. Лекции Андрея Станкевича — <https://www.lektorium.tv/lecture/14321>
- [2] Персистентные структуры данных. Лекции Павла Маврина — <http://logic.pdmi.ras.ru/csclub/node/2734/>

Поиск текстовых блоков на изображении

Столяров Евгений Александрович

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601-И)
e-mail: stolyarov.evgeniy@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

Поиск текстовых блоков на изображении подразумевает нахождение областей, как правило прямоугольных, которые содержат текстовую информацию. Данная задача актуальна, так как является одним из этапов оптического распознавания символов [1], которое активно развивается в последние десятилетия. Поэтому исследование и разработка алгоритма быстрого и точного определения областей может найти широкое применение.

Чаще всего основными шагами, с точностью до порядка, распознавания являются:

- (1) Предобработка изображения;
- (2) Поиск текстовых блоков;
- (3) Последовательное выделение абзацев, строк, слов, символов;
- (4) Выделения признаков классифицируемого символа;
- (5) Распознавания символов;
- (6) Постобработка результата.

Только после окончания последнего этапа можно будет говорить, нашёл ли алгоритм какую-либо текстовую информацию и, соответственно, саму текстовую область.

1. АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ ГРАНИЦ

Одним из самых популярных алгоритмов выделения границ является детектор границ Кэнни [2], разработанный Джоном Кэнни в 1986 году. Хотя его работа была проведена на заре компьютерного зрения, детектор границ Кэнни до сих пор является одним из лучших детекторов. Кроме особых частных случаев трудно найти детектор, который бы работал существенно лучше, чем детектор Кэнни.

Шаги алгоритма:

- (1) Сглаживание. Размытие изображения для удаления шума;
- (2) Поиск градиентов. Границы отмечаются там, где градиент изображения приобретает максимальное значение;

- (3) Подавление не-максимумов. Только локальные максимумы отмечаются как границы;
- (4) Двойная пороговая фильтрация. Потенциальные границы определяются порогами;
- (5) Трассировка области неоднозначности. Итоговые границы определяются путём подавления всех краёв, несвязанных с определенными (сильными) границами.

2. АЛГОРИТМ MAXIMALLY STABLE EXTREMAL REGION (MSER)

На вход алгоритму MSER поступает полутоновое изображение. Далее, по данному изображению создаётся последовательность изображений, которая получается следующим образом. Последовательно для каждого значения от 0 до 255 изображение бинаризуется по порогу. Белые области в последовательности называются областями экстремума. Проанализировав данную последовательность, можно обнаружить сколько уровней та или иная область экстремума не изменялась. Таким образом, выбрав значение порога T , можно выделить регионы, которые не изменялись в последовательности по крайней мере T раз. Такие регионы будут называться максимально устойчивыми областями экстремума. Достоинства алгоритма MSER [3] в том, что он хорошо подходит для поиска кандидатов в символы. Минусы алгоритма — он находит достаточно много регионов, не содержащих символы, и достаточно чувствителен к размытым изображениям, в которых алгоритм MSER может рассматривать несколько символов как один регион.

3. ПОИСК ОБЛАСТЕЙ-КАНДИДАТОВ

Для предобработки изображения используется библиотека OpenCV [4]. Библиотека также содержит реализацию вышеописанных алгоритмов. В данной работе выбор сделан на композицию различных подходов. Для определения областей, в которых находится текст, выполняются следующие шаги:

- (1) Бинаризация [5];
- (2) Поворот изображения;
- (3) Применение морфологических операций [6];
- (4) Поиск контуров и их анализ.

Для определения порога бинаризации используется метод Оцу [7], в основе которого лежит проверка гистограммы яркости на наличие двух пиков.

Для поворота изображения используется преобразование Хафа [8] — метод для поиска линий, кругов и других простых форм на изображении. Преобразование Хафа основывается на представлении искомого объекта в виде параметрического уравнения. Параметры этого уравнения представляют фазовое пространство (пространство Хафа). Затем, берётся двоичное изображение, перебираются все точки границ и делается предположение, что точка принадлежит линии искомого объекта — для каждой точки изображения рассчитывается нужное уравнение и получаются необходимые параметры, которые сохраняются в пространстве Хафа.

Финальным шагом является обход пространства Хафа и выбор максимальных значений, за которые «проголосовало» больше всего пикселей картинки, что и даёт нам параметры для уравнений искомого объекта.

Морфологические операции — размывание и растягивание, используют фильтр (ядро), размеры которого рассчитываются из эвристических соображений.

Поиск контуров в OpenCV реализован на основе [9]. После этого шага найденных областей может быть слишком много, что усложнит работу на последующих шагах распознавания текста. Поэтому на основе эвристик контуры фильтруются и остаются только наиболее информативные.

После проделанных шагов полученная информация используется для дальнейшего распознавания, а именно: выделения слов, символов и их классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] OCR – https://en.wikipedia.org/wiki/Optical_character_recognition
- [2] John Canny *A Computational Approach to Edge Detection.* – https://perso.limsi.fr/vezien/PAPIERS_ACS/canny1986.pdf
- [3] MSER – https://en.wikipedia.org/wiki/Maximally_stable_extremal_regions
- [4] OpenCV – <http://opencv.org/documentation.html>
- [5] Бинаризация – <https://habrahabr.ru/post/128768/>
- [6] Морфологические операции – http://docs.opencv.org/2.4/doc/tutorials/imgproc/opening_closing_hats/opening_closing_hats.html
- [7] Метод Оцу – <https://en.wikipedia.org/wiki/Otsu>
- [8] Преобразование Хафа – <http://www.ict.edu.ru/ft/002407/num1degt.pdf>
- [9] Suzuki, S. and Abe, K. *Topological Structural Analysis of Digitized Binary Images by Border Following.* – 1985 – 32-46

Алгоритмы сравнительного анализа фрагментов кода на основе теории компиляции

Тямгин Иван Анатольевич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 601И)

e-mail: tyamgin@mail.ru

В работе рассматриваются методы обнаружения плагиата в исходном коде программ. Суть плагиата заключается в неправомерном использовании чужого исходного кода программы. Проблема в том, что обнаружить плагиат в этом случае, более трудная задача, нежели обнаружить плагиат в текстовом материале. При сравнении исходных кодов программ необходимо анализировать суть исходного кода, ведь перестановка строк и замена имен переменных в коде программы приведут к значительным изменениям во внешнем виде кодов, но не приведут к изменениям в структуре кода и функциональном устройстве программы.

Рассмотрим самые распространенные приёмы скрытия плагиата на следующих двух программах (Рис. 1, 2), вычисляющих биномиальные коэффициенты:

```
public class Program
{
    static int Factorial(int n)
    {
        var result = 1;
        for (var i = 2; i <= n; i++)
            result *= i;
        return result;
    }

    static int Binomial(int n, int k)
    {
        return Factorial(n) / Factorial(k) / Factorial(n - k);
    }

    static void Main(string[] args)
    {
        for (var i = 0; i < 10; i++)
        {
            for (var j = 0; j <= i; j++)
                Console.Write(
                    Binomial(i, j) + "_");

            Console.WriteLine();
        }
    }
}
```

Рис. 1. Код программы 1

```

class Solution
{
    static void Main(string[] args)
    {
        for (int i = 0; i < 10; ++i)
        {
            for (int j = 0; j <= i; ++j)
            {
                Console.Write(C(i, j));
                Console.Write("_");
            }
            Console.WriteLine();
        }
    }

    private static int C(int n, int k)
    {
        return F(n)/F(k)/F(n - k);
    }

    private static int F(int n)
    {
        var res = 1;
        for (var i = 2; i <= n; ++i) {
            res = res*i;
        }
        return res;
    }
}

```

Рис. 2. Код программы 2

Чем отличается вторая программа от первой:

- Используется спецификатор класса *public* в первой программе, во второй - нет.
- Классы именуются по-разному. (*Program* против *Solution*).
- Методы классов именуются по-разному. Функция факториала в первом примере - *Factorial*, во втором - *F*. Тоже самое у *Binomial* и *C*.
- Во втором классе методы определены как приватные.
- Порядок методов по второй программе отличен от порядка в первой.
- Первая программа использует неявно типизированные локальные переменные (*var*), в то время как вторая - нет.
- Первая программа использует постинкремент для итерации цикла, вторая - преинкремент.
- Различие в выводе в консоль. Вторая программа разбила вывод на 2 вызова *Console.Write*
- Переименованы локальные переменные

- В первой программе используется $result *= i$, во второй - $res = res * i$
- Различие в форматировании и в использовании фигурных скобок.

Для этих и других различий не должна быть чувствительна система проверки на плагиат.

Таким образом можно сформулировать основные требования к алгоритму сравнения:

- алгоритм должен распознавать хотя бы основные ключевые слова языка;
- переменные не должны считаться разными, если они отличаются только именем;
- при обмене местами двух функций код не должен распознаваться, как совершенно другой;
- аналогичный принцип применим для строк внутри функций: существуют строки, перестановка которых не приводит к изменению функциональности программы;
- при анализе все комментарии в коде должны игнорироваться, аналогично игнорируются пробельные символы и переводы строк;
- алгоритм должен быть расширяемый на другие языки программирования;
- иметь возможность сравнивать коды программ, написанных на разных языках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П.А. Хаустов, Ю.Я. Кацман *Алгоритм нечеткого сравнения исходных кодов программ.* – <http://www.eco-oos.ru/biblio/konferencii/prioritetnye-napravleniia-razvitiia-nauki-i-tehnologii-ix/33/>

Формирование компетенций в области ИКТ у студентов высшей школы

Филлипова Дарина Юрьевна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)
e-mail: darina.filippova.1982@mail.ru

В данной исследовательской работе анализируются проблемы формирования компетенций в области ИКТ студентов высшей школы. ИКТ - компетенция является одной из ключевых компетентностей современного человека проявляющаяся в уверенном владении информационными технологиями для решения возникающих задач как в учебной так и в профессиональной деятельности. Объектом исследования являются наиболее актуальные и доступные современные методы формирования ИКТ- компетентности в образовательном процессе.

Процессы модернизации, происходящие в российском обществе, охватили сегодня не только политическую, экономическую, но и социальную сферу, важным компонентом которой является система высшего образования. Реализация стратегии модернизации отечественного образования во многом обострила проблему недостаточной профессиональной компетентности выпускаемых вузами специалистов. В этой связи перед современной высшей школой стоит задача не просто сформировать у студентов знания, выработать умения и навыки, но и способствовать развитию особых профессионально-личностных качеств, позволяющих им самореализоваться в предстоящей профессиональной деятельности, быть конкурентоспособными на рынке труда. Современное общество, подвергшееся процессу информатизации, требует формирования новой модели системы образования. Новая модель должна основываться на применении современных информационно -коммуникационных технологиях(ИКТ). Необходимость использования ИКТ в образовательном процессе обусловлена следующими факторами:

- применение этих технологий обеспечивает преемственность накопленного опыта человечества как от поколения поколению, так и от человека к человеку;
- современные ИКТ позволяют человеку быстрее адаптироваться в современном мире и обществе, повышая уровень образования;
- эффективное введение ИКТ в образовательный процесс является фактором развития современной высшей школы, отвечающей процессу

реформирования традиционного образования и требованиям современного информационного общества. Умение современного человека быстро ориентироваться в жизненной ситуации, способность быстро решать профессиональные или производственные задачи определяются степенью подготовленности высококвалифицированного специалиста. Подготовленность такого специалиста непосредственно связана с его уровнем владения информационными технологиями и техническими средствами.

Информационные технологии можно рассматривать с четырёх сторон: как предмет изучения, способ обучения и средство общения, инструмент автоматизации. Необходимость подготовки высококвалифицированного специалиста является уверенное владение информационными технологиями на уровне информационной культуры, поиска информации, и её анализа, а также получение результата.

Так уровень компьютерной грамотности предполагает подготовку грамотного специалиста, усвоившего воспроизведение, понимание и практическое применение достаточного объема теоретических знаний. Начальный уровень формируется во время обучения в школе, однако если вузовское образование не способствует дальнейшему развитию, то выпускник, обладая лишь опытом практической компьютерной деятельности, оказывается не готов творчески применять информационные технологии и не способен к решению нестандартных профессиональных проблем. Задача высшей школы в данном случае сводится к коррекции приобретенной ИКТ - компетентности и направления ее в русло решения профессиональных задач.

Таким образом, информационная компетентность предполагает подготовку специалиста, характеризующегося осознанной мотивацией использования ИКТ в профессиональной деятельности, способного творчески действовать в нестандартных профессиональных ситуациях. Развитие ИКТ - компетентности в процессе обучения в вузе позволяет перейти к качественно новым формам обучения.

Компетентность – это новая единица измерения образованности человека.

Понятие компетентности возникло из-за того, что уже невозможно измерить качество образования, с помощью знаний, умений и навыков. Компетентность как категорию можно оценить в реальной жизненной деятельности.

Под ИКТ - компетентностью подразумевается уверенное владение студентами цифровыми технологиями, сетями для получения информации, её

анализа, интеграции и оценки для решения поставленных задач в учебной и профессиональной деятельности.

Формирование ИКТ- компетентности в высшей школе должно опираться на применение персональных компьютеров, прикладных программных комплексов и мультимедийных технологий. Одним из наиболее доступных методов формирования ИКТ- компетентности является применение электронных учебников. Преподаватели должны шире использовать свои разработки, которые должны находиться в свободном доступе для студентов.

Средства мультимедиа позволяют одновременно использовать каналы восприятия студентов в процессе обучения, что способствует интеграции информации моделированию сложных процессов и явлений. Таким образом реализуется принцип наглядности в обучении.

В процессе анализа проблемы формирования ИКТ - компетентности были выделены как положительные, так и отрицательные результаты применения современных средств ИКТ в образовательном процессе. К положительным результатам можно отнести индивидуализацию обучения. Но индивидуализация значительно сокращает время живого диалогового общения между участниками образовательного процесса заменяя его диалогом с компьютером. Наиболее очевидно это при дистанционной форме обучения, так как студент большую часть времени поглощает информацию молча. Это может привести к тому, что ранее активный студент в речевом плане, надолго замолкает теряя при этом возможность формулирования на профессиональном языке. Слишком сильная индивидуализация обучения с помощью ТСО может привести к снижению уровня развития творческого мышления, которое в большей степени основано на диалоговом общении.

К негативным и крайне нежелательным последствиям применения средств ИКТ в образовательном процессе может привести использование информационных ресурсов размещенных в сети Интернет.

Исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что в процессе обучения необходимо рационально использовать современные средства ИКТ в комплексе с традиционной формой обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамова И. А. *Информационные технологии как основа формирования аналитической компетентности ИТО-2005: сборник трудов* - М.: «БИТ про» – 2005 – С. 166-167.
- [2] Данильчук Е. В. *Теория и практика формирования информационной культуры будущего педагога: монография* — М.-Волгоград: Перемена – 2002 – 230 с.

Полнота множества ключевых импликаций формального контекста

Холодинская Татьяна Викторовна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602И)

e-mail: Pussycat@mail.ru

U - множество, которое в рамках рассматриваемой задачи считается универсальным (признаковое пространство).

$G \subseteq U$ - некоторое подмножество (выборка) точек пространства U .

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} : U \rightarrow \{0, 1\}$ - множество элементарных предикатов, определённых на множестве U .

$K = \langle U, G, P \rangle$ - формальный контекст.

Пусть $p \in P$ - предикат из множества P .

$p^+ = \{u \in U \mid p(u) = 1\}$ - область истинности предиката p .

$p' = G \cap p^+$ - подмножество точек выборки G , попавших в область истинности предиката p .

Пусть $A \subseteq P$ - подмножество элементарных предикатов из множества P . Это подмножество можно рассматривать как элементарную конъюнкцию, а A^+ - как область истинности этой конъюнкции. С другой стороны, подмножество A можно рассматривать как подмножество элементарных предикатов, определённых на множестве U , а множество A^+ - как общую область истинности элементарных предикатов подмножества A :

$A^+ = \bigcap_{a \in A} a^+$ - общая область истинности предикатов подмножества A .

$A' = G \cap A^+$ - подмножество точек выборки G , попавших в область A^+ .

Пусть $g \in G$ - точка из множества G .

$g^+ = \{p \in P \mid p(g) = 1\}$ - обозначение множества элементарных предикатов, области истинности которых содержат точку g .

Пусть $B \subseteq G$ - подмножество точек из множества G .

$B^+ = \bigcap_{b \in B} b^+$ - подмножество элементарных предикатов, общих для всех предикатных образов точек из подмножества B .

На подмножествах множества P обычным образом определяется отношение порядка " \leq ", как отношение включения " \subseteq ":

Определение 1. Пусть $A, B \subseteq P$. $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Определение 2. Пусть $A, B \subseteq P$. Из предикатного подмножества A логически следует предикатное подмножество B (обозначение $A| = B$), если область истинности предиката A содержится в области истинности предиката B [1]:

$$A| = B \Leftrightarrow A^+ \subseteq B^+.$$

Определение 3. Пусть $A, B \subseteq P$. Из предикатного подмножества A в контексте K следует предикатное подмножество B (обозначение $A| \stackrel{K}{=} B$), если все точки выборки, попавшие в область истинности A^+ , содержатся в области истинности B^+ :

$$A| \stackrel{K}{=} B \Leftrightarrow A' \subseteq B^+.$$

Утверждение 1. Пусть $A, B \subseteq P$. Из предикатного подмножества A в контексте K следует предикатное подмножество B , тогда и только тогда, когда все точки выборки, попавшие в область истинности A^+ , являются подмножеством точек выборки, попавших в область истинности B^+ :

$$A| \stackrel{K}{=} B \Leftrightarrow A' \subseteq B'.$$

Утверждение 2. Если из предикатного подмножества A логически следует предикатное подмножество B , то из A в контексте K следует B :

$$A| = B \Rightarrow A| \stackrel{K}{=} B$$

Пусть $A \subseteq P$.

$A'^+ = \{ p \in P | A| \stackrel{K}{=} p \}$ – подмножество всех элементарных предикатов, следующих из предикатного подмножества A в контексте K .

1^+ можно рассматривать как оператор, определённый на подмножества множества предикатов P :

$$1^+ : 2^P \rightarrow 2^P.$$

Свойства оператора 1^+ :

- 1) $A \subseteq B \Rightarrow A'^+ \subseteq B'^+$, (монотонность)
- 2) $A \subseteq A'^+$, (экстенсивность)
- 3) $(A'^+)^+ = A'^+$. (идемпотентность)

В силу наличия свойств 1) – 3) оператор 1^+ называется оператором (контекстного) замыкания [2]. С учётом того, что оператор 1^+ определяется контекстом K , его удобно называть «оператором контекстного замыкания».

Если $A'^+ = A$, то A – (контекстно) замкнутое подмножество элементарных предикатов.

Определение 4. Пусть $A, B \subseteq P$. Предикатное подмножество A равносильно предикатному подмножеству B в контексте K (обозначение $A \stackrel{K}{\cong} B$), если подмножество точек выборки A' , попавших в область истинности A^+ , совпадает с подмножеством точек выборки B' , попавших в область истинности B^+ :

$$A \stackrel{K}{\cong} B \Leftrightarrow A' = B'.$$

Утверждение 5. Пусть $A, B \subseteq P$. Предикатное подмножество A равносильно предикатному подмножеству B тогда и только тогда, когда (контекстные) замыкания этих подмножеств совпадают:

$$A \stackrel{K}{\cong} B \Leftrightarrow A'^+ = B'^+.$$

Отношение равносильности " $\stackrel{K}{\cong}$ " является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает множество 2^P всех подмножеств элементарных предикатов на классы эквивалентности:

$$[A]_K = \left\{ B \subseteq P \mid B \stackrel{K}{\cong} A \right\}.$$

Класс $[A]_K$, вместе с унаследованным отношением порядка " \subseteq ", множество упорядоченное, в котором:

- а) A'^+ – максимальный элемент,
- б) Минимальных элементов в классе $[A]_K$ может быть больше одного.

Минимальные элементы класса называются ключевыми элементами класса.

$Key(K)$ – обозначение множества всех ключевых предикатных подмножеств формального контекста K .

Утверждение 6. Для любого предикатного подмножества A существует ключевое подмножество K такое, что $A \in [K, K'^+]$.

Определение 5. Пусть $A, B \subseteq P$. Импликация $A \rightarrow B$ содержится в контексте K , если все точки выборки G находятся в области истинности этой импликации.

Обозначение $Imp(K)$ используется для обозначения всех импликаций контекста K (всех импликаций, содержащихся в контексте K). С использованием этого обозначения, определение 5 запишется в виде:

$$A \rightarrow B \in Imp(K) \Leftrightarrow G \subseteq (A \rightarrow B)^+. \quad (0.1)$$

Очевидно, справедливы следующие утверждения:

$$A \rightarrow B \in Imp(K) \Leftrightarrow G \subseteq \overline{A^+} \cup B^+ \quad (0.2)$$

$$\Leftrightarrow G = \overline{A'} \cup B' \quad (0.3)$$

$$\Leftrightarrow A' \subseteq B' \quad (0.4)$$

$$\Leftrightarrow A \stackrel{K}{\cong} B \quad (0.5)$$

$$\Leftrightarrow B \subseteq A'^+ \quad (0.6)$$

Утверждение 7. $\forall A \subseteq P : A \rightarrow A'^+ \in Imp(K)$.

Это утверждение следует из (0.6).

Утверждение 8. $\forall K \in Key(K) : K \rightarrow K'^+ \in Imp(K)$.

Импликация $K \rightarrow K'^+$, где K – ключевое подмножество, называется ключевой импликацией.

$KeyImp(K) = \{ K \rightarrow K'^+ \mid K \in Key(K) \}$ – обозначение для множества всех ключевых импликаций контекста K .

Утверждение 9. Если $i \in Imp(K)$ и $i| = A \rightarrow B$, то $A \rightarrow B \in Imp(K)$.

Доказательство.

$$\text{Так как } i \in Imp(K), G \subseteq i^+. \quad (0.7)$$

$$\text{Так как } i| = A \rightarrow B, i^+ \subseteq (A \rightarrow B)^+. \quad (0.8)$$

С учётом (0.7),(0.8) и транзитивности " \subseteq ", выполняется включение $G \subseteq (A \rightarrow B)^+$. Следовательно, в соответствии с определением 5, $A \rightarrow B \in Imp(K)$.

Следствие 1. Любая импликация, являющаяся логическим следствием некоторой ключевой импликации, содержится в контексте K :

$$k \in KeyImp(K) \text{ и } k| = A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow B \in Imp(K).$$

Определение 6. Подмножество импликаций контекста K называется полным относительно данного контекста, если каждая импликация, содержащаяся в контексте K , является логическим следствием хотя бы одной (а значит и всех) импликации данного подмножества.

Утверждение 10. Если импликация $A \rightarrow B$ содержится в контексте K , то существует ключевая импликация, логическим следствием которой является импликация $A \rightarrow B$.

Доказательство.

Подмножество A является элементом класса $[A]_K$, а значит, существует такое ключевое подмножество этого класса, что $A \in [K, K'^+]$ (утверждение 6). Следствием этого является цепочка включений:

$$K \subseteq A \Rightarrow A^+ \subseteq K^+ \Rightarrow \overline{K^+} \subseteq \overline{A^+}. \quad (0.9)$$

Так как $A \rightarrow B \in Imp(K)$, то, в силу утверждения (0.6),

$$B \subseteq A'^+. \quad (0.10)$$

А с учётом того, что $A'^+ = K'^+$, включение (16) примет вид

$$B \subseteq K'^+,$$

и, следовательно,

$$(K'^+)^+ \subseteq B^+, \quad (0.11)$$

Так как $A \rightarrow B \in Imp(K)$, то, с учётом (0.9), (0.11), получается

$$(K \rightarrow K'^+)^+ = \overline{K^+} \cup (K'^+)^+ \subseteq \overline{A^+} \cup B^+ = (A \rightarrow B)^+.$$

Таким образом, $(K \rightarrow K'^+)^+ \subseteq (A \rightarrow B)^+$ и, следовательно,

$$K \rightarrow K'^+| = A \rightarrow B. \quad (0.12)$$

Утверждение 11. Множество ключевых импликаций является полным в заданном контексте.

Доказательство.

Данное утверждение следует из определения полноты подмножества импликаций, утверждения 10 и следствия 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. Пособие для студ. высш. учеб. заведений – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448с.
- [2] Биркгоф Г. Теория решёток. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 568с.

Временные параметры в вероятностных задачах управления проектами

Щупляк Яна Игоревна

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 602-И)

e-mail: yana13.93@mail.ru

Рассматриваются вопросы анализа и методы расчета временных параметров в задачах управления проектами на основе вероятностных сетевых моделей. Изучены математические модели детерминированных и вероятностных сетей, альтернативных и обобщенных сетей, в частности, их временные параметры, и предложены практические методы определения длительностей работ.

В задачах моделирования процессов разработки сложных проектов и дальнейшего управления ими используется современный математический и алгоритмический аппарат, основанный на методах и моделях сетевого планирования и управления (СПУ). Под проектом будем понимать целенаправленное мероприятие по созданию нового уникального продукта или услуги определенного качества, имеющее временные и ресурсные ограничения и характеризующееся неповторимостью условий осуществления с привлечением специалистов из разных областей. Это определение обозначает три главных свойства проекта: по срокам, т. е. проект должен завершиться к конкретной дате; по затратам, т. е. проект ограничен выделенными финансовыми и трудовыми ресурсами; по качеству, т. е. необходимо получить результаты определенного уровня качества.

Под управлением проектом понимается деятельность, направленная на последовательное достижение ожидаемых результатов в условиях указанных

трех ограничений. Она требует интегрального управления многими процессами, их взаимодействием, поиска компромиссов. Управление проектами есть комплексный процесс, который включает управление временем, стоимостью, качеством, рисками, персоналом, коммуникациями, контрактами, изменениями в ходе выполнения и другие аспекты. В дальнейшем рассматриваются только вопросы управления временными параметрами проекта.

Сетевые модели являются основным организационным инструментом управления проектами. Основу сетевой модели определяет список работ (процессов) с указанием их продолжительности и предшествования и событий, состоящих в завершении нескольких работ или некоторого этапа. В зависимости от степени информированности о составляющих проекта различают следующие типы сетевых моделей:

- детерминированная сетевая модель – это модель, в которой полностью задана структура проекта и известны продолжительности всех работ;
- стохастическая (вероятностная) модель – это модель, для которой неизвестны продолжительности работ и/или структура (топология) проекта;
- вероятностная модель с детерминированной структурой – это модель с заданной структурой и вероятностной оценкой продолжительности работ (известен закон распределения времени и его параметры);
- альтернативная сетевая модель – это модель, структура которой заранее не задана и включает возможные варианты (альтернативы) достижения цели проекта.

Математический аппарат, используемый в построении и анализе детерминированных сетевых моделей, основывается на методе критического пути, Critical Path Method (СРМ, 1956). Суть метода состоит в расчете временных параметров работ и событий и определении критического пути, имеющего наибольшую продолжительность во времени. Этот метод хорошо проработан и имеет широкий круг приложений, однако, в силу ряда ограничений на структуру модели и требования известной продолжительности работ, он не всегда применим в реальных проектах. Поэтому развитием детерминированной модели стали обобщенные сетевые модели (ОСМ), предложенные в конце 60-х годов в работах В. И. Воропаева [1, 2]. Эти модели позволяют отражать такие взаимосвязи между работами проекта, как совмещенное выполнение, непрерывность работ, учитывать переменную интенсивность и ограничения типа «не ранее» и типа «не позднее» на проект в целом, на отдельные работы и даже на части работ.

Для анализа вероятностных моделей с детерминированной структурой был предложен и опробован метод оценки и пересмотра программ – Program

(Project) Evaluation and Review Technique (PERT, 1958). Согласно этому методу продолжительности работ рассматриваются как случайные величины, распределенные по закону бета-распределения, оценки параметров которого рассчитываются на основе трех (или двух) экспертных оценок наименьшей, наибольшей и модальной оценок длительности каждой работы. Полученные PERT-оценки математического ожидания и дисперсии длительности работ позволяют определить р-квантильные оценки времени наступления событий, длительности всего проекта (длины критического пути) и другие временные параметры сети. Этот метод предлагает также средства оптимизации стоимости (PERT/COST), распределения и планирования ресурсов (RPSM, RAMPS) и другие.

Альтернативные сетевые модели со стохастической топологией и необходимостью принятия решения о выборе альтернатив в настоящее время представляют большой интерес. Основные направления в описании и анализе таких моделей связаны с введением специальных видов событий, на выходах которых допускается реализация логических возможностей И/ИЛИ. Одно из крупных направлений связано с разработками систем GERT (Graphical Evaluation and Review Technique, Метод графической оценки и анализа, 1966) и VERT (Venture Evaluation and Review Technique, Метод оценки и анализа рисков, 1981). Наиболее важным отличием этих систем является реализация специализированных языков и алгоритмов анализа и расчета. Математическая модель альтернативной сети включает одну начальную, несколько конечных вершин, а также промежуточные вершины (события) четырех типов [4] с оценкой осуществимости отдельных локальных стохастических вариантов и вероятностей исходов. В исследовании альтернативных сетей применяется принцип укрупнения сети и получения графа с вершинами особых состояний – дерева исходов.

Все описанные ранее системы PERT, GERT и VERT не носят управляющий характер. Необходимость включения управляющих воздействий привела к созданию АСМ, имеющих в своем составе детерминированные точки ветвления и осуществляющих в этих точках принятие решений, т. е. корректировку управления проектом на стадии оперативного управления. В монографии [4] приведены ссылки на работы ее автора Д. И. Голенко-Гинзбурга, где впервые были рассмотрены управляющие АСМ-модели CAAN (Controlled Alternative Activity Network) и GAAN (Generalized Alternative Activity Network). Задачей современной теории управления проектами является разработка качественно

новых моделей и методов управления. Одним из подходов является разработка циклических альтернативных сетевых моделей [1, 2], которые при соответствующих ограничениях приводят к рассмотренным ранее типам моделей.

В магистерской работе, которая анонсируется в данной статье, приведен детальный анализ различных подходов к методам анализа и управления проектами с применением соответствующего математического аппарата, что иллюстрируется рядом примеров. Помимо этого приводятся практические реализации модельных задач проектирования для детерминированного и вероятностного случаев с использованием приложения MS Project.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Баркалов С. А. *Математические основы управления проектами. Учебное пособие под ред. В. Н. Буркова.* – / В. И. Воропаев, Г. И. Скелетова. – М. : Высшая школа, 2005. – 423 с.
- [2] Воропаев В. И. *Новые модели и методы для управления проектами.* – / В. И. Воропаев, Я. Д. Гельруд, Д. И. Гинзбург и др. // Труды межд. симпозиума «SOVNET-99». Управление проектами: Восток-Запад – грань тысячелетий. SOVNET. – М., 1999. Т. 1. – С. 295 – 312.
- [3] Голенко Д. И. *Статистические методы сетевого планирования и управления.* – / Д. И. Голенко. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 400 с.
- [4] Голенко-Гинзбург Д. И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками: Монография.* – / Д. И. Голенко-Гинзбург. – Воронеж : «Научная книга», 2010. – 284 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция МАТЕМАТИКА	3
Александрова Т.В. Вопросы возникновения и развития теории чисел в учебном курсе "История математики"	3
Асанов Р.М. Алгебры Наймарка и теорема Фуглида.....	7
Белялова А.Р. s - числа измеримых операторов	11
Быкова Е.О. Интегро-дифференциальные уравнения типа Бенджамина-Оно.....	14
Домбровская А.Г. Решение задач на условный экстремум методом введения вспомогательного параметра.....	16
Друшляк А.И. Классические и неклассические конусы в негладком анализе.....	20
Желудок В.Д. Решение некоторых операторных дифференциальных уравнений.....	24
Желудок В.С. Методика преподавания темы: « Функции многих пе- ременных, неявные функции и их приложения»	26
Жолудева А.К. Субгладкая форма теоремы об обратной и неявной функции и некоторые её приложения.....	28
Ибрагимов С.Д. Периодические решения феноменологического урав- нения горения вдоль полосы.....	32
Ибрагимова С.З. Реализация APPLY-операции для УБДР некоторых КА	35
Исмаилова Д.И. Критические точки развитие математики, как ис- точник изучения философии математики	38
Кадырова М. Р. Некоторые вопросы повышения квалификации учи- телей математики.....	41

Казимова З.А. Классификация критических случаев устойчивости в импульсной системе	45
Магера Ю.В. Полунормальная форма одной периодической импульсной системы	48
Марчик В.А. Способы и методы решения иррациональных уравнений и неравенств	53
Морозова В.П. Плоские кривые с группой симметрии правильного шестиугольника	56
Муединова Н.Н. Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана	58
Муратова У.С. Проект по созданию программы тестирования на языке C #	62
Наумчик К.В. Содержание и методическое оснащение дистанционного изучения курса "Алгебра" в средней школе	66
Новик А.Ю. Двумерные бесконечные системы уравнений типа свертки	70
Попова Е.Н. О дифференцируемости в нормированных конусах с частичным дистрибутивным законом	72
Рогожинару Н.Д. Разностно-краевые задачи типа Карлемана для полосы	76
Рустем Д.Р. Задачи восстановления по данным косвенных измерений	78
Смаилова Э.Р. Факторы типа (II_1)	80
Сошенкова Е.В. Об устойчивости решений рекуррентных уравнений	86
Степанов А.Н. Интеграл Бохнера в нормированных конусах	89
Толочко А.К. Дистанционное обучение по теме "Геометрия"	93

Трушина А.П. О некоторых задачах с параметрами в курсе алгебры основной школы	96
Харак В.А. Интеллект-карты – как способ эффективной обработки математической информации	99
Якубова А.Р. Эволюционные и спектральные задачи, порожденные несимметрическими полуторалинейными формами	102
Секция ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	107
Никифоров С.В. Визуализация трехмерных динамических объектов на примере кубика Рубика	107
Терещенко А.С. Выбор инструментов обработки данных в системах поддержки принятия решений	110
Халилова С.М. Разработка мобильных приложений учебного назначения. Обучение крымскотатарскому языку	113
Шпилевой Е.В. Исследования температурных напряжений в прямоугольной призме	115
Секция ИНФОРМАТИКА	118
Авагян Э.А. Взаимодействие интерфейсов прикладного программирования при автоматизации составления расписания учебных занятий	118
Аметов О.З. Игровые модели автоматического управления наземным транспортом на основе нечеткой логики	120
Амонтьев П.А. Визуализация методов численного решения систем алгебраических уравнений	124
Апанович Д.А. Проектирование системы безопасности приватной компьютерной сети	127
Баклушин С.Ю. Выявление закономерностей во множествах данных на основе моделей дисперсионного анализа	131

Белозуб В.А. Интеллектуализация обработки данных в задачах восстановления изображений.....	134
Булатов Ф.Э. Проблема принятия решений и задача многокритериальной оптимизации.....	138
Ганиев И.Ш. Распознавание структуры рукописной таблицы.....	140
Гребеньков П.В. Объектная модель задачи оптимального проектирования.....	144
Дашков Н.А. Моделирование реалистичных эффектов при соударениях.....	147
Деньшаева Л.С. Разработка веб-приложения физического процесса диффузии газа.....	150
Дергачёв Е.И. Оценивание коэффициентов в моделях ARMA.....	153
Иванов О.О. Временные параметры в вероятностных задачах управления проектами.....	156
Капшин В.Ю. Разработка Android приложения для контроля знаний учащихся.....	159
Кутайсов Д.В. Обзор подходов, использующихся при построении рекомендательных систем.....	162
Куценко В.В. Сравнительный анализ алгоритмов нахождения максимального разреза.....	166
Лисовицкий Д.В. Распознавание дорожных знаков на изображении.....	169
Максимов Н.К. Современные подходы к реализации физической модели освещения в 3D-пространстве.....	173
Рычков А.Ю. Прогнозирование временных рядов методом группового учета аргументов.....	176
Сабитов Э.Ш. Сравнение оценочных функций при реализации эвристического поиска.....	179

Сидаченко М.В. Использование языка Prolog при создании системы аналитических вычислений	181
Соколов Б.С. Персистентные структуры данных и их эффективная реализация	184
Столяров Е.А. Поиск текстовых блоков на изображении	188
Тямгин И.А. Алгоритмы сравнительного анализа фрагментов кода на основе теории компиляции	190
Филиппова Д.Ю. Формирование компетенций в области ИКТ у студентов высшей школы	194
Холодинская Т. В. Полнота множества ключевых импликаций формального контекста	197
Щупляк Я.И. Временные параметры в вероятностных задачах управления проектами	202