

Крымский научный центр НАН Украины

Таврический национальный университет  
им. В.И. Вернадского

ТАВРИЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ



22-25 апреля 2014  
КНЦ НАНУ  
Симферополь

**Редакционный совет:**

**Рудницкий О. И.**, к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики и информатики ТНУ им. В.И. Вернадского

**Донской В. И.**, д.ф.-м.н., профессор, гл. научный сотрудник  
КНЦ НАН Украины

**Копачевский Н. Д.**, д.ф.-м.н., профессор

**Орлов И. В.**, д.ф.-м.н., профессор

**Чехов В. Н.**, д.ф.-м.н., профессор

**Анашкин О. В.**, д.ф.-м.н., профессор

**Техническая группа:**

**Марянин Б. Д.**, к.ф.-м.н., доцент, ответственный редактор

**Войтицкий В. И.**, к.ф.-м.н., доцент, выпускающий редактор

**СЕКЦИИ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ:**

1. МАТЕМАТИКА, председатель Копачевский Н. Д.  
математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра,  
функциональный анализ, геометрия
2. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, председатель Чехов В. А.  
математические модели в естествознании, численные методы решения  
математических задач
3. ИНФОРМАТИКА, председатель Донской В. И.  
прикладная информатика, программное обеспечение компьютерных систем

Печатается по решению научно-технического Совета КНЦ НАНУ  
Министерства образования и науки Украины от 2 апреля 2014 года,  
протокол 4.

подписано к печати 04.04.2014 г.  
отпечатано в типографии КНЦ НАНУ

## Секция МАТЕМАТИКИ

### FT-алгебры и PT-алгебры

Аликina Екатерина Александровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500М)

e-mail: alikina.katya@gmail.com

Пусть  $\mathbf{A}$  — алгебра над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$  с инволюцией  $*$ .

**Определение 1.** Говорят, что в алгебре  $\mathbf{A}$  "имеет место теорема Фуглида" , если в  $\mathbf{A}$  выполнено следующее условие:

$$a, b \in \mathbf{A}, a^*a = aa^*, ba = ab \implies ba^* = a^*b.$$

В этом случае алгебра  $\mathbf{A}$  называется FT-алгеброй.

Из теоремы Б. Фуглида (см. [1]) следует, что алгебра  $B(H)$  всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве  $H$ , а значит, и любая ее подалгебра, являются FT-алгебрами.

**Определение 2.** Говорят, что в алгебре  $\mathbf{A}$  "имеет место теорема Путнама" , если в  $\mathbf{A}$  выполнено следующее условие:

$$a_1, a_2, b \in \mathbf{A}, a_1^*a_1 = a_1a_1^*, a_2^*a_2 = a_2a_2^*, ba_1 = a_2b \implies ba_1^* = a_1^*b.$$

В этом случае алгебра  $\mathbf{A}$  называется PT-алгеброй.

В работе [2] Putnam C.R. показал, что алгебра  $B(H)$  является PT-алгеброй. Ясно, что не всякая FT-алгебра является PT-алгеброй. Рассмотрим (следуя S.K. Berberian [3]), некоторые соотношения между этими понятиями.

Обозначим через  $\mathbf{A}_n$  — алгебру всех  $n \times n$  матриц  $x = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} \in \mathbf{A}$ , в которой рассматривается обычная "симметрично-сопряженная" инволюция  $x^* = (a_{ij}^*)$ .

**Теорема 1.** Если алгебра  $\mathbf{A}_2$  является FT-алгеброй, то алгебра  $\mathbf{A}$  — PT-алгебра.

*Доказательство.*  $a_1, a_2, b \in \mathbf{A}$ ,  $a_1^*a_1 = a_1a_1^*$ ,  $a_2^*a_2 = a_2a_2^*$  и  $ba_1 = a_2b$ . Определим элементы  $x, y \in \mathbf{A}_2$  равенствами:

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что элемент — нормальный, и

$$yx = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ba_1 & 0 \end{pmatrix} \quad xy = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2b & 0 \end{pmatrix}$$

В силу условия теоремы,  $yx = xy$ . Поскольку алгебра  $\mathbf{A}_2$  является  $FT$ -алгеброй, то  $yx^* = x^*y$ . Таким образом,  $ba_1^* = a_2^*b$ , т.е.  $\mathbf{A}$  —  $PT$ -алгебра..  $\square$

**Пример 1.** Пусть  $\mathbf{A} = B(H)$ . Тогда  $\mathbf{A}_2 = B(H \oplus H)$ . По теореме Фуглида  $\mathbf{A}_2$  —  $FT$ -алгебра. Следовательно,  $\mathbf{A}$  —  $PT$ -алгебра.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{A}$  —  $PT$ -алгебра,  $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$ ,  $a_1^*a_1 = a_1a_1^*$ ,  $a_2^*a_2 = a_2a_2^*$  — нормальные, и  $x \in \mathbf{A}_2$  такой, что

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Если  $y \in \mathbf{A}_2$  и  $xy = yx$ , то  $x^*y = yx^*$ .

*Доказательство.* Так как

$$x^*x = \begin{pmatrix} a_1^* & 0 \\ 0 & a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^*a_1 & 0 \\ 0 & a_2^*a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_1^* & 0 \\ 0 & a_2a_2^* \end{pmatrix} = xx^*,$$

то элемент  $x \in \mathbf{A}_2$  — нормальный. Пусть  $y \in \mathbf{A}_2$  такой, что

$$y = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$$

и  $xy = yx$ . Тогда

$$xy = \begin{pmatrix} a_1^* & 0 \\ 0 & a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^*b & a_1^*c \\ a_2^*d & a_2^*e \end{pmatrix},$$

$$yx = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & 0 \\ 0 & a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba_1^* & ca_2^* \\ da_1^* & ea_2^* \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} a_1^*b = ba_1^* \\ a_1^*c = ca_2^* \\ a_2^*d = da_1^* \\ a_2^*e = ea_2^* \end{cases} \implies \begin{cases} a_1^*b = ba_1^* \\ a_1^*c = ca_2^* \\ a_2^*d = da_1^* \\ a_2^*e = ea_2^* \end{cases}.$$

Таким образом,  $x^*y = yx^*$ .  $\square$

**Определение 3.** Говорят, что алгебра  $\mathbf{A}$  "удовлетворяет аксиоме квадратного корня" , если в алгебре  $\mathbf{A}$  выполнено условие  $(SR)$ :

Для любого  $a \in \mathbf{A}$  существует  $r \in \mathbf{A}$  такой, что  $r^* = r$ ,  $r^2 = a^*a$  и если  $b(a^*a) = (a^*a)b$ ,  $b \in \mathbf{A}$ , то  $br = rb$ .

Как известно, любая  $C^*$ -алгебра удовлетворяет  $(SR)$ -условию.

Пусть теперь  $\mathbf{A}$  — алгебра, удовлетворяющая  $(SR)$ -условию и элемент  $a \in \mathbf{A}$  — обратим. Рассмотрим элемент  $u = ar^{-1}$ , где  $r^* = r$  и  $r^2 = a^*a$ . Легко видеть, что  $u^*u = uu^* = 1$ , т.е. элемент  $u$  — унитарный.

Представление  $a = ur$  называется полярным разложением элемента  $a$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{A}$  —  $PT$ -алгебра, удовлетворяющая  $(SR)$ -условию. Если нормальные элементы  $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$  — подобные, то они унитарно эквивалентны.

*Доказательство.* нормальные элементы  $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$  — подобны, т.е. существует обратимый элемент  $b \in \mathbf{A}$  такой, что

$$ba_1 = a_2b.$$

Так как  $\mathbf{A}$  —  $PT$ -алгебра, то  $ba_1^* = a_2^*b$ , и значит  $a_1b^* = b^*a_2$ .

Пусть  $b = ur$  — полярное разложение элемента  $b$ , где  $r^2 = b^*b$ . Тогда

$$a_1(b^*b) = (a_1b^*)b = (b^*a_2)b = b^*(a_2b) = b^*(ba_1) = (b^*b)a_1.$$

Следовательно,  $a_1$  и  $b^*b = r^2$  коммутируют. Тогда, в силу  $(SR)$ -условия,  $a_1r = ra_1$ .

Далее,

$$a_2 = ba_1b^{-1} = (ur)a_1(r^{-1}u^*) = u(a_1r)r^{-1}u^* = ua_1u^*,$$

т.е. элементы  $a_1$  и  $a_2$  — унитарно эквивалентны.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fuglede B. *A commutativity Theorem for Normal Operators.* — Proc. Nat. Acad. Sci USA, — 1950. — Vol. 36. — P. 35-40.
- [2] Putnam C.R. *On Normal Operators in Hilbert Space.* — Amer. J. Math, — 1951. — Vol. 73. — P. 357-362.
- [3] S.K. Berberian, *Note on a theorem of Fuglede and Putman.* — Proc. Amer. Math. Soc, — 1959. — Vol. 10, P. 175–182.

## Исследование двухлинейной системы массового обслуживания

*Аржанникова Яна Владимировна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500М)

e-mail: arzhannikova.yana@mail.ru

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

На систему массового обслуживания, состоящую из двух разных линий поступает простейший поток заявок с параметром  $\lambda$ . Время обслуживания заявки первой линией — непрерывная случайная величина  $\omega$  с интенсивностью  $\mu(x)$ . Время обслуживания второй линией распределено экспоненциально с параметром  $\nu$ . Заявка, поступившая на свободную систему немедленно начинает обслуживаться первой линией. Далее, если в момент поступления заявки одна из линий свободна, то она немедленно приступает к обслуживанию этой заявки. Если же обе линии заняты, то поступившая заявка становится в очередь (длина очереди неограничена). При наличии очереди освободившаяся от обслуживания линия немедленно приступает к обслуживанию заявки, стоящей в первой очереди. Требуется найти вероятностные характеристики системы.

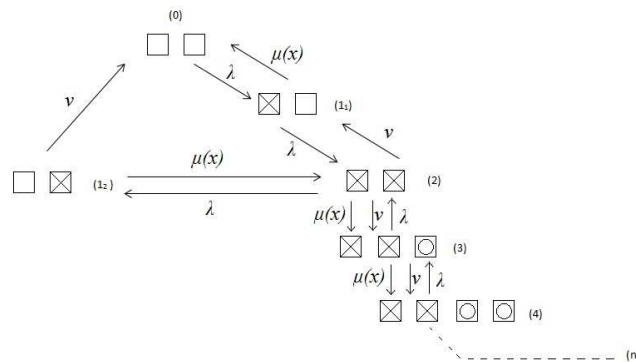


Рис. 1. Диаграмма переходов системы

## СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

Обозначим через  $\xi(t)$  случайный процесс, фазовым пространством которого являются состояния системы, обозначенные в диаграмме.

Введем функции:

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}, \quad k = 0, 1_1, 1_2, 2, 3, 4 \dots$$

$$Q_{1_1}(t, x) = P\{\xi(t) = 1_1, \omega < x\}, \quad q_{1_1}(t, x) = \frac{\partial Q_{1_1}(t, x)}{\partial x}$$

$$Q_k(t, x) = P\{\xi(t) = k, \omega < x\}, \quad q_k(t, x) = \frac{\partial Q_k(t, x)}{\partial x}, \quad k = 2, 3, \dots$$

В результате вероятностных рассуждений и предельных переходов получим систему интегро-дифференциальных уравнений с граничными условиями. Далее используем свойство эргодичности и перейдем к пределу при  $t \rightarrow \infty$ .

Введем обозначения:

$$p_k := \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t), \quad k = 0, 1_1, 1_2, 2, 3, 4 \dots$$

$$g_k(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} q_k(t, x), \quad k = 1_1, 1_2, 2, 3, 4 \dots$$

В результате получим систему интегро-дифференциальных уравнений и начальных условий для стационарного режима:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda p_0 = \int_0^{\infty} g_{1_1}(x) \mu(x) dx + \nu p_{1_2}; \\ g'_{1_1}(x) + (\mu(x) + \lambda) g_{1_1}(x) = \nu g_2(x), \quad g_{1_1}(0) = \lambda p_0 \\ (\lambda + \nu) p_{1_2} = \int_0^{\infty} g_2(x) \mu(x) dx \\ g'_2(x) + (\mu(x) + \nu + \lambda) g_2(x) = \lambda g_{1_1}(x) + \nu g_3(x), \quad g_2(0) = \lambda p_{1_2} + \int_0^{\infty} g_3(x) \mu(x) dx \\ \dots \dots \dots \\ g'_k(x) + (\mu(x) + \nu + \lambda) g_k(x) = \lambda g_{k-1}(x) + \nu g_{k+1}(x), \\ g_k(0) = \int_0^{\infty} g_{k+1}(x) \mu(x) dx, \quad k = 3, 4, \dots \end{array} \right.$$

Для решения этой бесконечной системы используется производящая функция последовательности функций  $\{g_{1_1}(x), g_2(x), g_3(x), \dots\}$ , в терминах которой получены стационарные вероятности состояний системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коваленко А.И. *Спецкурс: "Элементы математической теории надежности"*/ Коваленко А.И. — 23 с.
- [2] Овчаров Л.А. *Прикладные задачи теории массового обслуживания.*/ Овчаров Л.А. — М.: Машиностроение, 1969. — 324с.
- [3] Клейнрок Л. *Теория массового обслуживания.*/ Клейнрок Л. — М.: Машиностроение, 1976. — 214с.

## Смешанные краевые задачи сопряжения для оператора Лапласа

*Бастрюкова Виктория Евгеньевна, Радомирская Карина Александровна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)  
e-mail: vika-kitten@rambler.ru, radomirskaya@mail.ru

### 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Обобщенная формула Грина для оператора Лапласа.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  - область с липшицевой границей  $\Gamma := \partial\Omega$ . Введем гильбертовы пространства  $L_2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $L_2(\Gamma)$  со стандартными скалярными произведениями.

Далее понадобится такое утверждение.

**Теорема 1.** *Имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} (\eta u + \nabla \eta \cdot \nabla u) d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad (1)$$

$\forall \eta, u \in H^1(\Omega)$ ,

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \gamma \eta := \eta|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma), \partial u := \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (2)$$



**1.2. Обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач.** Пусть липшицева граница  $\Gamma := \partial\Omega$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  разбита на непересекающиеся куски  $\Gamma_k$  с липшицевыми границами  $\partial\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, q}$ .

**Теорема 2.** В сформулированных условиях имеет место обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (3)$$

$$\gamma_k \eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1, q}. \quad (4)$$

**Замечание 1.** Для оснащения  $F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*$  косыми скобками  $\langle \eta, v \rangle_E$  обозначают значение функционала  $v \in F^*$  на элементе  $\eta \in F$ .

## 2. СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

**2.1. Постановка задачи.** Теорема (1) п. 1.2 позволяет исследовать смешанные краевые задачи для оператора Лапласа для одной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , а также для случая двух и более примыкающих друг к другу областей, когда на границах стыка ставятся условия сопряжения.

Рассмотрим сначала краевую задачу сопряжения для двух областей. Будем считать, что области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  из  $\mathbb{R}^m$  примыкают друг к другу по части их границы  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  и имеют также свободные границы  $\Gamma_{11}$  и  $\Gamma_{22}$  соответственно, причем  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$  липшицевы, а их части  $\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{22}$  и  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  также липшицевы и имеют свои липшицевы границы  $\partial\Gamma_{11}$ ,  $\partial\Gamma_{22}$  и  $\partial\Gamma_{11} = \partial\Gamma_{22}$ . Далее через  $\gamma_{jk}u_k$  будем обозначать след функции  $u_k(x)$ ,  $x \in \Omega_k$  на границе  $\Gamma_{jk}$ , а через  $\partial_{jk}u_k$  - соответствующую производную по внешней нормали.

Формулировка краевой задачи сопряжения для двух областей такова. Нужно найти пару функций  $u = (u_1; u_2)$  из следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 &= f_1(\Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1(\Gamma_{11}), \\ u_2 - \Delta u_2 &= f_2(\Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2(\Gamma_{22}), \end{aligned} \quad (5)$$

а также условий сопряжения:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12}(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \quad (6)$$

Решение этой задачи будем разыскивать в пространстве

$$H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2). \quad (7)$$

Наша цель - выяснить необходимые и достаточные условия на заданные функции  $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{12}$  и  $\psi_{12}$ , при которых задача (3), (13) имеет слабое решение в  $H^1(\Omega)$ .

В силу линейности задачи ее решение может быть представлено в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородности в уравнениях и в краевых условиях лишь в одном месте, т.е. либо в уравнении, либо в одном краевом условии.

Рассмотрим четыре вспомогательные задачи. Первая из них - это разделенная вспомогательная задача Зарембы. Для  $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}) \in H^1(\Omega)$  она формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{11} - \Delta u_{11} &= 0(\Omega_1), \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1(\Gamma_{11}), \partial_{21}u_{11} = 0(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \\ u_{12} - \Delta u_{12} &= 0(\Omega_2), \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2(\Gamma_{22}), \partial_{12}u_{12} = 0(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned}$$

**Теорема 3.** *Каждая из задач Зарембы имеет слабое решение из подпространства квазигармонических функций  $H_h^1(\Omega_k) \subset H^1(\Omega_k)$ ,  $k = 1, 2$ , тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}), \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

При этом

$$u_{1k} = \tilde{\gamma}_{kk}^{-1} \varphi_k, \quad \tilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathfrak{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), H_h^1(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Вторая вспомогательная задача - это задача типа Стеклова. Для  $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22})$  она формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{21} - \Delta u_{21} &= 0(\Omega_1), \gamma_{11}u_{21} = 0(\Gamma_{11}), \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \tilde{\varphi}_{12} := \\ &:= \varphi_{12} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12}, \partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} = 0(\Gamma_{12}); \\ u_{22} - \Delta u_{22} &= 0(\Omega_2), \gamma_{22}u_{22} = 0(\Gamma_{22}). \end{aligned}$$

Решение этой задачи можно представить с помощью двух других вспомогательных задач Зарембы с однородным условием, однородным условием Дирихле и неоднородным условием Неймана. На этой основе доказан следующий результат.

**Теорема 4.** *Для того, чтобы задача Стеклова имела слабое решение из  $H_h^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^2 H_h^1(\Omega_k)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}), \quad (10)$$

*а также условия (15).*

Следующий этап - первая вспомогательная задача С.Крейна. Она формулируется таким образом: нужно найти  $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}) \in H^1(\Omega)$  из системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} u_{31} - \Delta u_{31} &= f_1(\Omega_1), \gamma_{11}u_{31} = 0(\Gamma_{11}), \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ u_{32} - \Delta u_{32} &= f_2(\Omega_2), \gamma_{22}u_{32} = 0(\Gamma_{22}), \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned}$$

Введем в  $H^1(\Omega)$  подпространство

$$V_{\Gamma}^1(\Omega) := \{(u_1; u_2) \in H^1(\Omega) : \gamma_{kk}u_k = 0(\Gamma_{kk}), k = \overline{1, 2}; \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0(\Gamma_{12})\}. \quad (11)$$

**Теорема 5.** *Первая вспомогательная задача С. Крейна имеет слабое решение  $u_{(3)} \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2) \in (V_{\Gamma}^1(\Omega))^*, \quad V_{\Gamma}^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (V_{\Gamma}^1(\Omega))^*. \quad (12)$$

В частности, если

$$f = (f_1; f_2) \in \bigoplus_{k=1}^2 L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (V_{\Gamma}^1(\Omega))^*, \quad (13)$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение.

Рассмотрим, наконец, четвертый этап. Это - вторая вспомогательная задача С. Крейна. Для  $u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}) \in H^1(\Omega)$  она формулируется так:

$$\begin{aligned} u_{41} - \Delta u_{41} &= 0(\Omega_1), \gamma_{11}u_{41} = 0(\Gamma_{11}), \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ u_{42} - \Delta u_{42} &= 0(\Omega_2), \gamma_{22}u_{42} = 0(\Gamma_{22}), \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = \psi_{12}(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned}$$

**Теорема 6.** *Вторая вспомогательная задача С. Крейна имеет единственное слабое решение  $u_{(4)} \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi_{12} \in H^{-1/2}(\Gamma_{12}). \quad (14)$$

Итогом рассмотрения смешанной краевой задачи сопряжения (3), (13) является следующее утверждение.

**Теорема 7.** *Эта задача имеет единственное слабое решение из пространства  $H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^2 H^1(\Omega_k)$  тогда и только тогда, когда выполнены условия (15), (17), (19), (14). При этом решение задачи (3), (13) является суммой решений четырех вспомогательных краевых задач, рассмотренных выше.*

### 3. СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХ ОБЛАСТЕЙ

**3.1. Постановка задачи.** Рассмотрим по аналогии с предыдущим параграфом задачу сопряжения для трех областей, примыкающих друг к другу следующим образом (схема - банан, разрезанный на три части). Будем считать, что область  $\Omega_1$  имеет свободную границу  $\Gamma_{11}$  и границу стыковки  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  с областью  $\Omega_2$ . Она, в свою очередь, имеет свободную границу  $\Gamma_{22}$  и наряду с  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  имеет границу стыковки с областью  $\Omega_3$  по границе  $\Gamma_{23} = \Gamma_{32}$ . Наконец, область  $\Omega_3$ , как уже упоминалось, имеет границу стыковки  $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$  с областью  $\Omega_2$ , а также свободную границу  $\Gamma_{33}$ , причем  $\Omega_3$  не имеет границы стыковки с  $\Omega_1$ .

Тогда постановка задачи для выбранной конфигурации при стыкованных областях такова. Нужно найти решение  $u := (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^3 H^1(\Omega_k)$  из следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 &= f_1(\Omega_1), \gamma_{11} u_1 = \varphi_1(\Gamma_{11}), \\ u_2 - \Delta u_2 &= f_2(\Omega_2), \gamma_{22} u_2 = \varphi_2(\Gamma_{22}), \\ u_3 - \Delta u_3 &= f_3(\Omega_3), \gamma_{33} u_3 = \varphi_3(\Gamma_{33}), \end{aligned}$$

а также условий сопряжения:

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 &= \varphi_{12}, \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{12}(\Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \\ \gamma_{32} u_2 - \gamma_{23} u_3 &= \varphi_{23}, \partial_{32} u_2 + \partial_{23} u_3 = \psi_{23}(\Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{aligned}$$

**3.2. Итоги исследования проблемы.** Сформулированная задача обобщает задачу параграфа 2, однако может быть сформулирована теми же методами. Именно, ее решение можно представить в виде суммы решений четырех вспомогательных задач (Зарембы, Стеклова и двух задач С. Крейна). Не приводя подробных выкладок, сформулируем итоговый результат.

**Теорема 8.** Пусть области  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , имеют липшицевы границы  $\partial\Omega_k$ , разбитые на липшицевы куски с их липшицевыми границами ( $\partial\Gamma_{jj}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , а также  $\partial\Gamma_{12}$  и  $\partial\Gamma_{23}$ ). Для того, чтобы эта задача имела единственное решение из пространства  $H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^3 H^1(\Omega_k)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}), \quad k = \overline{1, 3}, \quad \varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}), \quad \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}), \\ \psi_{12} \in H^{-1/2}(\Gamma_{12}), \quad \psi_{23} \in H^{-1/2}(\Gamma_{23}), \end{aligned}$$

а также условие

$$f := (f_1; f_2; f_3) \in (V_\Gamma^1(\Omega))^*, \quad V_\Gamma^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (V_\Gamma^1(\Omega))^*,$$

$$V_\Gamma^1(\Omega) := \{(u_1, u_2, u_3) \in H^1(\Omega) : \gamma_{jj}u_j = 0 (\Gamma_{jj}), j = \overline{1,3}$$

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0 (\Gamma_{12}), \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0 (\Gamma_{23})\}.$$

Это решение является суммой решений четырех упомянутых выше вспомогательных краевых задач.

Авторы благодарят профессора Копачевского Н.Д за постановку задачи, руководство работой и полезные обсуждения проблемы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи.* – Симферополь: КНЦ ТНУ, – 2011.
- [2] Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина: специальный курс лекций.* – Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.Ф. – 2011 – С. 136.
- [3] Агранович М.С. *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи матем. наук.* – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С.378.
- [4] Агранович М.С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей.* – М.: МЦНМО, –2013. – С.379.

## Геометрия ортопроекторов в алгебре фон Нейманна

Белялова Азизе Рустемовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404)

e-mail: asya1933matan@mail.com

Пусть  $H$  – гильбертово пространство и  $B(H)$  –  $C^*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в  $H$ . Для произвольного подмножества  $M \subseteq B(H)$  через  $M'$  и  $M''$  обозначим коммутант и бикоммутант  $M$ , т.е.

$$M' = \{S \in B(H) : TS = ST \forall T \in M\}$$

и

$$M'' = \{T \in B(H) : ST = TS \forall S \in M'\}$$

Ясно, что  $M'$  является унитарной подалгеброй (подалгеброй, содержащей тождественный оператор  $I$ ) в  $B(H)$  и, что *бикоммутант*  $M''$  содержит  $M$ :

$$M \subseteq M''.$$

**Определение 1.** *\*-подалгебра  $M \subseteq B(H)$  называется алгеброй фон Неймана, если  $M = M''$ .*

Пусть  $M$  — алгебра фон Неймана. Обозначим через  $P(M)$  всех ортопроекторов из  $M$ :

$$P(M) = \{P \in M : P^2 = P^* = P\}$$

Проекторы  $E$  и  $F$  из  $P(M)$  называются *эквивалентными* (обозначение:  $E \sim F$ ), если существует частичная изометрия  $V \in M$ , для которой проектор  $E$  является начальным, а проектор  $F$  — конечным; в частности

$$VE = V = FV, EV^* = V^* = V^*F.$$

Отношение " $\sim$ " является отношением эквивалентности на  $P(M)$ .

Говорят, что проектор  $E$  *мажорируется* проектором  $F$  или *имеет меньшую относительную размерность* (обозначение:  $E \preceq F$ ), если существует такой проектор  $F_1 \leq F$ , что  $E \sim F_1$ .

Рассмотрим некоторые свойства введенных отношений частичного порядка на множестве  $P(M)$ .

**Теорема 1 (фон Неймана - Шрёдера - Бернштейна).** *Пусть  $E, F \in P(M)$ . Если  $E \prec F$  и  $F \prec E$ , то  $E \sim F$*

*Доказательство.* Пусть  $W, V \in M$  такие частичные изометрии, что

$$\begin{aligned} WW^* &= E, & W^*W &\leq F \\ VV^* &= F, & V^*V &\leq E \end{aligned}$$

Для  $G \in P(M)$ ,  $G \leq F$  определим:

$$\Phi(G) = F - W^*(E - V^*GV)W$$

Если  $G_1, G_2 \in \{G \in P(M), G \leq F\}$  и  $G_1 \leq G_2$ , то

$$\begin{aligned} V^*G_1V &\leq V^*G_2V \\ E - V^*G_1V &\geq E - V^*G_2V \\ W^*(E - V^*G_1V)W &\geq W^*(E - V^*G_2V)W \\ \Rightarrow \Phi(G_1) &\leq \Phi(G_2) \end{aligned}$$

Пусть  $\mathfrak{X} = \{G : G \leq \Phi(G)\}$  и  $N = \bigvee_{G \in \mathfrak{X}} G$ . Если  $G \in \mathfrak{X}$ , то  $G \leq N$  и, следовательно,  $G \leq \Phi(G) \leq \Phi(N) \Rightarrow \bigvee_{G \in \mathfrak{X}} G \leq \Phi(N) \Rightarrow N \leq \Phi(N) \Rightarrow N \in \mathfrak{X}$ .

Обратно,  $\Phi(N) \leq \Phi \Rightarrow \Phi(N) \in \mathfrak{X} \Rightarrow \Phi(N) \leq N \Rightarrow \Phi(N) = N$  т.е.

$$\begin{aligned} N &= F - W^*(E - V^*NV)W \\ N - F &= W^*(E - V^*NV)W \\ \Rightarrow F - N &\sim E - V^*NV \quad \text{и} \quad N \sim V^*HN \end{aligned}$$

□

**Утверждение 1.** Для  $P, Q \in P(M)$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $|P - Q| \leq P + Q$
- (2)  $PQP \leq Q$
- (3)  $PQ = QP$

**Теорема 2.** Пусть  $\{P_k\}_{k=1}^n \subset P(M)$ ,  $n \geq 2$ . Тогда  $P_k P_i = 0$ ,  $i, k = \overline{1, n}$ ,  $i \neq k$   
 $\Leftrightarrow$

$$A_k = \left| \prod_{k=1}^n (E + P_k) \right| \leq 2E$$

*Доказательство. Необходимость* Пусть  $\{P_k\}_{k=1}^n \subset P(M)$  и  $P_k P_i = 0$  при  $k \neq i$ , тогда

$$A_k = \prod_{k=1}^n (E + P_k) = E + \sum_{k=1}^n P_k \leq 2E$$

*Достаточность*  $|X| \leq \lambda E \Leftrightarrow |X|^2 \leq \lambda^2 E$  ( $X \in B(H)$ ,  $\lambda \geq \|X\|$ )  
 Применим метод математической индукции Для  $n = 2$  имеем:

$$\begin{aligned} A_2^2 &= (E + P_2) \cdot (E + P_1)^2 \cdot (E + P_2) = (E + P_2) \cdot (E + 3P_1) \cdot (E + P_2) \\ &= E + (P_1 + P_2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2 P_1 P_2) = E + 3(P_1 + P_2)^2 + 3P_2 P_1 P_2 \leq 4E \end{aligned}$$

Т.к.  $P_2 P_1 P_2 \geq 0$ , то  $(P_1 + P_2)^2 \leq E$ , отсюда следует, что  $P_1 + P_2 \leq E$ . Следовательно,

$$P_1 P_2 = 0 \tag{1}$$

Пусть теорема верна для  $n \leq m - 1$  и

$$A_m^2 = (E + P_m) \cdot (E + P_{m-1}) \cdots (E + P_1) \cdot (E + P_1) \cdots (E + P_{m-1}) (E + P_m) \leq 4E$$

т.е

$$(E + P_m) A_{m-1}^2 (E + P_m) \leq 4E.$$

Умножим это неравенство с обеих сторон на  $(E + P_m)^{-1}$ , имеем

$$A_{m-1}^2 \leq 4(E + P_m)^{-2} = 4(E + 3P_m)^{-1} \leq 4E.$$

По индукции  $\{P_k\}_{k=1}^{m-1}$  – набор попарно ортогональных проекторов. Теперь

$$\prod_{k=1}^{m-1} (E + P_k) = E + \sum_{k=1}^{m-1} P_k = E + \Lambda, \quad \Lambda \in P(M)$$

поэтому

$$A_m^2 = (E + P_m) \cdot (E + R)^2 \cdot (E + P_m) \leq 4E$$

и  $P_m \cdot R = 0$  в силу (1). Кроме того  $0 \leq P_m \cdot P_k \cdot P_m \leq P_m \cdot R \cdot P_m$ , тем самым  $|P_k \cdot P_m|^2 = 0$  и  $P_k \cdot P_m = 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, m-1$ .  $\square$

**Замечание 1.** Пусть  $\{P, Q\} \subset P(M)$  Имеем

$$P + Q \leq E \Leftrightarrow P \cdot Q = Q \cdot P = 0;$$

$$P + Q \leq E + P \wedge Q \Leftrightarrow P \cdot Q = Q \cdot P$$

В обеих эквивалентностях оператор  $E$  можно заменить на  $P \vee Q$ .

**Замечание 2.** В эквивалентности  $P \wedge Q \leq P + Q \Leftrightarrow P \cdot Q = Q \cdot P$  импликация  $\Rightarrow$  следует из замечания 1:  $R = P \vee Q - P \leq Q$ , поэтому  $R \leq Q \cdot R = R \cdot Q$  и  $P \cdot Q = Q \cdot P$  в силу равенства  $P = P \vee Q - R$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов* – Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – т.69.– 390с.
- [2] Бикчентаев А.М. *Перестановочность проекторов и характеристика следа на алгебрах фон Нейманна* – Сибирский математический журнал. – Ноябрь–декабрь, 2010. – Том 51, №6
- [3] Strătilă S., L. Zsidó L.. *Lectures on von Neumann algebras* – Bucharest: Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.

## Теорема о среднем для $K$ -субдифференцируемых отображений

*Жолудева Анастасия Константиновна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 401)

e-mail: Natusua.j93@mail.ru



В данной работе рассматриваются формула конечных приращений и теорема о среднем для компактно субдифференцируемых отображений в нормированных пространствах

## ВВЕДЕНИЕ И ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В работах И. В. Орлова, Ф. С. Столякина и Э. И. Халиловой (см. пример [1]) было введено понятие компактного субдифференциала (или  $K$ -субдифференциала) для отображений в нормированных пространствах и конусах. В настоящей работе, помимо  $K$  – теоремы о среднем (см.[2]) и рассмотрен ряд следствий из нее, не исследовавшихся в работе (см.[2]).

**Основные определения.** Далее  $U(0)$  – окрестность нуля в вещественном отделимом локально выпуклом пространстве  $E$ ,  $\overline{co}$  – замкнутая выпуклая оболочка множества в  $E$ .

**Определение 1.** Пусть  $\{B_\delta\}_{\delta>0}$  – убывающая при  $\delta \searrow +0$  система замкнутых выпуклых подмножеств  $E$ , с непустым компактным пересечением  $B$ . Множество  $B$  назовем  $K$ -пределом системы  $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ :

$$B = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} B_\delta,$$

$$\text{если } \forall U(0) \subset E \exists \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0)) \quad (1)$$

Перейдем к определению компактного субдифференциала. Далее  $f : E \supset U(x) \rightarrow F$

**Определение 2.**  $K$ -субдифференциал отображения  $f$  в точке  $x \in E$  есть  $K$ -предел замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений:

$$\partial_K f(x) = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \mid 0 < t < \delta \right\} \quad (2)$$

Если  $\partial_K f(x, h)$  – сублинейный ограниченный оператор по  $h$  (как отображение из  $E$  в  $F_k$ , где  $F_k$  – нормированный конус выпуклых компактов в  $E$ ), то  $f$   $K$ -субдифференцируемо по Гато в т.х. Если, кроме того, сходимость в  $K$ -пределе (2) равномерна по всем направлениям  $\|h\| \leq 1$ , то  $f$   $K$ -субдифференцируемо по Фреше (или сильно  $K$ -субдифференцируемо) в т.х. В этих случаях мы принимаем обозначение

$$\partial_K f(x)h := \partial_K f(x, h)$$

Свойства  $K$ -субдифференцируемых отображений рассмотрены в [ [1] - [2]]

1. ОБЩАЯ ФОРМА ФОРМУЛЫ КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ В ТЕРМИНАХ  $K$  – СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим основную теорему данного раздела.

**Теорема 1.** Пусть  $F$  – нормированное пространство, отображения  $f : \mathbb{R} \supset [a; b] \rightarrow F$  и  $g : \mathbb{R} \supset [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны на  $[a; b]$  и  $K$ -субдифференцируемы на  $(a; b)$ , причем  $\max \partial_K g(x) \geq 0$ . Если для некоторого замкнутого выпуклого множества  $B \subset F$  выполнена локальная оценка

$$\partial_K f(x) \subset \partial_K g(x) \cdot B, \quad a < x < b,$$

то справедлива глобальная оценка

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B \quad (3)$$

*Доказательство.* 1) Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Используя определение  $K$ -субдифференциала выберем для каждого  $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$  такое  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ , что

$$(0 < h < \delta) \Rightarrow \begin{cases} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \subset O_\varepsilon(\partial_K g(x) \cdot B); \\ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \in O_\varepsilon(\partial_K g(x)) \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$(0 < |h| < \delta) \Rightarrow \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in O_{2\varepsilon} \left( \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot B \right) \right) \quad (4)$$

2) Из покрытия  $O_\delta(x)_{x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]}$  выберем конечное покрытие  $[a + \varepsilon; b - \varepsilon] \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\delta_i}(x_i)$ .

Впишем в это покрытие разбиение  $a + \varepsilon = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_m = b - \varepsilon$  так, чтобы каждый отрезок разбиения содержался в некотором  $O_{\delta_i}(x_i)$ , причем один из его концов совпадал с  $x_i$ .

Фиксируем отрезок разбиения  $[\bar{x}_{j-1}; \bar{x}_j]$ ; пусть, например,  $x_i = \bar{x}_{j-1}$ . Положим  $h = \bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}$ . Тогда из (4) получаем:

$$\left( \frac{f(\bar{x}_j) - f(\bar{x}_{j-1})}{\Delta \bar{x}_j} \in O_\varepsilon \left( \frac{g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})}{\Delta \bar{x}_j} \cdot B \right) \right) \quad (j = \overline{1, m}) \quad (5)$$

Умножая на  $\Delta \bar{x}_j$  и суммируя равенства (5), получаем:

$$f(b - \varepsilon) - f(a + \varepsilon) \in \sum_{j=1}^m O_\varepsilon([g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})] \cdot B).$$

При этом, используя выпуклость  $B$ , имеем:

$$\sum_{j=1}^m O_\varepsilon([g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})] \cdot B) \subset O_\varepsilon\left(\sum_{j=1}^m ([g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})] \cdot B)\right) \subset O_\varepsilon([g(b - \varepsilon) - g(a + \varepsilon)] \cdot B)$$

Отсюда получаем:

$$f(b - \varepsilon) - f(a + \varepsilon) \in O_\varepsilon([g(b - \varepsilon) - g(a + \varepsilon)] \cdot B). \quad (6)$$

3) Переходя в (6) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом замкнутости  $B$  и непрерывности  $f$  и  $g$  получаем:

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B$$

□

Сохраняя результат теоремы 1, ее предположения можно ослабить, вводя не более, чем счетное число «точек неизвестности».

**Теорема 2.** Пусть даны непрерывные отображения

$$f : [a, b] \rightarrow F, g : [a, b] \rightarrow F.$$

Предположим, что во всех точках  $x \in [a, b]$ , за возможными исключениями некоторого не более чем счетного множества точек  $D$ , существуют правосторонние  $K$  - субдифференциалы  $\partial_K f(x+0)$  и  $\partial_K g(x+0)$ , удовлетворяющие оценке:

$\partial_K f(x+0) \subset \partial_K g(x+0) \cdot B$ , где  $B$  - замкнутое выпуклое множество в  $F$ , кроме не более чем счетного множества точек  $D \subset [a, b]$  Тогда

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B$$

### Частные случаи основной теоремы

**Следствие 1.** Если, в условиях теоремы 2

$$\sup \|\partial_K f(x+0)\| \leq \sup \partial_K g(x+0), \text{ то}$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

**Следствие 2.** Пусть  $f : [a; b] \rightarrow F$ ,  $F$  - нормированное пространство,  $f$  непрерывная на  $[a, b]$  и  $K$ -субдифференцируема на  $(a; b)$ . Если  $\max_{a < x < b} (\max \|\partial_K f(x)\|) \leq k$ , то выполняется условие Липшица для  $f$ :

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k|x_2 - x_1|, \text{ при любых } x_1, x_2 \in [a, b]$$

2.  $K$ - ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВЫХ  
ПРОСТРАНСТВАХ

**Предложение 1.** Если отображение  $f$   $K$ -субдифференцируемо на открытом множестве  $U$  и отрезок с концами  $a$  и  $b$  содержится в  $U$ , то

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} (\sup \|\partial_K f((1-t)a + tb)\|) \quad (7)$$

Из предложения легко получается следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $U$  — открытое выпуклое множество в нормированном пространстве  $E$  и  $f : U \rightarrow F$  —  $K$ -субдифференцируемое отображение. Предложим, что

$$\sup_{x \in U} (\max \|\partial_K f(x)\|) \leq k$$

Тогда, какова бы ни были элементы  $x_1 \in U, x_2 \in U$ , верно неравенство

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k \|x_2 - x_1\|. \quad (8)$$

Неравенство (8) для функции  $f$  называется  $k$ -условием Липшица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И.В., Стоякин Ф.С. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: Российский университет дружбы народов, — Том 34. — 2009. — С. 121–138
- [2] Халилова З.И. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам // Динамические системы. — М.: Мир, — том 3(31). — № 1-2. — С.115–133

## Построение прямой в $E_3$ по ее заданным Плюккерovým координатам

Закирья Билял Муталипович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ГРУППА 500М)

e-mail: 0992727692@mail.ru

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$  дана прямая  $L$ . Пусть  $A(a_1, a_2, a_3)$  и  $B(b_1, b_2, b_3)$  пара различных точек, лежащих на  $L$ . Построим однородные координаты этих точек  $A(t_1 a_1; t_1 a_2; t_1 a_3; t_1)$  и  $B(t_2 b_1; t_2 b_2; t_2 b_3; t_2)$ . Из однородных координат точек  $A$  и  $B$  построим вспомогательную матрицу:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} a_1 t_1 & a_2 t_1 & a_3 t_1 & t_1 \\ b_1 t_2 & b_2 t_2 & b_3 t_2 & t_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Из элементов матрицы  $\widetilde{M}$  образуем шесть чисел  $\widetilde{p}_{ij}$  ( $i < j$ ):

$$\widetilde{p}_{ij} = \begin{vmatrix} a_i t_1 & a_j t_1 \\ b_i t_2 & b_j t_2 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Шесть таким образом вычисленных миноров матрицы  $\widetilde{M}$  называют Плюккеровыми координатами прямой  $L = AB$  [2].

Покажем, что для заданной прямой  $AB$  шесть Плюккеровых координат этой прямой определяются с точностью до числового множителя.

Так как

$$\widetilde{p}_{ij} = \begin{vmatrix} a_i t_1 & a_j t_1 \\ b_i t_2 & b_j t_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{t_1 t_2} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}, \quad (3)$$

то этим общим множителем пропорциональности можно считать  $\lambda = t_1 t_2$ .

Можно убедиться в том, что шесть Плюккеровых координат прямой  $L$  удовлетворяют "Фундаментальному Условию Плюккера-[1]:

$$W \equiv p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

С помощью (3) вычислим  $W$ . Получим:

$$\frac{W}{t_1 t_2} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ b_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Вычислим в (4) определители второго порядка, после приведения подобных членов получим  $\frac{W}{t_1 t_2} \equiv 0$ .

Рассмотрим теперь случай  $t_1 = t_2 = 1$ . Из неоднородных координат точек  $A(a_1, a_2, a_3, 1)$  и  $B(b_1, b_2, b_3, 1)$  строим вспомогательную матрицу  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

по матрице (5) вычислим Плюккеровы координаты прямой  $AB$ :

$$\begin{aligned}
 p_{12} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, \\
 p_{13} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_3 - a_3 b_1, \\
 p_{23} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2, \\
 p_{14} &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - b_1, \\
 p_{24} &= \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} = a_2 - b_2, \\
 p_{34} &= \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ b_3 & 1 \end{vmatrix} = a_3 - b_3.
 \end{aligned} \tag{6}$$

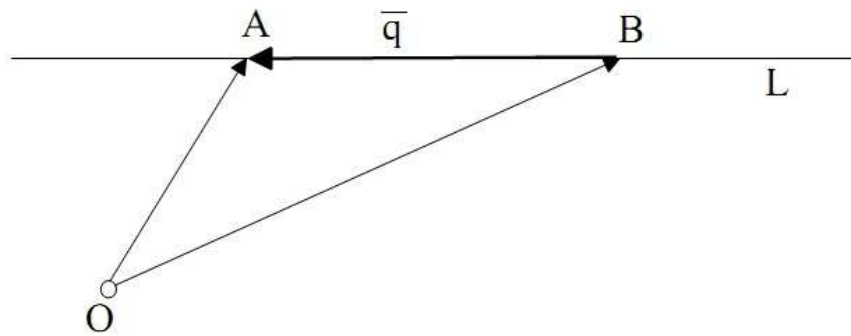


Рис. 1

Будем считать направляющим вектором прямой  $L = AB$  вектор

$$\vec{q} = \overrightarrow{BA} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3\} = \{p_{14}; p_{24}; p_{34}\}. \tag{7}$$

Три числа  $\{p_{14}; p_{24}; p_{34}\}$  совпадают с координатами направляющего вектора  $\vec{q} = \overrightarrow{BA}$  прямой  $L$ .

Рассмотрим случай, когда прямая  $L = AB$  не проходит через начало координат. Тогда существует единственная плоскость  $\Pi_0$ , проходящая через прямую  $L$  и через точку  $O(0, 0, 0)$ . В качестве вектора нормали  $\vec{N}_0$  к этой плоскости  $\Pi_0$  можно взять:

$$\vec{N} = [\vec{A}; \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \{p_{23}; -p_{13}; p_{12}\} \quad (8)$$

Три числа  $\{p_{23}; -p_{13}; p_{12}\}$  совпадают с координатами вектора нормали  $\vec{N} = [\vec{A}; \vec{B}]$  к плоскости  $\Pi_0$ , которая проходит через начало координат, — точку  $O(0, 0, 0)$ , и через прямую  $L \equiv AB$ .

Покажем, что

$$\vec{N}_0 \equiv [\vec{A}, \vec{B}] = [\vec{q}, \vec{B}]. \quad (9)$$

Действительно, из рисунка (1) следует, что

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{q}. \quad (10)$$

Внесём (10) в (9), получим

$$\vec{N}_0 = [(\vec{B} + \vec{q}), \vec{B}] = [\vec{B}, \vec{B}] + [\vec{q}, \vec{B}] = [\vec{q}, \vec{B}]. \quad (11)$$

Пусть  $C$ —произвольная точка на прямой  $L$ . Тогда для  $\vec{N}_0$  справедливо эквивалентное представление

$$\vec{N}_0 = [\vec{q}, \vec{C}]. \quad (12)$$

Из рисунка (2) вытекает, что  $\vec{C} = \vec{B} + \lambda \vec{q}$ . Вычислим  $[\vec{q}, \vec{C}]$ :

$$[\vec{q}, \vec{C}] = [\vec{q}, (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})] = [\vec{q}, \vec{B}] + [\vec{q}, \overrightarrow{BC}] = [\vec{q}, \vec{B}].$$

Для построения прямой  $L$  по ее известным шести Пюккеровым координатам, нам необходимо на этой прямой  $L$  найти хотя бы одну точку. Направляющий вектор этой прямой мы уже знаем (см.(7)). Опустим из точки  $O(0, 0, 0)$  на прямую  $L$  перпендикуляр  $OH$ .

Запишем (12) в эквивалентном виде:

$$[\vec{q}, \vec{H}] = \vec{N}_0 \quad (13)$$

Из (13) можно найти вектор  $\vec{H}$ .

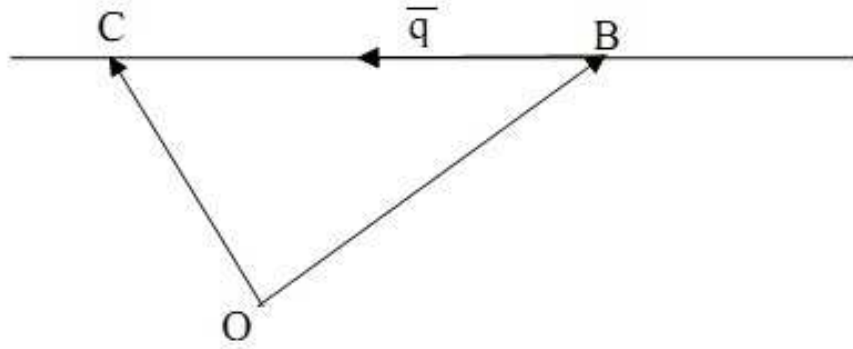


Рис. 2

(13)—это векторное уравнение с одним искомым вектором  $\vec{H}$  и с двумя известными векторами  $\vec{q}$  и  $\vec{N}_0$ . Кроме этого  $\vec{q} \perp \vec{H}$ , т.е.  $(\vec{q}, \vec{H}) = 0$ . Воспользуемся формулой двойного векторного произведения [3].

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (14)$$

Домножим обе части (13) векторно на  $\vec{q}$ . Получим

$$[\vec{q}, [\vec{q}, \vec{H}]] = [\vec{q}, \vec{N}_0]. \quad (15)$$

С помощью (14) запишем (15) в эквивалентном виде

$$\vec{q}(\vec{q}, \vec{H}) - \vec{H}(\vec{q}, \vec{q}) = [\vec{q}, \vec{N}_0]. \quad (16)$$

Внесём  $(\vec{q}, \vec{H}) = 0$  в (16), получим  $\vec{H}(\vec{q}, \vec{q}) = [\vec{q}, \vec{N}_0]$ , или

$$\vec{H} = \frac{-[\vec{q}, \vec{N}_0]}{(\vec{q}, \vec{q})}. \quad (17)$$

Положение точки  $H$  на прямой  $L$  однозначно определяется векторным равенством (17). Направляющий вектор  $\vec{q}$  прямой уже найден (см(7)). Точкой  $H \in L$  и направляющим вектором  $\vec{q}$  прямая  $L$  определяется однозначно.



Рассмотрим случай построения прямой  $L$ , которая проходит через начало координат  $O(0, 0, 0)$ . Если прямая  $L = AB$  проходит через точку  $O(0, 0, 0)$ , то векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  параллельны. Поэтому  $[\vec{A}, \vec{B}] \equiv \vec{N}_0 = \vec{0}$ . Для такой прямой три числа  $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$ . Можно показать, что справедливо и обратное утверждение: если  $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$ , то прямая  $L$  проходит через точку  $O(0, 0, 0)$ .

**Выводы:** Шестерка Плюккерových координат (2) однозначно задает прямую  $L$ , для которой направляющий вектор будет  $\vec{q} = \{p_{14}; p_{24}; p_{34}\}$ , а точка, принадлежащая этой прямой, определяется из векторного равенства (17). Для прямой, которая проходит через начало координат  $O(0, 0, 0)$ , Плюккерovy координаты  $p_{12}$ ,  $p_{13}$  и  $p_{23}$  равны нулю.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клейн Феликс «*Высшая геометрия*». — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. Москва 1939г. — 399с
- [2] Финников С.П. «*Проективно-дифференциальная геометрия*». — Государственное издательство технико-теоретической литературы, М.: 1937, 263 с.
- [3] Александров П.С. «*Лекции по аналитической геометрии*». — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. Москва 1968г. — 912с

## Порядковая и индивидуальная эргодические теоремы в пространствах Орлича-Лоренца

*Кисель Ольга Сергеевна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА  
 (АСПИРАНТ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.01 - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)

e-mail: oskisel@gmail.com

### 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $(\Omega, \mu)$  измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной неатомичной мерой  $\mu$ ,  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mu)$  множество всех  $\mu$ -измеримых функций  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , и  $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\Omega, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  — банаховы пространства функций из  $\mathbf{L}_0$ , интегрируемых с  $p$ -й степенью. Пространство  $\mathbf{L}_0$  является полным линейным топологическим пространством относительно сходимости по мере на множествах конечной меры, которая называется стохастической сходимостью.

В случае, когда  $\Omega = \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$  и  $\mu = \mathbf{m}$  — мера Лебега на  $[0, +\infty)$ , будем писать:  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ .

Линейный оператор  $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \rightarrow \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$  называется *абсолютным сжатием* или  $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$ -сжатием, если  $T$  является сжатием как в  $\mathbf{L}_1$  так и в  $\mathbf{L}_\infty$ . Обозначим через  $\mathcal{PAC}$  множество всех абсолютных сжатий.

Для любых  $T \in \mathcal{PAC}$  и  $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$  определены операторы

$$A_{n,T}f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k-1}f \quad \text{и} \quad B_Tf = \sup_{n \geq 1} A_{n,T}|f|$$

которые называются "Чезаровскими средними" и "доминантной функцией". Заметим, что  $B_Tf \in \mathbf{L}_0$  для всех  $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ .

Банахово пространство  $\mathbf{E}$  измеримых функций на  $(\Omega, \mu)$  называется *перестановочно инвариантным* (r.i.), если

$$f \in \mathbf{L}_0, \quad g \in \mathbf{E}, \quad f^* \leq g^* \quad \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \implies \quad f \in \mathbf{E}, \quad \|f\|_{\mathbf{E}} \leq \|g\|_{\mathbf{E}},$$

где  $f^*$  — убывающая, непрерывная справа перестановка функции  $|f|$ . Как известно, функция  $f^*$  может быть определена формулой:

$$f^*(x) := \inf\{y \in [0, +\infty) : \mathbf{n}_f(y) \leq x\}, \quad x \in [0, \infty),$$

где  $\mathbf{n}_f$  — функция распределения  $|f|$ :

$$\mathbf{n}_f(x) = \mu\{\mathbf{u} \in \Omega : |\mathbf{f}(\mathbf{u})| > x\},$$

Если  $(\Omega, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ , то перестановочно инвариантное пространство  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mu)$  называется *стандартным*.

Известно, что для каждого перестановочно инвариантного пространства  $\mathbf{E}$  имеют место непрерывные вложения

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_0.$$

Каждое порядково ограниченное подмножество  $F \subseteq \mathbf{L}_0$  имеет наименьшую верхнюю грань  $\bigvee F \in \mathbf{L}_0$  и наибольшую нижнюю грань  $\bigwedge F \in \mathbf{L}_0$ , которые определяются как  $\text{ess sup } F$  и  $\text{ess inf } F$ .

Напомним, что последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  элементов частично упорядоченного множества  $F$  называется *порядково сходящейся* к  $f \in F$  ( $f_n \xrightarrow{(o)} f$ ), если существуют такие  $g_n \in F$  и  $h_n \in F$ , что

$$g_n \uparrow f, \quad h_n \downarrow f, \quad f = \bigvee_{n \geq 1} g_n = \bigwedge_{n \geq 1} h_n \in F.$$

Для оценки доминантной функции  $B_T f$ ,  $f \in \mathbf{E}$ , мы используем *максимальную функцию Харди-Литтлвуда*  $f^{**}$ , которая определяется для любой функции  $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$  следующим образом

$$f^{**}(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f^*(u) du, \quad x \in (0, \infty).$$

Пусть  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mu)$  — перестановочно инвариантное пространство на измеримом пространстве  $(\Omega, \mu)$ , и  $\mathbf{E}(\mathbb{R}_+, \mathbf{m})$  — соответствующее ему стандартное перестановочно инвариантное пространство.

*Сердцевинной Харди* пространства  $\mathbf{E}$  называется

$$\mathbf{E}_H = \mathbf{E}_H(\Omega, \mu) := \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mu) : f^{**} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}_+, \mathbf{m})\}.$$

Так как  $f^* < f^{**}$  для любой  $f \in \mathbf{E}$ , то  $\mathbf{E}_H \subseteq \mathbf{E}$ . В пространстве  $\mathbf{E}_H$  можно ввести норму:

$$\|f\|_{\mathbf{E}_H} := \|f^{**}\|_{\mathbf{E}}, \quad f \in \mathbf{E}_H,$$

относительно которой оно становится перестановочно инвариантным пространством.

В случае стандартного пространства  $(\Omega, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathbf{m})$ , пространство  $(\mathbf{E}_H, \|\cdot\|_{\mathbf{E}_H})$  является наибольшим перестановочно инвариантным пространством, для которого оператор Харди

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, \quad x \in (0, \infty)$$

является положительным сжатием из  $\mathbf{E}_H$  в  $\mathbf{E}$ .

Если  $\mathbf{E}$  — перестановочно инвариантное пространство и  $T \in \mathcal{PAC}$ , то

$$T(\mathbf{E}_H) \subseteq \mathbf{E}_H$$

и сужение  $T|_{\mathbf{E}_H} : \mathbf{E}_H \rightarrow \mathbf{E}_H$  является сжатием.

Действительно, по теореме Калдерона-Митягина

$$(Tf)^{**}(x) \leq f^{**}(x), \quad 0 < x < \infty$$

для всех  $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$  (см., например, [Ca], [Mi] или [KrPiSe], Ch.II §3.4).

Отсюда

$$\|Tf\|_{\mathbf{E}_H} = \|(Tf)^{**}\|_{\mathbf{E}} \leq \|f^{**}\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}_H}.$$

Таким образом, каждое перестановочно инвариантное пространство вида  $\mathbf{E}_H$  является интерполяционным между  $(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty, \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)$ .

С другой стороны, не каждое перестановочно инвариантное пространство является интерполяционным. Существуют перестановочно инвариантные пространства  $\mathbf{E}$  такие, что  $T\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{E}$  для некоторого  $T \in \mathcal{PAC}$  (см., [KrPiSe], Sec. 2.5).

Таким образом, для функций  $f \in \mathbf{E}$  и  $T \in \mathcal{PAC}$  функции  $Tf$  и  $A_{n,T}f$  могут не попадать в  $\mathbf{E}$ .

Рассмотрим перестановочно инвариантное пространство  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\Omega, \mu)$ , определенное следующим образом:

$$\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : \mathbf{f}^*(+\infty) := \lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Для пространства  $\mathcal{R}_0$  верны следующие равенства:

$$\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : \mathbf{n}_f(\mathbf{x}) < +\infty, \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$$

и

$$\mathcal{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = cl_{\mathbf{L}_1}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty).$$

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{E}$  — перестановочно инвариантное пространство. Тогда, для всех  $f \in \mathbf{E}_\mathbf{H} \cap \mathcal{R}_0$  и  $T \in \mathcal{PAC}$  последовательность средних  $A_{n,T}f$  порядково сходится в  $\mathbf{E}$ .

Условие  $f \in \mathbf{E}_\mathbf{H}$  означает, что последовательность  $A_{n,T}f$  является порядково ограниченной в  $\mathbf{E}$ , то есть  $B_T f \in \mathbf{E}$  и имеет место Доминантная Эргодическая Теорема (*DET*).

Условие  $f \in \mathcal{R}_0$  означает, что последовательность  $A_{n,T}f$  порядково ограничена в  $\mathbf{L}_0$ , и в  $\mathcal{R}_0$  имеет место Индивидуальная Эргодическая Теорема (*IET*).

Обратное утверждение тоже справедливо. А именно,

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{E}$  — такое перестановочно инвариантное пространство, что  $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}_\mathbf{H} \cap \mathcal{R}_0$ . Тогда, существуют  $f \in \mathbf{E}$  и  $T \in \mathcal{PAC}$  такие, что последовательность  $A_{n,T}f$  не является порядково сходящейся в  $\mathbf{E}$ .

Будем говорить, что перестановочно инвариантное пространство  $\mathbf{E}$  удовлетворяет Порядковой Эргодической Теореме ( $\mathbf{E} \in \mathcal{OET}$ ), если

$$\mathbf{E}_\mathbf{H} = \mathbf{E} \subseteq \mathcal{R}_0.$$

Условие  $\mathbf{E}_\mathbf{H} = \mathbf{E}$  означает, что оператор Харди  $H$  является ограниченным оператором в пространстве  $\mathbf{E}$ .

Пусть для любой функции  $f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbb{R}_+, \mathbf{m})$ . Определим операторы  $D_t: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , действующие на стандартном перестановочно инвариантном пространстве  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbb{R}_+, \mathbf{m})$ , соответствующем  $\mathbf{E}(\Omega, \mu)$

$$D_t f(x) := f(x/t), \quad 0 < x, t < \infty.$$

Множество  $\{D_t, 0 < t < \infty\}$  является группой.

Рассмотрим функцию  $d_{\mathbf{E}}(t) := \|D_t\|_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}}$ . легко показать, что функция  $d_{\mathbf{E}}(t)$  является полумультипликативной на  $(0, \infty)$ , то есть

$$d_{\mathbf{E}}(s+t) \leq d_{\mathbf{E}}(s) d_{\mathbf{E}}(t)$$

для всех  $s, t$ .

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для пространств Орлича  $\mathbf{L}_{\Phi}$  и Лоренца  $\mathbf{\Lambda}_W$  порядковая сходимость в эргодических теоремах была изучена в [МуРаРу].

Ниже будет рассмотрена порядковая сходимость для пространств Орлича-Лоренца  $\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}$ .

Пространство Орлича-Лоренца  $\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi} = \mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}(\Omega, \mu)$ , определяется следующим образом:

$$\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi} := \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mu) : \mathcal{I}_{W, \Phi}(f/a) < \infty \text{ для некоторого } a > 0\},$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}} := \inf \{a > 0 : \mathcal{I}_{W, \Phi}(f/a) \leq 1\},$$

где

$$\mathcal{I}_{W, \Phi}(f) := \int_0^{\infty} \Phi(f^*(x)) dW(x), \quad f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mu).$$

Отметим, что функции  $\Phi$  and  $W$  являются функциями Орлича и Лоренца соответственно. "Сердцевину Харди" пространства Орлича-Лоренца  $\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}$  будем обозначать  $\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}^H$ .

**Утверждение 2.** Если  $f \in \mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}^H$  и  $f^*(+\infty) = 0$ , то последовательность средних  $A_{n, T} f$  сходится порядково в  $\mathbf{L}_{W, \Phi}$  и имеет место индивидуальная эргодическая теорема.

**Утверждение 3.** Для пространства Орлича-Лоренца  $\mathbf{\Lambda}_{W, \Phi}$  порядковая эргодическая теорема выполняется тогда и только тогда, когда  $\|d_t\|_{W, \Phi} = o(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $W(+\infty) = +\infty$ .

Автор выражает благодарность профессору кафедры математического анализа Муратову Мустафе Абдурешитовичу за постановку задачи и полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [KrPiSe] Крейн С.Г. Интерполяция линейных операторов/ С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. – М.: Наука, Физматлит, 1978. – 400 с.
- [Mi] Митягин Б. С. Интерполяционная теорема для модулярных пространств/ Б. С. Митягин // Матем. сб. – 1965. – Т. 66 (108) № 4. – С. 473–482.
- [MuPaRu] Muratov M. Order Convergence Ergodic Theorems in Rearrangement Invariant Spaces/ M. Muratov, J. Pashkova, B. Rubshtein // Operator Theory: Advances and Applications. – 2013. – Vol. 227. P. 123-142.
- [Ca] Calderon A. P. Spaces between  $L^1$  and  $L^\infty$  and the theorem of Marcinkewicz/ A. P. Calderon // Studia Math. – 1966. – № 26. – P. 273-299.

## Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения

*Копачевский Николай Дмитриевич, Радомирская Карина Александровна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)  
e-mail: kopachevsky@crimea.edu, radomirskaya@mail.ru

### 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств.** Пусть  $\{E, (\cdot, \cdot)_E\}$ ,  $\{F, (\cdot, \cdot)_F\}$ ,  $\{G, (\cdot, \cdot)_G\}$  - сепарабельные гильбертовы пространства с введенными скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

- (1) Пространство  $F$  плотно вложено в  $E$ ,  $F \hookrightarrow E$  и

$$\|u\|_E \leq a\|u\|_F, \forall u \in F. \quad (1)$$

- (2) На пространстве  $F$  задан оператор  $\gamma$ , который называется абстрактным оператором следа и ограничено действует из  $F$  в  $G$ . Причем  $\gamma : F \rightarrow G_+ \hookrightarrow G$  и

$$\|\gamma u\|_G \leq b\|u\|_F, b > 0, u \in F. \quad (2)$$

- (3) Ядро  $\ker \gamma$  оператора  $\gamma$  плотно в  $E$ .

**Теорема 1.** Пусть для тройки гильбертовых пространств  $\{E, (\cdot, \cdot)_E\}$ ,  $\{F, (\cdot, \cdot)_F\}$ ,  $\{G, (\cdot, \cdot)_G\}$  и для абстрактного оператора следа  $\gamma$  выполнены условия (1)-(3). Тогда существует абстрактное дифференциальное выражение  $Lu \in F^*$  и абстрактная производная по внешней нормали  $\partial u \in (G_+)^*$  такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (3)$$

При этом  $\partial u$  по элементам  $u \in F$  и  $Lu \in F^*$  определяется однозначно.

**Замечание 1.** Косыми скобками  $\langle \eta, u \rangle_E$  обозначают значение функционала  $v \in F^*$  на элементе  $\eta \in F$ ; аналогичный смысл имеет выражение  $\langle \varphi, \psi \rangle_G$ .

**1.2. Обобщенная формула Грина для оператора Лапласа.** Пусть  $E = L_2(\Omega)$ ,  $F = H^1(\Omega)$ ,  $G = L_2(\Gamma)$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\gamma u := u|_\Gamma$  ( $\forall u \in H^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  - липшицева граница области  $\Omega$ ).

**Теорема 2.** Если выполнены сформулированные выше условия, то имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} (\eta u + \nabla \eta \cdot \nabla u) \partial \Omega = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (4)$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma \eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (5)$$

**1.3. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач.** Пусть  $\{p_k\}_{k=1}^q$  - непрерывные проекторы, действующие в  $G_+$ , причем  $\sum_{k=1}^q p_k = I_+$  (единичный оператор в  $G_+$ ). Пусть также выполнены условия

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad \rho_k \omega_k = (I_+)_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad (6)$$

где  $(I_+)_k$  - единичный оператор в  $(G_+)_k := \rho_k G_+$ ,  $\rho_k$  - непрерывный оператор сужения с  $G_+$  на  $(G_+)_k$ , а  $\omega_k$  - непрерывный оператор продолжения с  $(G_+)_k$  на  $G_+$ . Тогда

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*, \quad \rho_k^* : (G_+)_k^* \rightarrow (G_+)^*, \quad k = \overline{1, q}, \quad (7)$$

причем  $\omega_k^*$  - оператор сужения, а  $\rho_k^*$  - оператор продолжения.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (1)-(3), а также условие (6) либо (7) Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых

задач в следующей форме:

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (8)$$

$$(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \quad \gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \\ \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \quad k = \overline{1, q}. \quad (9)$$

Здесь  $\gamma_k$  - абстрактный оператор следа на часть границы области, а  $\partial_k$  - абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

#### 1.4. Обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач.

Рассмотрим в условиях п. (1.2) ситуацию, когда липшицева граница  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  разбита на непересекающиеся куски  $\Gamma_k$  с липшицевыми границами  $\partial\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, q}$ .

**Теорема 4.** *Если выполнены сформулированные условия, то имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (10)$$

$$\gamma_k \eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1, q}. \quad (11)$$

## 2. СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

**2.1. Постановка задачи.** Теорема (4) позволяет исследовать разрешимость смешанных краевых задач сопряжения для нескольких примыкающих друг к другу областей, на общих границах которых заданы условия сопряжения.

Аналогичные построения могут быть проведены и в абстрактной форме на основе теоремы (3).

Будем для определенности считать, что в  $\mathbb{R}^m$  имеются три области  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , примыкающие друг к другу по липшицевым кускам границ  $\Gamma_{jk}$ ,  $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$ ,  $j, k = 1, 2, 3$ , и имеющие внешние (свободные) границы  $\Gamma_{kk}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Через  $\gamma_{jk} u_k$  будем обозначать след функции  $u_k$  на  $\Gamma_{jk}$ , через  $\partial_{jk} u_k$  - соответствующую производную по внешней нормали к области  $\Omega_k$ .



Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу (конфигурация – разрезанный на три части арбуз с тремя примыкающими друг к другу внутренними границами):

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 &= f_1 & (\Omega_1), & \quad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 & (\Gamma_{11}), \\ u_2 - \Delta u_2 &= f_2 & (\Omega_2), & \quad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 & (\Gamma_{22}), \\ u_3 - \Delta u_3 &= f_3 & (\Omega_3), & \quad \gamma_{33} u_3 = \varphi_3 & (\Gamma_{33}). \end{aligned} \quad (12)$$

В качестве условий сопряжения выберем следующие условия:

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 &= \varphi_{12}, & \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 &= \psi_{12} & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_2 - \gamma_{23} u_3 &= \varphi_{23}, & \partial_{32} u_2 + \partial_{23} u_3 &= \psi_{23} & (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ -\gamma_{31} u_1 + \gamma_{13} u_3 &= \varphi_{31}, & \partial_{31} u_1 + \partial_{13} u_3 &= -\psi_{13} & (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \quad (13)$$

Наша цель – выяснить необходимые и достаточные условия на заданные функции  $f_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ , а также  $\varphi_{jk}$  и  $\psi_{jk}$ , при которых задача (3), (13) имеет слабое решение в пространстве

$$H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) \oplus H^1(\Omega_3). \quad (14)$$

В силу линейности задачи ее решение может быть представлено в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородности в уравнениях либо в краевых условиях лишь в одном месте (т. е. либо в уравнении, либо в краевом условии).

**2.2. Вспомогательные задачи Зарембы.** Пусть  $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}; u_{13})$  – решение задачи

$$\begin{aligned} u_{11} - \Delta u_{11} &= 0 & (\Omega_1), & \quad \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 & (\Gamma_{11}), \\ u_{12} - \Delta u_{12} &= 0 & (\Omega_2), & \quad \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 & (\Gamma_{22}), \\ u_{13} - \Delta u_{13} &= 0 & (\Omega_3), & \quad \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3 & (\Gamma_{33}), \\ \partial_{21} u_{11} &= 0 & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), & \quad \partial_{31} u_{11} = 0 & (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}), \\ \partial_{12} u_{12} &= 0 & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), & \quad \partial_{32} u_{12} = 0 & (\Gamma_{32} = \Gamma_{23}), \\ \partial_{13} u_{13} &= 0 & (\Gamma_{13} = \Gamma_{31}), & \quad \partial_{23} u_{13} = 0 & (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{aligned}$$

**Теорема 5.** *Каждая из задач Зарембы имеет слабое решение из подпространства квазигармонических функций  $H_h^1(\Omega_k) \subset H^1(\Omega_k)$ ,  $k = \overline{1,3}$ , тогда и только тогда, когда  $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk})$ ,  $k = \overline{1,3}$ . При этом*

$$u_{1k} = \tilde{\gamma}_{kk}^{-1} \varphi_k, \quad \tilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), H_h^1(\Omega_k)), \quad k = \overline{1,3}. \quad (15)$$

**2.3. Вспомогательная задача Стеклова.** Она формулируется для набора функций  $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22}; u_{23})$  в следующем виде

$$\begin{aligned} u_{21} - \Delta u_{21} &= 0 \quad (\Omega_1), & \gamma_{11}u_{21} &= 0 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_{22} - \Delta u_{22} &= 0 \quad (\Omega_2), & \gamma_{22}u_{22} &= 0 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_{23} - \Delta u_{23} &= 0 \quad (\Omega_3), & \gamma_{33}u_{23} &= 0 \quad (\Gamma_{33}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} &= \tilde{\varphi}_{12} := \varphi_{12} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12}, & \partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} &= 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}) \\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} &= \tilde{\varphi}_{23} := \varphi_{23} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13}, & \partial_{32}u_{22} + \partial_{23}u_{23} &= 0 \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}) \\ -\gamma_{31}u_{21} + \gamma_{13}u_{23} &= \tilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{13}u_{13} + \gamma_{31}u_{11}, & \partial_{31}u_{21} + \partial_{13}u_{23} &= 0 \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

**Теорема 6.** *Сформулированная вспомогательная задача Стеклова в условиях теоремы (3) имеет слабое решение  $u_{(2)} \in H_h^1(\Omega) := H_h^1(\Omega_1) \oplus H_h^1(\Omega_2) \oplus H_h^1(\Omega_3)$  тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}), \quad \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}), \quad \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}). \quad (16)$$

**2.4. Первая вспомогательная задача С. Крейна.** Для набора функций  $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}; u_{33})$  задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{31} - \Delta u_{31} &= f_1 \quad (\Omega_1) & \gamma_{11}u_{31} &= 0 \quad (\Gamma_{11}) \\ u_{32} - \Delta u_{32} &= f_2 \quad (\Omega_2) & \gamma_{22}u_{32} &= 0 \quad (\Gamma_{22}) \\ u_{33} - \Delta u_{33} &= f_3 \quad (\Omega_3) & \gamma_{33}u_{33} &= 0 \quad (\Gamma_{33}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} &= 0, & \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} &= 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} &= 0, & \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} &= 0 \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{31}u_{31} - \gamma_{13}u_{33} &= 0, & \partial_{31}u_{31} + \partial_{13}u_{33} &= 0 \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение подпространство

$$\begin{aligned} V_\Gamma^1(\Omega) &:= \{u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) : \gamma_{jj}u_j = 0 \quad (\Gamma_{jj}), \quad j = \overline{1, 3}; \\ &\quad \gamma_{jk}u_k - \gamma_{kj}u_j = 0 \quad (\Gamma_{jk}), \quad j, k = \overline{1, 3}\} \subset H^1(\Omega) \end{aligned}$$

**Теорема 7.** *Первая вспомогательная задача С. Крейна имеет единственное слабое решение  $u_{(3)} \in V_\Gamma^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3) \in (V_\Gamma^1(\Omega))^*, \quad V_\Gamma^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (V_\Gamma^1(\Omega))^*. \quad (17)$$

В частности, если

$$f = (f_1; f_2; f_3) \in \bigoplus_{k=1}^3 L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (V_\Gamma^1(\Omega))^*, \quad (18)$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение.

**2.5. Вторая вспомогательная задача С. Крейна.** Для набора функций  $u_{(4)} := (u_{41}; u_{42}; u_{43})$  задача формулируется так:

$$\begin{aligned} u_{41} - \Delta u_{41} &= 0 \quad (\Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{41} = 0 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_{42} - \Delta u_{42} &= 0 \quad (\Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{42} = 0 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_{43} - \Delta u_{43} &= 0 \quad (\Omega_3), \quad \gamma_{33} u_{43} = 0 \quad (\Gamma_{33}), \\ \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} &= 0, \quad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{12} \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} &= 0, \quad \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{23} \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{31} u_{41} - \gamma_{13} u_{43} &= 0, \quad \partial_{31} u_{41} + \partial_{13} u_{43} = -\psi_{31} \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

**Теорема 8.** *Вторая вспомогательная задача С. Крейна имеет слабое решение  $u_{(4)} \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{12} \in H^{-1/2}(\Gamma_{12}), \quad \psi_{23} \in H^{-1/2}(\Gamma_{23}), \quad \psi_{31} \in H^{-1/2}(\Gamma_{31}). \quad (19)$$

Итогом рассмотрения смешанной краевой задачи сопряжения (3), (13) является следующее утверждение.

**Теорема 9.** *Эта задача имеет единственное слабое решение из пространства  $H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^3 H^1(\Omega_k)$  тогда и только тогда, когда выполнены условия (15)- (17), (19). Решение задачи (3), (13) является суммой решений вспомогательных задач, рассмотренных в пп. (13)- (2.5).*

### 3. О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ

Методы, рассмотренные в параграфе (2), позволяют исследовать не только краевые, но и спектральные задачи сопряжения для одной, двух, трех и более примыкающих друг к другу областей.

**3.1. Постановка задачи.** Рассмотрим для простоты случай лишь одной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  с липшицевой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ , разбитой на четыре липшицевых куска  $\Gamma_k$  с липшицевыми границами  $\partial\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ .

Требуется найти решения следующей однородной смешанной задачи:

$$\begin{aligned} u - \Delta u &= \lambda u \quad (\Omega), \\ \gamma_1 u &= 0 \quad (\Gamma_1), \\ \partial_2 u &= \lambda \gamma_2 u \quad (\Gamma_2), \\ \partial_3 u &= \mu \gamma_3 u \quad (\Gamma_3), \\ \partial_4 u &= \lambda^{-1} \gamma_4 u \quad (\Gamma_4). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  – комплексные параметры, один из которых можно считать спектральным, а другой – фиксированным. Решения задачи (20) будем считать принадлежащими пространству  $H^1(\Omega)$ .

**3.2. Переход к спектральной задаче для операторного пучка.** Представим решение задачи (20) в виде суммы решений четырех вспомогательных задач: одной – типа первой вспомогательной задачи С. Крейна, а трех других – типа второй вспомогательной задачи С. Крейна.

**Теорема 10.** *Задача (20) равносильна спектральной проблеме*

$$u = \lambda A^{-1}u + \lambda T_2 \gamma_2 u + \mu T_3 \gamma_3 u + \lambda^{-1} T_4 \gamma_4 u, \quad u \in H^1(\Omega), \quad (21)$$

где  $A$  – оператор гильбертовой пары  $(H^1(\Omega), L_2(\Omega))$ , а  $T_j$ ,  $j = \overline{2,4}$  – операторы вторых вспомогательных задач С. Крейна.

**Теорема 11.** *Задача (21) равносильна спектральной задаче для операторного пучка*

$$L(\lambda, \mu) := I - \lambda(A^{-1} + B_2) - \mu B_3 - \lambda^{-1} B_4, \quad (22)$$

действующего в пространстве  $L_2(\Omega)$ , при этом

$$B_j := (A^{1/2} T_j)(\gamma_j A^{-1/2}) = B_j^* \geq 0, \quad B_j \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \quad j = \overline{2,4} \quad (23)$$

В частности, если  $\mu \leq 0$ , то приходим к известному пучку С. Крейна; если  $\mu > 0$ , то возникает индефинитная метрика в спектральной проблеме об устойчивости конвективных движений жидкости; при  $Im \mu \neq 0$  получаем слабые возмущения пучка С. Крейна; при  $B_4 = 0$  – задачу сопряжения в теории дифракции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи.* – Симферополь: КНЦ ТНУ, – 2011.
- [2] Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина: специальный курс лекций.* – Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.Ф. – 2011 – С. 136.
- [3] Агранович М.С. *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи матем. наук.* – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С.3-78.
- [4] Агранович М.С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей.* – М.:МЦНМО, – 2013 – С. 379.

## Об одном способе построения базисных инвариантов унитарной группы $W(J_3(4))$

Кузьмина Мария Анатольевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 402)

e-mail: maria\_kuzmina\_1993@mail.ru

Пусть в трехмерном унитарном пространстве задана координатная система началом  $O$  и ортонормированным базисом  $\vec{e}_i (i = \overline{1,3})$ ; вектор  $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$ .

Унитарная группа  $W(J_3(4))$  порядка 336 порождается отражениями 2-го порядка  $\sigma_i (i = \overline{1,3})$  относительно плоскостей с уравнениями [4], [6]

$$x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-7})$  корень уравнения  $z^2 - z + 2 = 0$ .

Система  $S$  корней группы имеет вид:

$$\pm \vec{e}_i, \quad \pm \frac{1}{2}\alpha(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j), (i < j), \quad \pm \frac{1}{2}\alpha(\vec{e}_i + \vec{e}_j - \alpha \vec{e}_k),$$

$i, j, k = 1, 2, 3$  – циклически.

Степени базисных инвариантов  $m_i = 4, 6, 14$  [6].

Обозначим через  $J_{m_i}$  базисные инварианты группы  $W(J_3(4))$ .

В работе [1] (см. также [3], [4]) предложен следующий способ построения инвариантов  $J_{m_i}$ . Если  $\vec{c}_i$  – собственные векторы преобразования  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ , то в системе координат определяемой этими векторами,  $J_4$  может быть приведен к виду  $\nu_1^3 \nu_2 + \nu_2^3 \nu_3 + \nu_3^3 \nu_1$ . Тогда

$$J_6 = \frac{1}{54} \det(\partial^2 F_4 / \partial \nu_i \partial \nu_j),$$

и

$$J_{14} = \frac{1}{9} \det \begin{pmatrix} \partial^2 F_4 / \partial \nu_1 \partial \nu_1 & \partial^2 F_4 / \partial \nu_1 \partial \nu_2 & \partial^2 F_4 / \partial \nu_1 \partial \nu_3 & \partial F_6 / \partial \nu_1 \\ \partial^2 F_4 / \partial \nu_2 \partial \nu_1 & \partial^2 F_4 / \partial \nu_2 \partial \nu_2 & \partial^2 F_4 / \partial \nu_2 \partial \nu_3 & \partial F_6 / \partial \nu_2 \\ \partial^2 F_4 / \partial \nu_3 \partial \nu_1 & \partial^2 F_4 / \partial \nu_3 \partial \nu_2 & \partial^2 F_4 / \partial \nu_3 \partial \nu_3 & \partial F_6 / \partial \nu_3 \\ \partial F_6 / \partial \nu_1 & \partial F_6 / \partial \nu_2 & \partial F_6 / \partial \nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

В данной работе, указанный метод реализован в прямоугольной системе координат, определяемой базисом  $\vec{e}_i$ . При этом инвариант  $J_4$  находится с использованием многочленов Погорелова [5]

$$P_{m_i}^G = \sum_{\vec{s} \in S} (\vec{x}, \vec{s})^{m_i}$$

и имеет вид

$$J_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 3\bar{a}^2(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2)$$

Отметим, что кривая  $J_4 = 0$ , на комплексной проективной плоскости обладает рядом замечательных свойств и исследовалась в большом числе работ (см. например [1], [2], [3]). В частности она имеет 28 двойных касательных и является единственной кривой рода 3 с группой автоморфизмов 168 (максимальный порядок группы автоморфизмов кривой рода 3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Klein *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen.* – Math. Ann., – 1879 – s.428-471.
- [2] H.S.M. Coxeter *My graph.* – London:Proc. London Math. Soc., – 3, №46, – 1983, – p.117-136.
- [3] Mitsuo Kato *Differential equations for invariant curves under Klein's simple group of order 168.* – Kyushu J.Math., – 2004, – p. 323-336.
- [4] Т.Спрингер *Теория инвариантов.* – Москва:Мир, – 1981, – с.114-118.
- [5] О.И.Рудницкий *Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями, в трехмерном унитарном пространстве.* – Симферополь:Рукопись деп. в УкрНИИТИ 01.06.83, №386 Ук-Д83, – 12с.
- [6] G.C.Shephard,J.A.Todd *Finite unitary reflection groups.* – Can.J.Math. – 6,№2 – 1954, – p.274-304

## Арифметические действия с графиками

*Курбакова Елена Сергеевна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500М)

e-mail: lex09@ukr.net

Существует несколько арифметических действий, которые можно производить с графиками, а именно сложение, вычитание, умножение и деление.

Метод построения графиков произведения или частного функций иррационален и используется крайне редко. Такие графики лучше строить с помощью методов высшей математики.

Мы рассмотрим сложение графиков, так как в дипломной работе в основном рассмотрен материал для средней школы.

**Определение 1.** *Общий метод построения графиков суммы двух функций заключается в том, что предварительно строят два графика для обеих функций, а затем складывают ординаты этих кривых при одних и тех же*

значениях  $x$ . По полученным точкам строят искомый график и выполняют проверку в нескольких контрольных точках.

### Пример

Построить график функции  $y = \sin x + \cos x$ .

Эта функция задана, как сумма двух других функций:  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$ .

Область определения заданной функции общая часть областей определения двух функций, из которых составлена сумма -  $(-\infty; \infty)$ . Область значений -  $[-1; 1]$ .

Период функции  $2\pi$ . Точки пересечения с осью абсцисс -  $(\frac{3}{4}\pi, 0)$ ,  $(\frac{7}{4}\pi, 0)$ . Точка пересечения с осью ординат -  $(0; 1)$ .

$(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$  - точка максимума.

$(-\frac{5}{4}\pi; -\sqrt{2})$  - точка минимума.

Функция монотонно возрастает на интервалах  $[0; \frac{\pi}{4}]$  и  $[\frac{3}{4}\pi; 2\pi]$ ; монотонно убывает на  $[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi]$ .

Указанные выше свойства функции включены в общую программу школы. Более углубленно свойства функций и построение графиков функций, из сложение и другие действия изучают в школах с математическим уклоном, вузах.

На рисунке указаны графики вместе с итоговым.

(1)  $y = \sin x + \cos x$ ,

(2)  $y = \sin x$ ,

(3)  $y = \cos x$ .

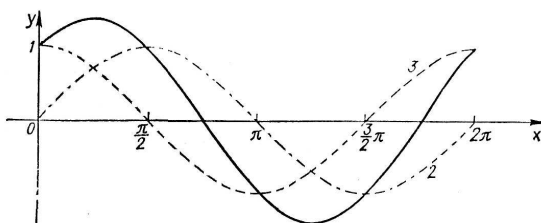


Рис. 1. Графики функций (1),(2),(3)

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С.М. *Алгебра и начала анализа*/Никольский С.М.— М.: Просвещение, 2003. — 448с.

- [2] Титаренко А.М. *Форсированный курс школьной математики*/Титаренко А.М. — Х.: ТОРСИНГ ПЛЮС, 2005. — 93с.
- [3] Потапов М.К., Александров В.В. *Алгебра и анализ элементарных функций*/Потапов М.К., Александров В.В. — М.: Наука, 1980.

## Факторы. Классификация факторов

*Маматова Эльзара Рефатовна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404)

e-mail: elzara.mamatova@mail.ru

*В работе рассматриваются алгебры фон Неймана  $M$  с тривиальным центром  $Z(M)$ , называемые факторами. Приводится классификация факторов через область значений  $\Delta$  соответствующей размерностной функции  $D_M(P)$  на множестве  $P(M)$  всех ортопроекторов  $M$ .*

Пусть  $M$  алгебра фон Неймана в  $B(H)$ , т.е. замкнутая в слабой операторной топологии \*-алгебра, содержащая единицу тождественный оператор  $I$ . Для алгебры фон Неймана  $M$  имеет место характеристическое тождество

$$M = M'',$$

где  $M'$  — коммутант, а  $M''$  — бикоммутант алгебры фон Неймана  $M$ .

**Определение 1.** *Центром алгебры фон Неймана  $M$  называется множество*

$$Z(M) = M \cap M'$$

Для любой алгебры фон Неймана  $M$  имеет место вложение:

$$\{\lambda I, \lambda \in C\} \subseteq Z(M) \subseteq M.$$

**Замечание 1.** *Если алгебра фон Неймана  $M$  — коммутативна, то  $M' = M$  и  $Z(M) = M$ .*

**Определение 2.** *Если*

$$Z(M) = M \cap M' - \{\lambda I, \lambda \in C\},$$

*то алгебра фон Неймана  $M$  называется фактором.*



Обозначим через

$$P(M) = \{P \in M : P^2 = P^* = P\}$$

множество всех ортопроекторов алгебры фон Неймана  $M$ .

Проекторы  $E$  и  $F$  из  $P(M)$  называются *эквивалентными* (обозначение:  $E \sim F$ ), если существует частичная изометрия  $V \in M$ , для которой проектор  $E$  является начальным, а проектор  $F$  — конечным; в частности

$$VE = V = FV, EV^* = V^* = V^*F.$$

Отношение " $\sim$ " является отношением эквивалентности на  $P(M)$ .

Говорят, что проектор  $E$  *мажорируется* проектором  $F$  или *имеет меньшую относительную размерность* (обозначение:  $E \lesssim F$ ), если существует такой проектор  $F_1 \leq F$ , что  $E \sim F_1$ .

Если  $M$  — фактор, то для любых  $E, F \in P(M)$  выполнено одно из соотношений:

$$\text{либо } E \lesssim F, \text{ либо } F \lesssim E.$$

Пусть  $M$  — алгебра фон Неймана и  $E \in P(M)$ .

Проектор  $E$  называется *минимальным* (или *атомом*), если из  $0 \neq Q \leq E$ ,  $Q \in P(M)$  следует, что  $Q = E$ .

Проектор  $E$  называется *абелевым*, если редуцированная алгебра  $EME$  является коммутативной. Ясно, что любой минимальный проектор  $E$  является абелевым, поскольку в этом случае, редуцированная алгебра фон Неймана  $EME$  \*-изоморфна полю комплексных чисел  $\mathbb{C}$ .

Проектор  $E$  называется *конечным*, если из  $F \in P(M)$ ,  $F \leq E$ ,  $F \sim E$  следует, что  $E = F$ . Легко видеть, что любой абелев проектор является конечным. Более того, если  $F \in P(M)$ ,  $F \lesssim E$  и  $E$  — конечный (соответственно, абелев) проектор, то  $F$  тоже является конечным (соответственно, абелевым) проектором.

Проектор  $E$  называется *собственно бесконечным*, если из условий:

- 1).  $Z \in P(Z(M))$ ;
- 2).  $ZE$  — конечный проектор,

следует что  $ZE = 0$ .

Проектор  $E$  называется проектором *счетного типа*, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из  $P(EME)$  не более чем счетно.

Если тождественный оператор  $I \in M$  является проектором счетного типа, то алгебра фон Неймана  $M$  называется алгеброй *счетного типа* или  $\sigma$ -*конечной* алгеброй фон Неймана.

**Теорема 1.** Для любого фактора  $M$  существует функция

$$D : P(M) \rightarrow [0, +\infty),$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1)  $D(P) = 0$ , если  $P = 0$ ;  $D(P) > 0$ , если  $P \neq 0$ .
- 2)  $D(P) = \infty$  тогда и только тогда, когда проектор  $P$  – бесконечен.
- 3) Если  $P \sim Q$ , то  $D(P) = D(Q)$ .
- 4) Если  $P \perp Q$ , то  $D(P \oplus Q) = D(P) + D(Q)$
- 5) Если  $P \prec Q$  и  $P$  – конечен, то  $D(P) < D(Q)$ .

Условия 1, 3, 4 определяют функцию  $D$  единственным образом с точностью до постоянного множителя, если только она принимает хоть одно конечное положительное значение.

**Определение 3.** Функция

$$D : P(M) \rightarrow [0, +\infty),$$

называется *размерностной функцией* или *функцией относительной размерности*.

Обозначим через  $\Delta$  – множество значений функции  $D$ .

**Теорема 2.** Множество значений  $\Delta$  размерностной функции  $D$  (после соответствующей нормировки) есть одно из следующих множеств:

- ( $I_n$ )  $\Delta = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- ( $I_\infty$ )  $\Delta = \{1, 2, 3, \dots\}$
- ( $II_1$ )  $\Delta = [0, 1]$
- ( $II_\infty$ )  $\Delta = [0, \infty]$
- ( $III$ )  $\Delta = \{0, \infty\}$

**Определение 4.** Говорят, что  $M$  – фактор класса ( $I_n$ ), ( $I_\infty$ ), ( $II_1$ ), ( $II_\infty$ ) или ( $III$ ), если множество значений  $\Delta$  размерностной функции  $D$  имеет соответствующий вид.

Факторы класса ( $I_n$ ), ( $I_\infty$ ) называют *дискретными*.

Факторы класса  $(II_1), (II_\infty)$  называют непрерывными.  
 Факторы класса  $(I_n), (II_1)$  называют конечными.  
 Факторы класса  $(I_\infty), (II_\infty)$  называют бесконечными.  
 Факторы класса  $(III)$  называют вполне бесконечными.

**Замечание 2.** Ни один из этих классов не является пустым, т.е. существуют факторы любого из этих классов.

**Теорема 3.** Классы факторов  $(I_n), (I_\infty), (II_1), (II_\infty), (III)$  и функция размерности  $D_M(P)$  с точностью до множителя, понятия эквивалентности, конечности, бесконечности и минимальности для операторов проектирования, инвариантны относительно любого симметричного алгебраического изоморфизма.

**Доказательство 1.** Условие  $E \sim F$  означает, что существует частично изометрический оператор  $U \in M$  такой, что

$$UU^*U = U, \quad U^*U = E, \quad UU^* = F; \quad (1)$$

причем оператор  $U$  может быть продолжен (правда неоднозначно) до унитарного, бесконечность оператора проектирования  $E$  означает, что существует проектор  $F \in M$  такой, что

$$EF = F, \quad F \neq E, \quad F \sim E, \quad (2)$$

а минимальность проектора  $E$  — что нет проектора  $F \in M$ , удовлетворяющего условиям

$$EF = F, \quad F \neq E, \quad F \neq E. \quad (3)$$

Так как соотношения (1), (2), (3) инвариантны относительно симметричного алгебраического изоморфизма, то это верно и относительно понятий эквивалентности, конечности, бесконечности и минимальности. Отсюда следует инвариантность классов. Так как, далее, размерностная функция  $D_M(P)$  характеризуется в терминах соотношений  $E = 0, E \sim F, G = E + F, EF = 0$ , то она также инвариантна (с точностью до множителя). Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М.А. *Нормированные кольца*. — М., — 1968 — С. 664.  
 [2] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*. — Киев: Институт математики НАН Украины, — 2007 — С. 390. *Машиностроение*, — 1975.

- [3] Мёрфи Дж. *C\*-алгебры и теория операторов*. – М.: Изд-во «Факториал», – 1997 – С. 336.
- [4] Takesaki M. *Theory of operator algebras II*. – Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.

## Коммутативные алгебры фон Неймана.

*Муединова Ниляра Нуриевна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404)

e-mail: niyara05-06-1993@mail.ru

*В работе рассматриваются коммутативные алгебры фон Неймана. Приводится теорема об изоморфизме произвольной коммутативной алгебры фон Неймана алгебре мультипликаторов на измеримом пространстве с полной локально конечной мерой.*

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $B(H)$  — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в  $H$ . Для произвольного подмножества  $M \subseteq B(H)$  обозначим через  $M'$  его коммутант, а через  $M''$  — бикоммутант, т.е.

$$M' = \{S \in B(H) : TS = ST \forall T \in M\}.$$

и

$$M'' = \{T \in B(H) : ST = TS \forall S \in M'\}.$$

Подмножество  $M \subseteq B(H)$  называют *самосопряженным*, если из  $T \in M$  следует, что  $T^* \in M$ . Самосопряженная подалгебра  $M \subseteq B(H)$  называется *\*-подалгеброй*.

**Определение 1.** *\*-Подалгебра  $M \subseteq B(H)$  называется алгеброй фон Неймана, если  $M'' = M$ . В этом случае говорят, что алгебра фон Неймана  $M$  действует в гильбертовом пространстве  $H$*

Простейшими примерами алгебр фон Неймана являются алгебра всех ограниченных линейных операторов  $B(H)$  и алгебра

$$\mathbb{C}_H = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

всех скалярных кратных единичного элемента (тождественного оператора)  $I$  в  $B(H)$ .

Пусть  $M$  — алгебра фон Неймана. Тогда  $M' = M'''$ . Следовательно,  $M'$  тоже является алгеброй фон Неймана.

Множество

$$Z(M) = \{T \in M : TS = ST \forall S \in M\}$$

называется *центром* алгебры фон Неймана  $M$ .

**Определение 2.** Алгебра фон Неймана  $M$  называется *коммутативной*, если

$$M' = M.$$

Пусть  $(\Omega, \Sigma, m)$  — измеримое пространство с полной локально конечной мерой  $m$ , и пусть  $H = L_2(\Omega, \Sigma, m)$ . Для каждой функции  $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$  определим линейный оператор  $T_f$  на  $H$  равенством:

$$T_f(g) = fg, \quad g \in H.$$

**Теорема 1.** 1). Множество

$$M = \{T_f : f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$$

является коммутативной алгеброй фон Неймана (называемой алгеброй мультипликаторов), действующей в гильбертовом пространстве  $L_2(\Omega, \Sigma, m)$ , такой что

$$M' = M.$$

Более того, отображение

$$\phi: L_\infty(\Omega, \Sigma, m) \rightarrow M,$$

задаваемое как

$$\phi(f) = T_f,$$

является  $*$ -изоморфизмом из  $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$  на  $M$ ;

2). Линейный функционал  $\tau: M_+ \rightarrow [0, \infty]$ , определяемый равенством

$$\tau(T_f) = \int_{\Omega} f dm,$$

является точным нормальным полуконечным следом на  $M_+$ ;

3). Для каждой коммутативной алгебры фон Неймана  $\mathcal{N}$  существует измеримое пространство  $(\Omega, \Sigma, m)$  с полной локально конечной мерой  $m$  такое, что  $\mathcal{N}$   $*$ -изоморфна алгебре фон Неймана  $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ , т.е. можно считать, что  $\mathcal{N}$  действует в  $L_2(\Omega, \Sigma, m)$  и что

$$\mathcal{N} = \{T_f : f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Мерфи *C\*-алгебры и теория операторов.* / Пер. с англ. под ред. проф. А.Я.Хелемского. – М.: Изд-во Факториал, – 1997.
- [2] Ж. Диксмье *C\*-алгебры и их представления.* / Пер. с франц. А.И. Штерна под ред. А.А. Кириллова. – М.: Изд-во Наука, – 1974.
- [3] Shoichiro Sarai *C\*-Algebras and W\*-Algebras.* – New York, Sprindler-Verlag, Berlin, Heidelberg – 1971.
- [4] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.* – Киев:Институт математики НАН Украины, – 2007 – С. 390.
- [5] Takesaki M. *Theory of operator algebras II.* – Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.

## Формула Крейна для резольвент кососамосопряженных расширений кососимметрического оператора в кватернионном модуле

*Осетрова Софья Александровна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

e-mail: osetrova\_sofiya@mail.ru

*В работе приводится обоснование формулы, связывающей резольвенты двух кососамосопряженных расширений кососимметрического оператора  $A$  в кватернионном гильбертовом модуле.*

Пусть  $\mathbb{H}$  — вещественная алгебра кватернионов,  $\mathbb{N}$  — правый гильбертов кватернионный модуль,  $A$  — кососимметрический оператор, действующий в  $\mathbb{N}$ , т.е. его область определения  $\mathcal{D}(A)$  плотна в  $\mathbb{N}$ , и для любых векторов  $x, y \in \mathcal{D}(A)$  выполняется равенство

$$\langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = 0.$$

Дефектный подмодуль  $\mathfrak{N}_q$  кососимметрического оператора  $A$  для кватерниона  $q$  с ненулевой вещественной частью определяется равенством

$$\mathfrak{N}_q := (\text{Ran}(A - R_q) \cap \text{Ran}(A - R_{\bar{q}}))^\perp, \quad R_q x := xq.$$

Всюду в данной работе  $\mathbb{F} \supset \mathbb{R}$  — поле в  $\mathbb{H}$ . Причем, модуль  $\mathbb{N}$  можно рассматривать как правый модуль над полем  $\mathbb{F}$ , обозначая его в этом случае  $\mathbb{N}^{\mathbb{F}}$ . Оператор  $A$ , действующий в  $\mathbb{N}$  как в  $\mathbb{F}$ -модуле, называется его симплектическим образом и обозначается  $A^s$ . Очевидно, что оператор  $A^s$  также является

кососимметрическим оператором в  $H^{\mathbb{F}}$  относительно индуцированного скалярного произведения.

Пусть  $q \in \mathbb{F}$ ,  $\operatorname{Re} q \neq 0$ . Следуя общепринятым понятиям, рассмотрим  $\mathfrak{N}_q^{\circ} = \operatorname{Ran}(A - R_{\bar{q}})^{\perp_{\mathbb{F}}}$  — дефектный  $\mathbb{F}$ -подмодуль оператора  $A^s$ . (Здесь символ  $\perp_{\mathbb{F}}$  означает ортогональное дополнение в  $H^{\mathbb{F}}$ .) Очевидно, что

$$\mathfrak{N}_q^{\circ} = \operatorname{Ker}(A^* - R_q),$$

Пусть  $\dot{B}$  — фиксированное кососамосопряженное расширение, а  $B$  — его произвольное кососамосопряженное расширения оператора  $A$  с равными конечными дефектными числами  $(r, r)$ . Пусть, далее,  $q$  — любая общая точка регулярности операторов  $\dot{B}$  и  $B$  (в частности,  $q$  может быть произвольным кватернионом с ненулевой вещественной частью),  $\operatorname{Res}_{\dot{B}}(q)$  и  $\operatorname{Res}_B(q)$  — их резольвенты. Заметим, что резольвенты  $\operatorname{Res}_{\dot{B}}(q)$ ,  $\operatorname{Res}_B(q): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{\mathbb{F}}$  являются  $\mathbb{F}$ -линейными операторами.

*Наша задача — вывод формулы, связывающей резольвенты этих двух кососамосопряженных расширений кососимметрического оператора  $A$ .*

Не ограничивая общности, будем считать, что расширения  $B$  и  $\dot{B}$  взаимно просты, то есть выполняется следующее равенство

$$\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(\dot{B}) = \mathcal{D}(A).$$

Положим  $\mathfrak{M}_q = \operatorname{Ran}(A - R_q)$ , тогда  $H^{\mathbb{F}} = \mathfrak{M}_q \oplus_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_q^{\circ}$ . Для разности резольвент будем иметь

$$\left( \operatorname{Res}_{\dot{B}}(q) - \operatorname{Res}_B(q) \right) f \begin{cases} = 0 & \text{при } f \in \mathfrak{M}_q \\ \in \mathfrak{N}_q^{\circ} & \text{при } f \in \mathfrak{N}_q^{\circ} \end{cases} \quad (1)$$

Последнее вытекает из того, что при любом  $h \in \mathfrak{M}_{\bar{q}}$

$$\begin{aligned} \left( (\operatorname{Res}_{\dot{B}}(q) - \operatorname{Res}_B(q))f, h \right) &= \left( ((\dot{B} - R_q)^{-1} - (B - R_q)^{-1})f, h \right) = \left( f, ((\dot{B} - R_q)^{-1} - \right. \\ &\left. - (B - R_q)^{-1})^* h \right) = \left( f, ((\dot{B} - R_{\bar{q}})^{-1} - (B - R_{\bar{q}})^{-1})h \right) = (f, 0) = 0. \end{aligned}$$

Выберем  $r$  линейно независимых векторов  $g_1(\bar{q}), g_2(\bar{q}), \dots, g_r(\bar{q})$  из  $\mathbb{F}$ -модуля  $\mathfrak{N}_{\bar{q}}^{\circ}$  и  $r$  линейно независимых векторов  $g_1(q), g_2(q), \dots, g_r(q)$  из  $\mathfrak{N}_q^{\circ}$ . Из (3) для любого  $f \in \mathbb{H}$  следует

$$\left( \operatorname{Res}_{\dot{B}}(q) - \operatorname{Res}_B(q) \right) f = \sum_{k=1}^r g_k(q) c_k. \quad (2)$$

Согласно (4) константы  $c_k$  являются линейными функционалами от  $f$  в  $\mathbb{F}$ -модуле, и мы можем положить

$$c_k = (f, h_k(q)), \quad h_k(q) \in \mathbb{H} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Согласно (3) для любого  $f \in \mathfrak{M}_q$   $c_k(f) = 0$ . Следовательно, если  $h_k(q) \perp_{\mathbb{F}} \mathfrak{M}_q$ , то

$$h_k(q) \in \mathfrak{N}_q^{\circ} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

то есть

$$h_k(q) = \sum_{i=1}^r g_i(\bar{q}) \overline{p_{ik}(q)} \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (3)$$

и (4) принимает вид

$$\left( \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \text{Res}_B(q) \right) f = \sum_{i,k=1}^r g_k(q) p_{ik}(q) (f, g_i(\bar{q})). \quad (4)$$

Заметим, что матрица-функция  $\mathfrak{P}(q) = [p_{ik}(q) \in M_n(\mathbb{F})]$ , определенная на множестве общих точек регулярности операторов  $\dot{B}$  и  $B$ , является невырожденной. Обоснование этого факта аналогично комплексному случаю.

Опуская в (6) элемент  $f$  и рассматривая  $g_k(q)(\cdot, g_i(\bar{q}))$  ( $i, k = 1, 2, \dots, r$ ) как операторы, получаем для любого значения  $q$  из множества общих точек регулярности операторов  $\dot{B}$  и  $B$  формулу

$$\text{Res}_B(q) = \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \sum_{i,k=1}^r g_k(q) p_{ik}(q) (\cdot, g_i(\bar{q})). \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда  $q \in \mathbb{R}$ . В этом случае  $\mathfrak{M}_q, \mathfrak{N}_q$  являются  $\mathbb{H}$ -модулями и  $\mathbb{H} = \mathfrak{M}_q \oplus \mathfrak{N}_q$ . Кроме того, резольвенты  $\text{Res}_{\dot{B}}(q), \text{Res}_B(q)$  являются  $\mathbb{H}$ -линейными операторами. Для разности резольвент будем иметь аналогичный результат:

$$\left( \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \text{Res}_B(q) \right) f \begin{cases} = 0 & \text{при } f \in \mathfrak{M}_q, \\ \in \mathfrak{N}_q & \text{при } f \in \mathfrak{N}_q. \end{cases} \quad (6)$$

Выберем произвольно  $r$  линейно независимых векторов  $g_1(q), g_2(q), \dots, g_r(q)$  из  $\mathbb{H}$ -модуля  $\mathfrak{N}_q$ . Из (11) для любого  $f \in \mathbb{H}$  следует

$$\left( \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \text{Res}_B(q) \right) f = \sum_{k=1}^r g_k(q) c_k, \quad c_k \in \mathbb{H}. \quad (7)$$



Согласно (1) константы  $c_k$  являются линейными функционалами от  $f$ , и мы можем положить

$$c_k = \langle f, h_k(q) \rangle, \quad h_k(q) \in \mathbb{H} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Согласно (11) для любого  $f \in \mathfrak{M}_q$   $c_k(f) = 0$ . Следовательно

$$h_k(q) \in \mathfrak{N}_q \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

то есть

$$h_k(q) = \sum_{i=1}^r g_i(q) p_{ik}(q), \quad p_{ik}(q) \in \mathbb{H} \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (8)$$

и (1) принимает вид

$$\left( \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \text{Res}_B(q) \right) f = \sum_{i,k=1}^r g_k(q) \overline{p_{ik}(q)} \langle f, g_i(q) \rangle. \quad (9)$$

Заметим, что матричная функция  $\mathfrak{P}(q) = [p_{ik}(q)] \in M_n(\mathbb{H})$ , определенная на множестве общих точек регулярности операторов  $\dot{B}$  и  $B$ , является обратимой.

Действительно, предположение, что  $\mathfrak{P}(q)$  необратима влечет линейную зависимость столбцов справа, и, следовательно, векторы  $h_k(q)$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) линейно зависимы, что означает существование вектора  $h \neq 0$ , удовлетворяющего условиям

$$h \perp h_k(q), \quad h \in \mathfrak{N}_q \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Для вектора  $h$  получаем из (1)

$$\left( \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \text{Res}_B(q) \right) h = 0,$$

а это противоречит взаимной простоте операторов  $\dot{B}$  и  $B$ .

Опуская в (9) элемент  $f$  и рассматривая  $g_k(q) \langle \cdot, g_i(q) \rangle$  ( $i, k = 1, 2, \dots, r$ ) как операторы, получаем для любого значения  $q$  из множества общих точек регулярности операторов  $\dot{B}$  и  $B$  формулу

$$\text{Res}_B(q) = \text{Res}_{\dot{B}}(q) - \sum_{i,k=1}^r g_k(q) \overline{p_{ik}(q)} \langle \cdot, g_i(q) \rangle. \quad (10)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ahiezer N.I., Glazman I.M. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве// Издательство "Наука Москва, 1966
- [2] V. A. Derkach, M. M. Malamud, Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps, J. Funct. Anal. **95** (1991), 1 – 95.
- [3] Stefano De Leo, Gisele Ducati. Quaternionic differential operators// arXiv:math-ph/0005023 v3 8 Aug 2002.

- [4] Карпенко И.И. Дефектные подмодули кососимметрических операторов в  $\mathbb{H}$ -модулях// ТВИМ.-№2.-с.42-46.

## Решение дифференциальных уравнений с помощью математического пакета Maple

Османов Смаил Маметович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 304М)

e-mail: smailosmanov@mail.ru

### Аналитическое решение дифференциальных уравнений.

Для нахождения аналитических решений дифференциальных уравнений в Maple применяется команда  $dsolve(eq, var, options)$ , где  $eq$  – дифференциальное уравнение,  $var$  – искомые функции,  $options$  – параметры. Параметры могут указывать метод решения задачи, например, по умолчанию ищется аналитическое решение:  $type = exact$ . [1] При составлении дифференциальных уравнений для обозначения производной применяется команда  $diff$ , например, дифференциальное уравнение  $y'' + y = x$  записывается в виде:  $diff(y(x), x\$2) + y(x) = x$ . Общее решение дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных, число которых равно порядку дифференциального уравнения. В Maple такие постоянные, как правило, обозначаются как  $\_C1$ ,  $\_C2$  и т.д. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения всегда выводится так, чтобы была четко видна, структура этого решения. Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения этого же неоднородного дифференциального уравнения. Поэтому в строке вывода решение неоднородного линейного дифференциального уравнения всегда состоит из слагаемых, которые содержат произвольные постоянные (это общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения), и слагаемых без произвольных постоянных (это частное решения этого же неоднородного дифференциального уравнения). Команда  $dsolve$  выдает решение дифференциального уравнения в не вычисляемом формате. Для того, чтобы с решением можно было бы работать далее (например, построить график решения) следует отделить правую часть полученного решения командой  $rhs(\%)$ . К примеру, мы получили следующее решение:  $y(x) = \sin(x)$ , теперь отделим

правую часть:  $y1 := rhs(\%)$ , где  $y1$  произвольная переменная, которой присваивается правая часть нашего решения.

Пример [2].

Найти общее решение уравнения в разделяющихся переменных:

$$(x^2 - 1)y'(x) + 2xy^2(x) = 0$$

Решение:

$$> ode := (x^2 - 1)diff(y(x), x) + 2x(y(x))^2 = 0$$

$$ode := (x^2 - 1)\frac{d}{dx}y(x) + 2x(y(x))^2 = 0$$

$$> dsolve(ode, y(x))$$

$$y(x) = (\ln(x - 1) + \ln(x + 1) + \_C1)^{-1}$$

### Решение задачи Коши или краевой задачи.

Команда *dsolve* может найти решение задачи Коши или краевой задачи, если помимо дифференциального уравнения задать начальные или краевые условия для неизвестной функции. Для обозначения производных в начальных или краевых условиях используется дифференциальный оператор  $D$ , например, условие  $y''(0) = 2$  следует записать в виде  $(D@@2)(y)(0) = 2$ , или условие  $y'(1) = 0$ :  $D(y)(1) = 0$ . Производная  $n$ -го порядка записывается в виде  $(D@@n)(y)$ . Рассмотрим пример: найдем решение задачи Коши и построим график решения:

$$y^{(4)} + y'' = 2\cos(x), y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$$

Решение:

$$> ode := diff(y(x), x$4) + diff(y(x), x$2) = 2\cos(x)$$

$$ode := \frac{d^4}{dx^4}y(x) + \frac{d^2}{dx^2}y(x) = 2\cos(x)$$

$$> cond := y(0) = -2, D(y)(0) = 1, (D@@2)(y)(0) = 0, (D@@3)(y)(0) = 0$$

$$cond := y(0) = -2, D(y)(0) = 1, D^{(2)}(y)(0) = 0, D^{(3)}(y)(0) = 0$$

$$> dsolve(\{ode, cond\}, y(x))$$

$$y(x) = -2\cos(x) - \sin(x)x + x$$

$$> y1 := rhs(\%) : plot(y1, x = -10..20, thickness = 2)$$

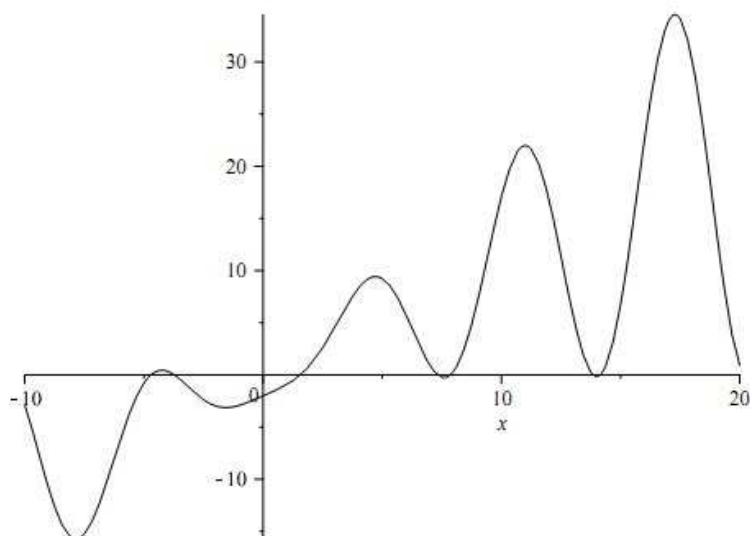


Рис. 1

При решении задачи Коши искомая функция и начальные условия в команде *dsolve* указываются в фигурных скобках. Для построения графика применяется команда *plot(y1, x = -10..20, thickness = 2)*, где *y1* – правая часть нашего решения, *x = -10..20* – рассматриваемый нами промежуток оси абсцисс, *thickness = 2* – толщина кривой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Всемирная сеть интернет: <http://www.exponenta.ru/soft/Maple/Maple.asp>.
- [2] Голоскокова Д. П. *Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple* С-Пб: Питер, 2004г, – 544с

## Геометрические приложения алгебры кватернионов

*Савчин Татьяна Богдановна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРА И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500М)

e-mail: sav-chin@mail.ru

Наиболее естественным способом, позволяющим описывать повороты в трехмерном пространстве, является использование операторов преобразования и соответствующих им матриц. Однако использование кватернионов позволяет дать более простую форму такого поворота. Представление трехмерных вращений при помощи кватернионов удобно тем, что кватернион определяет непосредственно его геометрические характеристики: ось вращения и угол поворота.

Пусть  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ,  $q_t \in \mathbb{R}$ . Вещественное число  $q_0$  называют *вещественной частью* кватерниона, а кватернион  $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$  — *векторной частью* кватерниона. Таким образом, любой кватернион может быть в виде  $q = q_0 + \vec{q}$ .

Величина  $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$  называется *модулем* кватерниона.

Рассмотрим кватернион вида  $q = q_0 + \vec{q}$ , модуль которого равен единице. Обозначим  $\vec{q}' := |\vec{q}|^{-1} \vec{q}$ . Тогда кватернион  $q$  можно записать в следующем виде:

$$q = q_0 + |\vec{q}| \cdot \vec{q}'.$$

Согласно определению нормы  $|q|^2 = |q_0|^2 + |\vec{q}|^2 = 1$ . В этом случае  $q_0$  и  $|\vec{q}|$  можно принять за косинус и синус некоторого угла:

$$q_0 = \cos \varphi, \quad |\vec{q}| = \sin \varphi.$$

Следовательно, каждый кватернион с модулем, равным единице, можно записать следующим образом:

$$q = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \vec{q}'. \quad (1)$$

Кватернион  $q = q_0 + \vec{q}$ , модуль которого отличен от единицы, можно представить как  $q = |q|(|q|^{-1}q)$ , где  $|q|^{-1}q$  — кватернион с единичным модулем. Согласно равенству (1)

$$|q|^{-1}q = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \vec{q}', \quad \text{где } \vec{q}' = |\vec{q}|^{-1} \vec{q}.$$

Следовательно,

$$q = |q|(\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \vec{q}'). \quad (2)$$

Выражение (2) называется *тригонометрической формой* кватерниона  $q$ .

Тригонометрическая форма кватерниона аналогична тригонометрической записи комплексных чисел. Из нее следует, что любой кватернион однозначно определяется значением модуля  $|q|$ , единичным вектором. При этом определение кватерниона  $\vec{q}'$  и угла  $\varphi$  является двузначным, так как одновременная замена знака при  $\vec{q}'$  и  $\varphi$  на обратный не изменяет кватерниона.

Описание вращений начнем с евклидова ориентированного пространства  $\mathbb{R}^3$  с ортонормированным ориентированным базисом  $i, j, k$ . Вращение пространства  $\mathbb{R}^3$  определяется своей осью вращения и углом поворота  $\theta$  вокруг этой оси. Ось можно задать ортом  $\vec{q}'$ , который задается своими углами  $\alpha, \beta, \gamma$  с осями  $i, j, k$ :  $\vec{q}' = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$ .

Заметим, что вращение на положительный угол вокруг этой оси совпадает с вращением на противоположный угол вокруг противоположного направления оси.

Таким образом, каждое вращение трехмерного вещественного пространства задается четырьмя параметрами: углом  $\theta$  и косинусами направляющих углов  $\alpha, \beta, \gamma$  вектора  $\vec{q}'$ , причем, по теореме Пифагора,  $|\vec{q}'|^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Каждому такому вращению можно поставить в соответствие кватернион, модуль которого равен единице:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{q}'.$$

**Замечание 1.** Такая форма записи определяет кватернион неоднозначно. Действительно, угол поворота  $\theta$  определяется с точностью до  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $n$  нечетно, то  $\cos \frac{\theta + 2\pi n}{2} = -\cos \frac{\theta}{2}$ ,  $\sin \frac{\theta + 2\pi n}{2} = -\sin \frac{\theta}{2}$ , и для таких углов мы получим кватернион противоположного знака. Другими словами, одному и тому же повороту отвечают два кватерниона, противоположные по знаку.

Следующая теорема показывает, как именно действие вращения на вектор трехмерного пространства осуществляется с помощью его умножения на соответствующие кватернионы.

**Теорема 1.** Пусть  $\rho$  — вращение пространства  $\mathbb{R}^3$  вокруг оси, задаваемой ортом  $\vec{q}' = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$  и углом поворота  $\theta$  вокруг этой оси,  $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ . Тогда  $\rho(x) = qx\bar{q}$ , где

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{q}'.$$

**Доказательство 2.** Используя естественный изометрический изоморфизм между вещественным линейным пространством чисто мнимых кватернионов и пространством  $\mathbb{R}^3$ , отождествляем кватернион  $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$  и вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ . Действие заданного в теореме вращения  $\rho$

осуществляется матрицей вращения

$$R = \begin{bmatrix} u_1^2 + (1 - u_1^2) \cos \theta & u_1 u_2 (1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta & u_1 u_3 (1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta \\ u_1 u_2 (1 - \cos \theta) + u_3 \sin \theta & u_2^2 + (1 - u_2^2) \cos \theta & u_2 u_3 (1 - \cos \theta) - u_1 \sin \theta \\ u_1 u_3 (1 - \cos \theta) - u_2 \sin \theta & u_2 u_3 (1 - \cos \theta) + u_1 \sin \theta & u_3^2 + (1 - u_3^2) \cos \theta \end{bmatrix},$$

где  $u_1 = \cos \alpha$ ,  $u_2 = \cos \beta$ ,  $u_3 = \cos \gamma$ . Следовательно, координаты вектора  $\rho(x)$  вычисляются по формуле  $\rho(x) = Rx =$

$$= \begin{bmatrix} (u_1^2 + (1 - u_1^2) \cos \theta)x_1 + (u_1 u_2 (1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta)x_2 + (u_1 u_3 (1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta)x_3 \\ (u_1 u_2 (1 - \cos \theta) + u_3 \sin \theta)x_1 + (u_2^2 + (1 - u_2^2) \cos \theta)x_2 + (u_2 u_3 (1 - \cos \theta) - u_1 \sin \theta)x_3 \\ (u_1 u_3 (1 - \cos \theta) - u_2 \sin \theta)x_1 + (u_2 u_3 (1 - \cos \theta) + u_1 \sin \theta)x_2 + (u_3^2 + (1 - u_3^2) \cos \theta)x_3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Далее рассмотрим произведение кватернионов  $qx\bar{q}$ , записанных в векторной форме. Для вычисления этого произведения используем правило умножения кватернионов в векторной форме:

$$(q_0 + \vec{q})(p_0 + \vec{p}) = q_0 p_0 - (\vec{q}, \vec{p}) + [\vec{q}, \vec{p}],$$

где  $(\vec{q}, \vec{p})$  — скалярное произведение векторов  $\vec{q}$  и  $\vec{p}$ , а  $[\vec{q}, \vec{p}]$  — векторное произведение векторов  $\vec{q}$  и  $\vec{p}$ . Так как  $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$  — чисто мнимый кватернион, то  $x = \vec{x}$ , а  $q = q_0 + \vec{q}$ , где  $q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$ ,  $\vec{q} = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{q}'$ . Тогда

$$\begin{aligned} qx\bar{q} &= (q_0 + \vec{q})\vec{x}(q_0 - \vec{q}) = (-\langle \vec{q}, \vec{x} \rangle + q_0 \vec{x} + [\vec{q}, \vec{x}])(q_0 - \vec{q}) = \\ &= (q_0^2 - |\vec{q}|^2)\vec{x} + 2\langle \vec{q}, \vec{x} \rangle \vec{q} + 2q_0[\vec{q}, \vec{x}]. \end{aligned}$$

Так как в вещественной форме  $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ , где

$$q_1 = \sin \frac{\theta}{2} u_1, \quad q_2 = \sin \frac{\theta}{2} u_2, \quad q_3 = \sin \frac{\theta}{2} u_3,$$

то

$$\begin{aligned} qx\bar{q} &= (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(x_1 i + x_2 j + x_3 k) + 2(q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3) \times \\ &\times (q_1 i + q_2 j + q_3 k) + 2q_0((x_3 q_2 - x_2 q_3)i - (x_3 q_1 - x_1 q_3)j + (x_2 q_1 - x_1 q_2)k) = \\ &= \left( (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + 2q_1^2)x_1 + (2q_1 q_2 - 2q_0 q_3)x_2 + (2q_1 q_3 + 2q_0 q_2)x_3 \right) i + \\ &+ \left( (2q_1 q_2 + 2q_0 q_3)x_1 + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + 2q_2^2)x_2 + (2q_2 q_3 - 2q_0 q_1)x_3 \right) j + \\ &+ \left( (2q_1 q_3 - 2q_0 q_2)x_1 + (2q_2 q_3 + 2q_0 q_1)x_2 + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + 2q_3^2)x_3 \right) k. \end{aligned}$$

На примере коэффициента при базисном кватернионе  $i$  покажем, как упростить полученное выражение. Так как  $|q|^2 = |q_0|^2 + |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 = 1$ , то коэффициенты при  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + 2q_1^2 &= -1 + 2q_0^2 + 2q_1^2 = -1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2u_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \\ \cos \theta + u_1^2(1 - \cos \theta) &= u_1^2 + (1 - u_1^2) \cos \theta; \end{aligned}$$

$$q_1 q_2 - 2q_0 q_3 = 2u_1 u_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2u_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = u_1 u_2 (1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta;$$

$$2q_1 q_3 + 2q_0 q_2 = 2u_1 u_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2u_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = u_1 u_3 (1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta.$$

Проделав аналогичные выкладки для коэффициентов при базисных кватернионах  $j, k$ , окончательно получим:

$$qx\bar{q} =$$

$$= \left( (u_1^2 + (1 - u_1^2) \cos \theta)x_1 + (u_1 u_2 (1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta)x_2 + (u_1 u_3 (1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta)x_3 \right) i +$$

$$+ \left( (u_1 u_2 (1 - \cos \theta) + u_3 \sin \theta)x_1 + (u_2^2 + (1 - u_2^2) \cos \theta)x_2 + (u_2 u_3 (1 - \cos \theta) - u_1 \sin \theta)x_3 \right) j +$$

$$+ \left( (u_1 u_3 (1 - \cos \theta) - u_2 \sin \theta)x_1 + (u_2 u_3 (1 - \cos \theta) + u_1 \sin \theta)x_2 + (u_3^2 + (1 - u_3^2) \cos \theta)x_3 \right) k.$$

Сравнивая полученные результаты с равенством (3), приходим к выводу, что произведение  $qx\bar{q}$  действительно задает соответствующее вращение в трехмерном пространстве.

Обратно, каждый кватернион  $q$  с единичным модулем своей тригонометрической формой

$$q = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \vec{q}'.$$

задает вращение трехмерного вещественного пространства, ось которого определяется вектором  $\vec{q}'$ , а угол вращения равен  $2\varphi$ . При этом кватернионы, противоположные по знаку, определяют одно и то же вращение пространства.

Все кватернионы, по модулю равные единице, образуют сферу  $S^3$  в пространстве  $\mathbb{R}^4$ . Поэтому установленное выше соответствие, сопоставляющее каждому нормированному кватерниону вращение, задает отображение сферы  $S^3$  на всю группу вращений  $SO_3$ , которое является двулистным накрытием.

**Теорема 2.** *Отображение накрытия  $g$ , действующее из мультипликативной группы  $S^3$  в мультипликативную группу  $SO_3$ , является гомоморфизмом.*

**Доказательство 3.** Пусть  $q_1, q_2$  — кватернионы, модули которых равны единице,  $x$  — вектор пространства  $\mathbb{R}^3$ . Так как  $|q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2| = 1$ , то  $q_1 q_2 \in S^3$  и согласно теореме 1

$$g(q_1 q_2)x = q_1 q_2 x \bar{q}_2 \bar{q}_1 = g(q_1)(q_2 x \bar{q}_2) = g(q_1)(g(q_2)x) = (g(q_1) \circ g(q_2))x.$$

Следовательно,  $g(q_1 q_2) = g(q_1) \circ g(q_2)$ .

Таким образом, трудно описываемая композиция вращений может быть сведена к легко выполнимому умножению соответствующих им кватернионов. Этот кватернионный метод описания движений используется даже в космических исследованиях при организации ориентации спутников.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В.И. *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов*/Арнольд В.И. — М.: МЦНМО, 2002. — 40 с.
- [2] Бранец В.Н. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*/Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. — М.: "Наука", 1973. — 320 с.
- [3] Конвей Дж. *О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях*/Конвей Дж., Смит Д. — М.: МЦНМО, 2009. — 184 с.

## Рассмотрение элементов математической статистики с помощью ИТ

*Суркова Мария Игоревна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: badrovaleksandra@mail.ru

При решении задач или выполнении учебных заданий по математической статистике студенты сталкиваются с трудностями, вызванными громоздкостью и сложностью вычислительных процедур, что в конечном итоге приводит к большим интеллектуальным усилиям и неоправданным временным затратам. Да и качество, и содержание решаемых задач не соответствуют требованиям времени. Они излишне модельные, отвлеченные от современных реалий, малой размерности, так как предназначены для ручного счета, в лучшем случае при помощи калькулятора.

Применение статистических ППП позволяет: улучшить содержательную часть решаемых задач; повысить эффективность учебного процесса за счет сокращения рутинных процедур, эффективного поиска правильного решения за счет быстрой, программной реализации большого количества альтернативных способов решения.

### Метод наименьших квадратов

Будем искать уравнение регрессии в виде линейной зависимости:

$$y = \alpha_1 x + \alpha_0$$

Коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  определяются из условия: сумма квадратов отклонений экспериментальных значений  $y$  от рассчитанных по уравнению регрессии должна быть минимальной.

$$F = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min$$

Для отыскания минимума составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha_1 x_i + \alpha_0)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha_1 x_i + \alpha_0)(-1) = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем значения коэффициентов:

$$\alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x}$$

$$\alpha_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x^2}$$

Обозначим через  $r_{xy}$  оценку коэффициента линейной корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x S_y}$$

Тогда коэффициенты регрессии определяются равенствами

$$\begin{cases} \alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x} \\ \alpha_1 = r_{xy} \frac{S_y}{S_x} \end{cases}$$

$y = f(x) = \bar{y} - r_{xy} \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x})$  - уравнение линейной регрессии, где  $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$  - коэффициент линейной корреляции.

*Свойства коэффициента линейной корреляции:*

1. Коэффициент линейной корреляции  $r_{xy}$  по абсолютной величине не превышает 1:

$$|r_{xy}| \leq 1$$

2. Если  $X$  и  $Y$  (случайные величины) независимы, то  $r_{xy} = 0$ , обратное утверждение верно не всегда.

3. Если  $r_{xy} = 1$ , то величины  $X$ ,  $Y$  связаны функциональной линейной зависимостью.

#### 1. ПРИМЕР

В таблице представлен объем спроса некоторое изделие за последние 10 месяцев.

Месяц $x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Спрос $y$	3	5	7	11	13	12	19	23	24	30

Подобрать по методу наименьших квадратов оценки параметров, считать, что зависимость между  $x$  и  $y$  имеет вид:  $y_x = ax + b$ . Написать уравнение регрессии и сделать прогноз объема спроса на следующий месяц ( $x = 11$ ).

Исходные данные

Месяц $x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Спрос $y$	3	5	7	11	13	12	19	23	24	30

Метод наименьших квадратов

Проведем вычисления в таблице

$N$	$X$	$Y$	$X^2$	$Y^2$	$XY$	$X + Y$	$(X + Y)^2$
1	1	3	1	9	3	4	16
2	2	5	4	25	10	7	49
3	3	7	9	49	21	10	100
4	4	11	16	121	44	15	225
5	5	13	25	169	65	18	324
6	6	12	36	144	72	18	324
7	7	19	49	361	133	26	676
8	8	23	64	529	184	31	961
9	9	24	81	576	216	33	1089
10	10	30	100	900	300	40	1600
$\Sigma$	55	147	385	2883	1048	202	5364
$1/N \Sigma$	5,5	14,7	38,5	288,3	104,8	20,2	536,4

$$\begin{cases} bn + a \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i \\ b \sum_{i=1}^N x_i + a \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) позволяет найти параметры  $a$  и  $b$  для уравнения связи вида:  $y_x = ax + b$ . Найдем коэффициенты  $a$  и  $b$  из системы (1)  $n = 10$ .

$$\begin{cases} 10b + 55a = 147 \\ 55b + 385a = 1048 \end{cases}$$

$$a = 2,90303$$

$$b = -1,26667$$

Уравнение связи  $y_x = 2,9x - 1,27$ . Помимо уравнения связи определим коэффициент тесноты связи. В случае, когда связь линейная коэффициент называется линейным коэффициентом и высчитывается по формуле:

$$r_{xy} = a \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \text{ где } \sigma_x = \sqrt{\sum x_i^2/n - (\sum x_i/n)^2} \text{ и } \sigma_y = \sqrt{\sum y_i^2/n - (\sum y_i/n)^2}.$$

Данный коэффициент принимает значения от -1 до +1, причем, чем ближе по модулю к 1, тем достовернее связь.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = 2,8723 \\ \sigma_y = 8,4976 \end{array} \right\} \text{- выборочные средние квадратичные отклонения}$$

$r_{xy} = 0,9813$  - связь прямопропорциональная.

$y(11) = 30,667$  Ответ:  $y = 2,9x - 1,27$  - уравнение прямой линии регрессии;

$y(11) = 30,667$  - прогноз объема спроса на следующий месяц.

### б) При помощи статистических функций Excel.

Исходные данные

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	3	5	7	11	13	12	19	23	24	30

Напомним, что уравнение связи имеет вид  $y_x = ax + b$ .

Из  $r_{xy} = a \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  следует, что  $a = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ , а  $b = \bar{y} - a\bar{x}$ .

Вычислим  $r_{xy}$ , используя функцию КОРРЕЛ(массивX:массивY).  $r_{xy} = 0,9813$

- связь прямопропорциональная.

Проведем вычисления в таблице

X	Y	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>
1	3	1	9
2	5	4	25
3	7	9	49
4	11	16	121
5	13	25	169
6	12	36	144
7	19	49	361
8	23	64	529
9	21	81	441
10	30	100	900

$$\bar{x} = (A79 : A88)$$

$\bar{x} = 5,5$  - выборочное значение по  $x$

$$\bar{y} = (B79 : B88)$$

$\bar{y} = 14,7$  - выборочное значение по  $y$

$$\sigma_x = \text{CPЗНАЧ}(C79 : C88) - G78^2 = 2,8723$$

$$\sigma_y = \text{CPЗНАЧ}(D79 : D88) - G80^2 = 8,4976$$

$a = 2,903, b = -1,267, y(11) = 30,667$  Ответ:  $y = 2,9 * x - 1,27$  -уравнение прямой  
 молинейной регрессии,  $y(11) = 30,667$ - прогноз спроса на следующий месяц.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. С. Вентцель Теория вероятностей. /-М., Высшая школа, 2002.
- [2] В. Е. Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 2004.
- [3] Ю. А. Горицкий Практикум по статистике с пакетом Statistica, Excel : <http://exponenta.ru/educat/systemat/goritskii>

## Исследование системы $M/D/1$ с одной орбитой

*Турчик Павел Владимирович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500М)

e-mail: Yska-study@yandex.ru

Рассмотрим одноканальную систему обслуживания  $M/D/1$  с временем обслуживания  $\tau > 0$ , временем пребывания на орбите  $T$ , входящим потоком Пуассона заявок с параметром  $\lambda > 0$ . По правилам обслуживания в системе может быть не более двух заявок. Заявки принимаются в систему только в следующих случаях: 1) система свободна, и поступившая заявка начинает немедленно обслуживаться линией в течение времени  $\tau > 0$ ; 2) в системе находится одна заявка, обслуживаемая линией, при этом поступающая заявка отправляется на орбиту, и после пребывания на орбите длительностью  $T$  ей гарантировано немедленное начало обслуживания; 3) в системе находится одна заявка на орбите, и если в момент поступления очередной заявки оставшееся время пребывания на орбите не меньше  $\tau$ , то она немедленно принимается к обслуживанию, в противном случае она покидает систему (теряется).

Если в системе находятся две заявки (одна на орбите, а другая на линии обслуживания), то очередная заявка входящего потока также покидает систему (теряется).

Данная система была исследована в статье «Исследование системы  $M/D/1$  с одной орбитой» А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич, когда время пребывания на орбите вдвое больше времени обслуживания.

Авторами были получены стационарные вероятности системы:

$$p_{10} = p_{00} (e^{\lambda\tau} - 1), \quad p_{11} = p_{00} (\lambda\tau e^{\lambda\tau} - 1 - \lambda\tau + \lambda\tau \operatorname{ch} \lambda\tau)$$

$$p_{01} = p_{00} (e^{\lambda\tau} - 1 - \lambda\tau + \lambda\tau \operatorname{sh} \lambda\tau), \quad p_{00} = (3e^{\lambda\tau} + 2\lambda\tau e^{\lambda\tau} - 2 - 2\lambda\tau)^{-1}$$

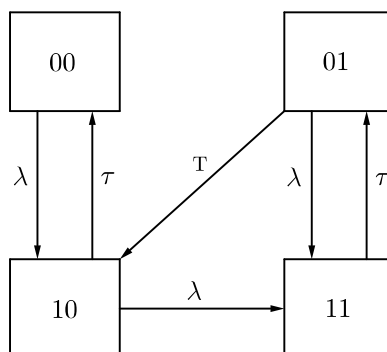


Рис. 1. Диаграмма переходов системы

где  $p_{00}$ ,  $p_{10}$ ,  $p_{01}$ ,  $p_{11}$  – вероятность того, что система свободна от заявок, в системе одна заявка, обслуживаемая линией, в системе одна заявка, находящаяся на орбите, в системе две заявки, одна – на орбите, другая – на обслуживании, соответственно.

Вероятность потери требования в стационарном режиме равна:

$$p = \frac{2\lambda\tau e^{\lambda\tau} + e^{\lambda\tau} + \text{sh } \lambda\tau - 1 - 2\lambda\tau}{3e^{\lambda\tau} + 2\lambda\tau e^{\lambda\tau} - 2 - 2\lambda\tau}.$$

Этот частный случай работы системы был смоделирован программно по методу Монте-Карло. Дело в том, что при аналитическом построении систем массового обслуживания часто случается, что их удается построить только для самых простых, «незатейливых» систем, и, самое главное, они требуют допущения о марковском характере процесса, что далеко не всегда соответствует действительности. В случаях, когда аналитические методы неприменимы (или же требуется проверить их точность), приходится прибегать к универсальному методу статистического моделирования, методу Монте-Карло.

Идея метода чрезвычайно проста и состоит она в следующем. Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата, производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайные результаты. Но, что она может нам дать? Сама по себе – почти ничего, так же как, скажем, один случай излечения больного с помощью какого-то лекарства (или несмотря на лекарство). Другое дело, если таких реализаций получено много.

Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены (разумеется приближенно) любые интересующие нас характеристики.

В сущности, методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он становится только тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.

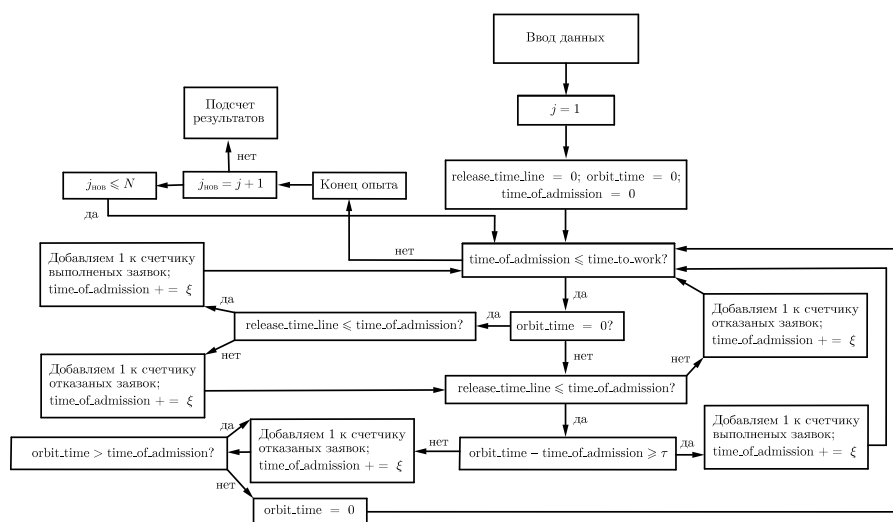


Рис. 2. Блок схема программы

Рассмотрим несколько полученных программных результатов, при времени функционирования системы ( $time\_to\_work$ ) 2 миллиона, для каждого из которых было проведено 10 тысяч опытов.

$$\lambda = 1, \tau = 5 :$$

Вероятности	По формулам	По методу Монте-Карло
$p_{00}$	0.0005	0.0005
$p_{10}$	0.0768	0.0959
$p_{01}$	0.2677	0.3202
$p_{11}$	0.6548	0.5832
$p$	0.8844	0.8495

$$\lambda = 2, \tau = 2 :$$

Вероятности	По формулам	По методу Монте-Карло
$p_{00}$	0.0016	0.0021
$p_{10}$	0.0907	0.1170
$p_{01}$	0.2688	0.3326
$p_{11}$	0.6387	0.5480
$p$	0.8630	0.8158

$$\lambda = 4, \tau = 3 :$$

Вероятности	По формулам	По методу Монте-Карло
$p_{00}$	0.0000002	0.000001
$p_{10}$	0.0370	0.0423
$p_{01}$	0.2592	0.2812
$p_{11}$	0.7037	0.6763
$p$	0.9444	0.9336

Как правило, метод Монте-Карло дает приближенные характеристики, точность которых зависит от количества проведенных испытаний.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соболев И.М. *Метод Монте-Карло*. М., «Наука», 1998, 64 с.  
 [2] Коваленко А.И., Марянин Б.Д., В.П. Смолич. *Исследование системы M/D/1 с одной орбитой*. Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, факультет математики и информатики.

## Учёт специфики оптимизационных задач с использованием квазимер и квазирасстояний

*Шпилёв Руслан Олегович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
 КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: r\_shpilyov@i.ua

*В данной работе рассмотрено две оптимизационные задачи, связанные с пренебрежением малыми величинами. В первой части рассматривается аналог задачи Ферма-Торричелли-Штайнера для обобщённой функции расстояния (квазирасстояния). Вторая часть работы посвящена аналогу задачи о разделе ресурсов, части которых можно измерить с использованием квазимер. Понятие квазимеры — это аналог меры. При этом главная идея этого понятия — «обнуление» достаточно малых частей.*

### Задача 1. Квазирасстояния

Задача Штайнера — классическая экстремальная задача о поиске на плоскости минимальной системы отрезков, соединяющей заданный конечный набор точек на плоскости. В исходной формулировке это три точки на евклидовой плоскости. Различные постановки задачи Штайнера изучаются в таких областях как дискретная оптимизация, вычислительная геометрия, проблемы трассировки при проектировании сверхбольших интегральных схем, коммуникационных и транспортных сетей: дорог, нефте-, газо- и водопроводов, сетей линий электропередач, коммуникаций, и т.д. [1] Изучением различных обобщений задачи Штайнера занимаются и в наше время [2, 3, 4]. Однако в подавляющем большинстве имеющихся моделей объекты считаются точками. Поэтому возникла естественная идея пересмотреть их с учётом размеров объектов. Мы рассматриваем следующий аналог задачи Ферма-Торричелли-Штайнера.

**Постановка задачи.** Пусть на плоскости даны три круга. Необходимо найти точку, для которой сумма расстояний до этих кругов минимальна.

Формализуем задачу. Пусть координаты центров данных кругов таковы:  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$ , а их радиусы —  $r_A, r_B, r_C$ . Координаты искомой точки  $X_0$  обозначим как  $(x_1, x_2)$ . Расстояние от неё до круга с центром в  $A$  равняется

$$f_A(x_1, x_2) = \begin{cases} |XA| - r_A, & \text{если } |XA| \geq r_A; \\ 0, & \text{если } |XA| < r_A. \end{cases}$$

Будем называть  $f_A(x_1, x_2)$  *квазирасстоянием* от точки  $X$  до точки  $A$ . Аналогично для точек  $B$  и  $C$ . Тогда целевая функция суммы расстояний имеет следующий вид:  $f(x_1, x_2) = f_A(x_1, x_2) + f_B(x_1, x_2) + f_C(x_1, x_2)$ .

Эта функция, очевидно, не будет дифференцируемой в точках окрестностей, но она будет субдифференцируемой в смысле выпуклого анализа [5], поскольку составляющие её функции выпуклы и конечны в конечных точках. Напомним определение субдифференциала для выпуклых функций.

Пусть  $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — выпукла. Если  $\bar{x} \in \text{dom} \varphi := \{x \in X : \varphi(x) \leq \infty\}$ , субдифференциал определяется как совокупность субградиентов  $\varphi$  в точке  $\bar{x}$ :  $\partial \varphi := \{\bar{x} \in X^* : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \forall x \in X\}$ .

Согласно свойствам субдифференциала выпуклых функций [5]:  $\partial f = \partial f_A + \partial f_B + \partial f_C$ . Показано, что субдифференциал функции расстояния до круга  $\omega_A$  равен:

$$\partial f_A(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\overrightarrow{XA}}{|XA|}, & \text{если } X \notin \omega_A; \\ \left\{ \alpha_A \frac{\overrightarrow{XA}}{|XA|} \right\}_{0 \leq \alpha_A \leq 1}, & \text{если } X \in \partial \omega_A; \\ 0, & \text{если } X \in \text{Int} \omega_A. \end{cases}$$

Здесь  $\partial \omega_A$  — граница круга  $\omega_A$ , а  $\text{Int} \omega_A$  — его внутренность. Аналогично для  $\omega_B$  и  $\omega_C$ . Условие того, что точка  $X$  будет точкой минимума, имеет вид [5]:

$$\vec{0} \in \partial f(X).$$

Поскольку функция  $f$ , это необходимое условие минимума является и достаточным. С использованием данного условия был получен следующий результат. Напомним, что точка Ферма треугольника — это либо точка, из которой все его стороны видны под углом  $120^\circ$ , либо вершина его тупого угла, если какой-то угол треугольника больше  $120^\circ$ .

**Теорема 1.** *Положение точки минимума поставленной задачи зависит от положения точки Ферма треугольника центров данных кругов; в зависимости от её расположения относительно данных кругов, будет верно одно из утверждений:*

1) если точка Ферма не лежит ни в одном из кругов, то точка минимума задачи совпадает с ней;

2) если точка Ферма лежит ровно в одном из кругов, то точка минимума задачи лежит на границе этого круга или же в этом круге существует целая хорда точек минимума (задающих одну и ту же минимальную сеть);

3) если точка Ферма лежит ровно в двух кругах (а значит, в их пересечении), то точка минимума задачи лежит на границе этого пересечения;

4) если точка Ферма лежит ровно в трёх кругах, то любая точка из, принадлежащая пересечению трёх кругов является точкой минимума задачи.

Итак, рассмотрение в задаче Штайнера кругов вместо точек вносит значительные изменения в её решение. В случае, когда круги не пересекаются и  $\triangle ABC$  не имеет углов  $\geq 120^\circ$ , решение «устойчиво»: оно совпадает с решением обычной задачи для точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Если же в  $\triangle ABC$  есть угол  $\geq 120^\circ$  или круги пересекаются, решение «неустойчиво» (например, когда  $F \in \text{Int}\omega_A$ , при изменении радиуса  $r_A$  точка  $X$  сдвигается вместе с границей  $\partial\omega_A$ ). Также появляется ряд вырожденных случаев, порождённых спецификой условий задачи.

## Задача 2. Квазимеры

В нашей жизни мы часто сталкиваемся с вопросами распределения каких-либо предметов, ресурсов; эти вопросы нередко вызывают споры. Эта проблема изучалась математиками, начиная с 1940-х годов. Идейной базой для них служит работа А. А. Ляпунова [6], в которой доказана теорема о выпуклости образа векторной меры в конечномерных пространствах. Позже появились работы, в которых рассмотрены приложения основного результата [6] к задаче о разделе сокровищ. Проблеме справедливого распределения предметов посвящены и многие современные работы. Как правило, в задачах такого рода считают, что участники спора используют монотонные, аддитивные, вероятностные меры для оценивания частей делимых объектов. Но можно существуют и ситуации, в которых обычной меры недостаточно, например, такие, в которых чрезмерно малыми или большими множествами пренебрегают. Функции множеств в таких случаях уже не будут мерами, так как они не аддитивны.

Мы рассматриваем задачу о разделе сокровищ для произвольного конечного количества разбойников, каждый из которых использует соответствующий аналог понятия меры для оценки частей сокровищ. Мы полагаем, что система множеств  $\Phi$  — монотонный класс множеств. Напомним общую формулировку задачи.

**Задача.** *п жадным, но честным разбойникам необходимо разделить добычу на равные части. При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей меркой, то есть, подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по своему усмотрению. Оценку частей будем считать неотрицательной. При каких условиях на добычу и на функции множеств, используемые разбойниками, такой делёж возможен?*

Новое расширение понятия меры должно удовлетворять следующим условиям:

- 1) Возможность моделирования ситуаций игнорирования малых множеств.
- 2) Соответственные функции множества должны удовлетворять условиям непрерывности и монотонности (в некотором необходимом нам смысле).

Одним из вариантов такого расширения может стать монотонная и непрерывная в некотором смысле функция множества. Напомним определение монотонной функции множества.

**Определение 1.** *Функция множества  $(\Phi \ni A \rightarrow \rho(A) \in R)$   $\rho$  называется монотонной, если  $\forall A, B \in \Phi : (A \supset B) \Rightarrow (\rho(A) \leq \rho(B))$ .*

В нашей работе мы вводим и используем аналог свойства Дарбу, который мы назвали *промежуточной непрерывностью*.

**Определение 2.** *Пусть  $\rho$  — функция множества  $(\Phi \ni A \rightarrow \rho(A) \in R)$ . Будем называть её промежуточно непрерывной, если*

$$\forall A, B \in \Phi : A \subset B, \rho(A) = a (a > 0); \rho(B) = b (b > a) \forall c \in (a; b) \\ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c; A \subset C \subset B.$$

Также будем использовать и свойство полунепрерывности сверху.

**Определение 3.** *Функция множества  $(\Phi \ni A \rightarrow \rho(A) \in R)$   $\rho$  называется полунепрерывной сверху, если для  $\forall A_1; \dots; A_n; \dots \in \Phi : A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots :$*

$$\rho \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n).$$

Мы вводим понятие квазимеры следующим образом.

**Определение 4.** *Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве)  $\mathfrak{X}$  задана система множеств  $\Phi$  и на  $\Phi$  задана функция  $\rho$   $(\Phi \ni A \rightarrow \rho(A) \in R)$ . Будем говорить, что  $\rho$  — квазимера, если:*

- 1)  $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geq 0; \rho(\emptyset) = 0;$
- 2)  $\rho$  монотонна по определению 1;

- 3)  $\rho$  промежуточно непрерывна по определению 2;  
 4)  $\rho$  полунепрерывна сверху по определению 3;  
 5) существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любых непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  с оценками  $\rho(A) > \varepsilon$  и  $\rho(B) > \varepsilon$  верно равенство  $\rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$ .

Для такого аналога меры получен следующий аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа меры.

**Теорема 2.** Пусть  $\vec{\rho}(A) = (\rho_1(A), \rho_2(A), \dots, \rho_n(A))$ , где  $\rho_k(\cdot)$  — квазимеры. Тогда множество  $(\Phi_A := \{T \in \Phi : T \subseteq A\})$

$$\vec{\rho}(A) = \{(\rho_1(X), \rho_2(X), \dots, \rho_n(X)) : X \in \Phi_A, \rho_k(X) > \varepsilon \forall k\},$$

выпукло.

С использованием предыдущей теоремы показана разрешимость задачи о разделе ресурсов, в которых квазимеры используются для оценки частей.

**Следствие 1.** Пусть  $\rho_k(A)$  — квазимера  $k$ -го участника дележа и  $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$  для  $\varepsilon > 0$  из определения 4. В таком случае задача 2 разрешима.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. / В. М. Тихомиров. — 2-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2006. — 200 с.
- [2] Иванов А. О. Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья. / А. О. Иванов. // *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, № 2. — С. 375-409.
- [3] Mordukhovich B. S., Nam N. M. Applications of variational analysis to a generalized Fermat-Torricelli problem. / *J. Optim. Theory Appl.*, Vol. 148. — 2011. — P. 431-454.
- [4] Донець А. Г. Автореферат диссертации "Розробка методів та алгоритмів розв'язання задачі Штейнера на площині". — УДК 519.1 — Киев, 2002.
- [5] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. / Р. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973.
- [6] Ляпунов А. А. О вполне аддитивных вектор-функциях. / А. А. Ляпунов. // *Известия АН СССР*. — 1940. — Т. 4. — С. 465 — 478.

# Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм

Якубова Алие Рустемовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404)

e-mail: alikamamutova123@mail.ru

## 1. АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

**1.1. Введение.** Пусть  $\Omega$  - произвольная ограниченная область в  $\mathbb{R}^m$  с гладкой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Для функций  $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$  и  $\eta(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \bar{\Omega}$ , справедлива формула Грина

$$\left( \eta, u - \Delta u \right)_{L_2(\Omega)} = \left( \eta, u \right)_{H^1(\Omega)} - \left( \gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma u := u|_{\Gamma}, \quad (1)$$

где  $\Delta := \sum_{k=1}^m \partial^2 / \partial x_k^2$  - оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\gamma$  - оператор следа на  $\Gamma$ , а  $\partial / \partial n$  - производная по внешней нормали к  $\Gamma$ .

Пусть  $F$  и  $E$  - гильбертовы пространства со скалярными произведениями  $(\cdot, \cdot)_F$  и  $(\cdot, \cdot)_E$  соответственно, причем  $F \subset E$ . Будем говорить, что  $F$  плотно вложено в  $E$  и обозначать этот факт символом  $F \hookrightarrow E$ , если  $F$  - плотное линейное подмножество в  $E$  и существует константа  $a > 0$  такая, что

$$\|u\|_E \leq a \|u\|_F, \quad \forall u \in F. \quad (2)$$

Говорят, что пространства  $F$  и  $E$  с указанными свойствами образуют гильбертову пару  $(F; E)$ .

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара  $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  - произвольная ограниченная область с липшицевой границей  $\Gamma := \partial\Omega$ , а нормы определены формулами

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |u(x)|^2 \partial\Omega, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \partial\Omega. \quad (3)$$

По любой паре  $(F; E)$  единственным образом определяется порождающий оператор  $A$  гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$(u, Av)_E = (u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E, \quad \forall u \in F = \mathcal{D}(A^{1/2}), v \in \mathcal{D}(A), \quad (4)$$

$$\mathcal{R}(A) = E.$$

Таким образом, как оператор, действующий в  $E$ , оператор  $A$  является положительно определенным (вообще говоря, неограниченным) самосопряженным оператором, причем  $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$ .

По оператору  $A \gg 0$  можно ввести шкалу гильбертовых пространств  $E^\alpha$ ,  $E^\alpha := \mathcal{D}(A^\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , таким образом, чтобы

$$E = E^0, \quad F = E^{1/2}, \quad F^* = E^{-1/2}, \quad (5)$$

где  $F^*$  – совокупность линейных ограниченных функционалов на пространстве  $F$ . Тогда имеет место оснащение

$$E^{1/2} = F \hookrightarrow E = E^0 \hookrightarrow F^* = E^{-1/2} \quad (6)$$

пространства  $E$ .

Пусть теперь  $\{E, (\cdot, \cdot)_E\}$ ,  $\{F, (\cdot, \cdot)_F\}$  и  $\{G, (\cdot, \cdot)_G\}$  – сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1.

$$F \hookrightarrow E, \quad \|u\|_E \leq a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \quad (7)$$

2. На  $F$  задан оператор  $\gamma$ , называемый оператором следа и ограниченно действующий из  $F$  в  $G$ , причем  $\gamma$  отображает  $F$  на плотное множество  $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$  и

$$\gamma : F \rightarrow G_+ \hookrightarrow G, \quad \|\gamma u\|_G \leq b\|u\|_F, \quad b > 0, \quad \forall u \in F. \quad (8)$$

3. Ядро оператора  $\gamma$ , т.е.  $\ker \gamma =: N$ , плотно в  $E$ :

$$\overline{N} = E. \quad (9)$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1. – 3., является тройка пространств  $E = L_2(\Omega)$ ,  $F = H^1(\Omega)$ ,  $G = L_2(\Gamma)$ ,  $\Gamma := \partial\Omega$ , с введенными на них нормами (3) и стандартной нормой в  $L_2(\Gamma)$ , а также с обычным оператором следа

$$\gamma u := u|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (10)$$

## 1.2. Абстрактная формула Грина.

**Теорема 1.** Пусть для тройки пространств  $E, F, G$  (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора  $\gamma$  выполнены условия (7) – (9). Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение  $Lu \in F^*$  и абстрактная производная по внешней нормали  $di \in (G_+)^*$  такие, что

имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (11)$$

## 2. АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

**2.1. Полуторалинейные ограниченные формы.** Рассмотрим функцию  $\Phi(\eta, u) : F \times F \rightarrow \mathbb{C}$ , определенную на комплексном гильбертовом пространстве  $F$ . Ее называют *полуторалинейной формой*, если она линейна по  $\eta$  и антилинейна по  $u$ , т.е.

$$\begin{aligned} \Phi(c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2, u) &= c_1 \Phi(\eta_1, u) + c_2 \Phi(\eta_2, u), \\ \Phi(\eta, c_1 u_1 + c_2 u_2) &= \bar{c}_1 \Phi(\eta, u_1) + \bar{c}_2 \Phi(\eta, u_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Простейшим примером полуторалинейной формы является скалярное произведение  $(\eta, u)_F$ .

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на  $F$ , если

$$|\Phi(\eta, u)| \leq c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F, \quad \forall \eta, u \in F, \quad c_1 > 0. \quad (13)$$

Будем считать далее, что имеется гильбертова пара пространств  $(F; E)$ , а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*. \quad (14)$$

Нетрудно установить, что каждой форме  $\Phi(\eta, u)$  однозначно отвечает линейный ограниченный оператор  $A : F \rightarrow F^*$ , с помощью которого форма  $\Phi(\eta, u)$  допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (15)$$

Очевидно, имеет место и обратное утверждение: каждый линейный ограниченный оператор  $A : F \rightarrow F^*$  однозначно определяет форму  $\Phi(\eta, u)$  по закону (15), и для этой формы выполнено неравенство (13) с константой  $c_1 := \|A\|_{F \rightarrow F^*}$ . Таким образом, между ограниченными формами и их операторами имеет место взаимно однозначное соответствие.

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)} \quad (16)$$

называется *сопряженной* к форме  $\Phi(\eta, u)$ . Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u), \quad \forall \eta, u \in F. \quad (17)$$



то форма  $\Phi(\eta, u)$  называется *эрмитовой*, или *симметрической*. Сопряженной форме  $\Phi^*(\eta, u)$  однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор  $A^* : F \rightarrow F^*$  :

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A^*u \rangle_E, \quad (18)$$

а эрмитовой (симметрической) форме отвечает *самосопряженный* оператор, действующий из  $F$  в  $F^*$  :

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E = \overline{\langle u, A\eta \rangle_E}, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (19)$$

**2.2. Равномерно аккретивные формы.** Назовем форму  $\Phi(\eta, u)$  и отвечающий ей оператор  $A$  *равномерно аккретивными* в пространстве  $F$ , если

$$\operatorname{Re} \Phi(u, u) = \operatorname{Re} \langle u, Au \rangle_E \geq c_2 \|u\|_F^2, \quad c_2 > 0, \quad \forall u \in F. \quad (20)$$

(Это соотношение иногда называют также *усиленным неравенством Гординой*.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u, u)| \geq c_2 \|u\|_F^2, \quad (21)$$

поскольку  $|\Phi(u, u)| \geq \operatorname{Re} \Phi(u, u)$ .

**Лемма 1.** *Ограниченная равномерно аккретивная форма  $\Phi(\eta, u)$  может быть представлена через скалярное произведение в  $F$  в виде*

$$\Phi(\eta, u) = (Q\eta, u)_F = (\eta, Q^*u)_F, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (22)$$

где  $Q$  – линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор.

**Лемма 2.** *Ограниченный на  $F$  равномерно аккретивный оператор  $A : F \rightarrow F^*$ , отвечающий форме  $\Phi(\eta, u)$ , имеет ограниченный обратный оператор  $A^{-1} : F^* \rightarrow F$ .*

**2.3. О представлении несимметрической равномерно аккретивной формы.** Представленные выше факты позволяют установить для ограниченной несимметрической равномерно аккретивной формы  $\Phi(\eta, u)$  структуру отвечающего ей оператора .

Итак, пусть несимметрическая форма  $\Phi(\eta, u)$  удовлетворяет условиям (13) и (20), т.е. является ограниченной и равномерно аккретивной в пространстве  $F$ , причем  $\Phi(\eta, u) \neq \Phi^*(\eta, u)$ .

Введем в рассмотрение симметрические формы

$$\begin{aligned}\Phi_R(\eta, u) &:= \frac{1}{2} \left[ \Phi(\eta, u) + \Phi^*(\eta, u) \right] = \Phi_R^*(\eta, u), \\ \Phi_I(\eta, u) &:= \frac{1}{2i} \left[ \Phi(\eta, u) - \Phi^*(\eta, u) \right] = \Phi_I^*(\eta, u),\end{aligned}\tag{23}$$

называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы  $\Phi(\eta, u)$ , так как

$$\Phi(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u) + i\Phi_I(\eta, u).\tag{24}$$

Для  $\Phi_R(\eta, u)$  из (20), (13) имеем неравенства

$$c_2 \|u\|_F^2 \leq \Phi_R(u, u) =: \|u\|_{F_0}^2 \leq c_1 \|u\|_F^2, \quad \forall u \in F.\tag{25}$$

Отсюда следует, что в пространстве  $F$  можно ввести норму, эквивалентную норме  $\|u\|_F$ , а также соответствующее скалярное произведение. Таким образом, теперь имеем  $F = F_0$ , а норма в  $F_0$  определена по закону (25).

Возникает гильбертова пара пространств  $(F_0; E)$ . Обозначим через  $A_0$  оператор этой гильбертовой пары. Тогда в шкале пространств  $E^\alpha$ , построенной по этому оператору, будем иметь

$$E = E^0, \quad F_0 = E^{1/2} = \mathcal{D}(A_0), \quad F_0^* = E^{-1/2} = \mathcal{R}(A_0),\tag{26}$$

$$A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(F_0; E), \quad A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(E; F_0^*),\tag{27}$$

$$(\eta, u)_{F_0} = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0 u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0.\tag{28}$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств мнимой части формы  $\Phi(\eta, u)$ . Из неравенства (13), (25) имеем

$$\begin{aligned}|\Phi_I(\eta, u)| &\leq |\Phi(\eta, u)| \leq c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \leq c_1 c_2^{-1} \|\eta\|_{F_0} \cdot \|u\|_{F_0} = \\ &= c_1 c_2^{-1} \|A_0^{1/2}\eta\|_E \cdot \|A_0^{1/2}u\|_E,\end{aligned}\tag{29}$$

т.е. формы  $\Phi_I(\eta, u)$  и  $\Phi(\eta, u)$  ограничены сверху в пространстве  $F_0$ .

Из (29) следует, что форму  $\Phi_I(\eta, u)$  можно рассматривать как функцию от аргументов  $A_0^{1/2}\eta$  и  $A_0^{1/2}u$  в пространстве  $E$ :

$$\Phi_I(\eta, u) =: \varphi(\eta', u'), \quad \eta' = A_0^{1/2}\eta \in E, \quad u' = A_0^{1/2}u \in E,\tag{30}$$

причем эта новая форма ограничена на  $E$ . Поэтому к форме  $\varphi(\eta', u')$  применима лемма 1. Тогда

$$\varphi(\eta', u') = (Q\eta', u')_E = (\eta', Qu')_E, \quad \forall \eta', u' \in E,\tag{31}$$

где уже учтено, что оператор  $Q \in \mathcal{L}(E)$  является самосопряженным в  $E$ . Таким образом, из (30), (31) имеем представление

$$\Phi_I(\eta, u) =: (QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, QA_0^{1/2}u)_E, \quad \forall \eta, u \in F_0.\tag{32}$$

Окончательно, с учетом (24), (25), (32), получаем

$$\begin{aligned}\Phi(\eta, u) &= (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E + i(QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= \langle \eta A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F.\end{aligned}\quad (33)$$

Сравнивая (33) с формулой (15), приходим к выводу, что оператор  $A$  формы  $\Phi(\eta, u)$  имеет вид

$$A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}, \quad A \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \quad (34)$$

Так как  $Q = Q^*$  в пространстве  $E$ , а оператор  $A_0^{1/2}$  ограниченно обратим, то оператор  $A$  имеет ограниченный обратный

$$A^{-1} = A_0^{-1/2}(I - iQ)^{-1}A_0^{-1/2}, \quad A^{-1} \in \mathcal{L}(F_0^*, F_0). \quad (35)$$

Для сопряженной формы  $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(\eta, u)}$  имеем

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F = F_0. \quad (36)$$

Отсюда с учетом определения (18) получаем, что форме  $\Phi^*(\eta, u)$  отвечает сопряженный к (34) оператор

$$A^* = A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}, \quad A^* \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \quad (37)$$

Заметим также, что при  $Q = 0$ , т.е. в симметрическом случае, из (34), (37) следует, что

$$\Phi(\eta, u) = \Phi^*(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, A_0 u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (38)$$

где  $A_0 : F_0 \rightarrow F_0^*$  – самосопряженный оператор в смысле определения (8).

#### 2.4. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм.

**Теорема 2.** (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм). Пусть выполнены условия (7) – (9) для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия (13), (20) для формы  $\Phi(\eta, u)$ . Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \quad (39)$$

$$Lu = L_N u + L_M u \in F_0^*, \quad Lu = Lu_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M \in (G_+)^*.$$

При этом  $\partial u$  определяется однозначно по элементам  $u \in F_0$  и  $Lu \in F_0^*$ ;  
 $F = F_0 = N(\dot{+})M$ ,  $N = \ker \gamma$ ,  $M = \ker L$ .

**Теорема 3.** (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейной сопряженной формы). Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, L_* u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial_* u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \quad (40)$$

где  $L_* u = L_{*,N} u + L_{*,M} u \in F_0^*$ ,  $L_* u = L_* u_{N_*}$ ,  
 $\partial_* u := \partial_{M_*} u_{M_*} + \partial_{N_*} u_{N_*} \in (G_+)^*$ .

**Теорема 4.** (вторая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм). Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеет место следующая абстрактная формула Грина:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \overline{\langle u, L_* \eta \rangle_E} = \overline{\langle \gamma u, \partial_* \eta \rangle_G} - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (41)$$

Данная работа имеет реферативный характер и основана на статьях [1] – [4].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и ее приложения*. – Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.», – 2011, 136 с.
- [2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский матем. вестник*. – 2004. – Т.1. – № 1. – С. 69 – 97.
- [3] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики*. – 2004. – Т.2. – С. 52 – 80.
- [4] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях // Международный научный журнал «Спектральные и эволюционные задачи»*. – 2011. – Т.21 – № 1. – С. 2 – 39.

## Секция ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

### Адаптивный web-дизайн

*Авджиев Василий Андреевич*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500–П)

e-mail: Avdgiev@gmail.com

Адаптивные веб-сайты – сайты, которыми удобно пользоваться независимо от того, какое устройство сейчас в вашем распоряжении. Сегодня эта концепция – не прихоть, а важный тренд развития Сети. И речь идет не просто о «тянущемся» сайте, а о его «умном» приспособлении к любому устройству. Пользователю, который удобно расположился за большим экраном, вы покажете сразу несколько колонок текста. Тому же, кто зашел на Ваш сайт с iPhone – лишь тот контент, который нужен ему в дороге. В последнее время все больше пользователей заходят в Интернет при помощи планшетов, то есть у нас появилась еще одна форма доступа – не мобильная и не стационарная, а нечто среднее. Исходя из этого, сейчас нам приходится считаться с гораздо большим количеством устройств, типов входа и разрешений. Сеть окончательно вышла за пределы мира стационарных компьютеров.

Один из способов решения проблемы корректного отображения сайта на разных устройствах является создание сразу нескольких сайтов, рассчитанных под разные размеры экранов. Я считаю, что этот метод не оправдывает вложенных усилий. Это вовсе не значит, что мобильные сайты никому не нужны или что для их создания нет коммерческих оснований. Но, на мой взгляд, представление контента в зависимости от устройства – подход если не проигрышный, то, во всяком случае, нежизнеспособный. За последние несколько лет стало понятно, что мы не в состоянии угнаться за темпами развития технологий. Поэтому создание сайта, который мог бы сам адаптироваться под любое устройство – путь куда более рациональный.

Вместо того, чтобы создавать отдельный дизайн для каждого вновь появляющегося устройства или браузера, мы должны отнестись к ним как к разным проявлениям одного и того же дизайна. Другими словами, я предпочел создать сайт, который будет не только более гибким, но и лучше адаптируемым к устройствам отображения.

Создание такого сайта базируется на трех основных этапах:

## 1) Создание гибкого макета на основе сетки

На этом этапе следует отказаться от «железобетонного» макета, в котором значение ширины указывается в пикселях. Значение ширин для элементов нужно создавать не в фиксированных размерах, а в пропорции по отношению к родительскому элементу.

Например:

```
#main{ width: 980px; margin: 0 auto;}
#blog{ float: left; width: 760px;}
#sidebar{ float: right; width: 220px;}
```

Видно, что ширина для родительского и двух дочерних блоков задана строго в пикселях. Для того, чтоб перевести эти значения в проценты нужно исходить из расчета, что ширина родительского блока равна 100%.

Таким образом решение этой проблемы выглядит так:

```
#main{ width: 100%; margin: 0 auto;}
#blog{ float: left; width: 77.551%;}
#sidebar{ float: right; width: 22.449%;}
```

Причем округлять проценты не стоит. Чем точнее значение, тем удачнее будет решение.

Чтобы это также работало на мобильных устройствах, нужно использовать мета-тег (`<meta name=«viewport» content=«width=device-width»>`). По умолчанию мобильный браузер создает для страницы некую ширину, причем в разных браузерах разная ширина. Эту ширину браузер пытается уместить на маленьком экране смартфона путем масштабирования страницы. Это приводит к плохому результату: мелкие кнопки навигации, нечитабельный текст и тд. Но если мы используем тег `viewport`, мы сообщим браузеру, что ширина нашей страницы равна ширине мобильного устройства. И зная эту ширину мы сами можем оптимально разместить элементы на странице.

## 2) Интеграция гибких изображений

Проблема при работе с изображениями заключается в том, что если выставлен фиксированный размер картинка, и пользователь масштабирует страницу, картинка может вылезти за отведенные ей границы. Чтобы таких проблем не возникало, достаточно указать картинке свойство `max-width=100%`. Это означает, что картинка не должна быть шире своего родительского элемента.

### 3) Медиазапросы, модуль спецификаций CSS3

К примеру, на сайте размещены две колонки, одна с картинкой, другая с текстом. При просмотре на мобильном телефоне такой страницы картинка может сузиться до размеров, при которых не видно её содержания. А колонка с текстом сужается до такой степени, что в одной строке может быть лишь одно слово. При разработке такой страницы, я предлагаю создать другой лейаут для просмотра сайта на экране смартфона. Оптимальной шириной колонки для прочтения текста является 320 px. Чтобы добиться изменения лейаута для экранов с разрешением по ширине меньшей, либо равной 320 px, используем такое правило: `media screen and (max-width=320px)`. Теперь на экранах смартфонов текст и картинка будут выглядеть корректно, расположившись вертикально (сначала текст, потом картинка).

Обычно для медиавыражений выделяют несколько контрольных точек. Я предлагаю выделять такие: 320 px (небольшие устройства, телефоны в портретной ориентации), 480 px (телефоны в альбомной ориентации), 768 px (10-ти дюймовые планшеты в портретной ориентации), 1024 px (планшеты в альбомной ориентации), 1200 px (широкие экраны, ноутбуки, стационарные ПК). Это наиболее часто используемые мобильные устройства. С помощью медиавыражений можно не только управлять месторасположением блоков, но и их видимостью. К примеру, не столь важные блоки можно не показывать на экранах мобильных телефонов.

Также при построении адаптивного сайта я придерживался ряда правил:

- не нужно изменять сайт до неузнаваемости
- если сайт работает с пользовательскими данными, они могут быть частично или полностью недоступны в каких-либо состояниях сайта, но нельзя, в зависимости от этого состояния, изменять формат их представления/ввода
- главную страницу мобильных версий часто следует делать разводящей, чтобы максимально быстро перенаправлять пользователя на целевые страницы
- необходимо отслеживать момент перехода от устройства не поддерживающего тач, к устройству с его поддержкой; при этом мы должны понимать, что размер экрана не должен быть определяющим, поскольку на рынке достаточно ноутбуков с тач-экранами
- стараться использовать скрол только для периодической информации (новости, статьи); при этом для оптимизации скорости работы следует

прибегать к дозагрузке такого контента

Правильно пройдя эти этапы, можно добиться отличных результатов. Адаптивный Web – это лучший способ сделать дизайн более приспособленным к врожденной гибкости сети интернет.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. Marcotte *Responsive Web Design*; New York – 2011.

## Т-линейные динамические системы

*Ганиев Юнус Сейт-Аплаевич*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 401–П)

e-mail: yunique33@gmail.com

*Одним из новых направлений математических и физических исследований является развитие методов и средств изучения систем с хаотическим поведением, получившее название теории хаоса. Некоторые из таких систем изменяются непрерывно. Их логично описывать дифференциальными уравнениями и называть, соответственно, непрерывными динамическими системами. Было доказано, что хаотическое поведение в таких системах возникает в случае, если верность системы дифференциальных уравнений, ее описывающих, не менее трех (например, аттрактор Рёсслера). Это в значительной мере усложняет, их изучение. Однако имеются некоторые методы (например, сечение Пуанкаре), которые позволяют снизить на единицу размерность таких систем и перейти к системе конечно-разностных соотношений. Эти системы получили название динамических систем с дискретным временем. Их значительно проще изучать, поскольку здесь применимы многие компьютерные методы, к тому же итерационные методы изучения значительно проще в реализации. Одним из примеров динамических систем являются Т-линейные динамические системы. Цель работы является исследование отображения Т-линейной динамической системы.*

Отображение  $\theta_{n+1} = \lambda \cdot \sin(\theta_n + \alpha)$  - одномерная динамическая система с двумя параметрами  $\lambda$  и  $\alpha$ . Ее можно трактовать как динамическую систему на круге, однако удобнее трактовать как тройку  $(\lambda, \theta, \alpha)$ , как сферические координаты в пространстве презентации :  $\lambda$ -радиальная координата,  $\theta$  - полярный угол,  $\alpha$ -азимутальный угол [1].

Вычисления производятся таким образом:



При фиксированных  $\lambda$  и  $\alpha$ , произвольно задаваемом  $\theta_0$  делается цикл по  $n$ , например 5 тысяч итераций; на печать и на сохранение идет последняя тысяча – чтобы задача успела «забыть» начальные условия (числа пять тысяч и тысяча – произвольны, в некоторых случаях нужно больше итераций). Если в системе есть устойчивая неподвижная точка, то последняя тысяча итераций сливается в одну точку на мониторе и на печати. Если есть устойчивая неподвижная пара точек, то все эти тысячи итераций на мониторе дают две точки; если возникает хаос — видна вся тысяча точек в виде отрезка или пятна.

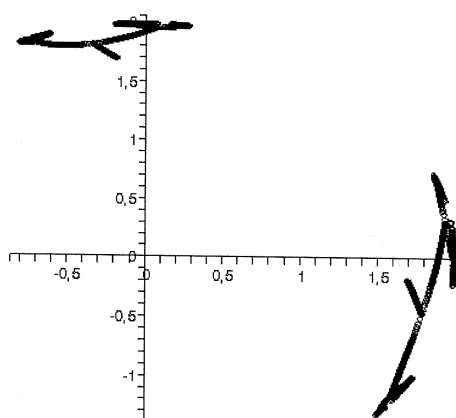


Рис. 1

Если при фиксированном  $\alpha$  сделать цикл с мелким шагом по  $\lambda$  в некотором диапазоне, то можно увидеть фейгенбаумовский каскад бифуркаций в меридиональной плоскости (Рис. 1).

Каскад бифуркаций (Последовательность Фейгенбаума или сценарий удвоения периода) — один из типичных сценариев перехода от порядка к хаосу, от простого периодического режима к сложному аperiodическому при бесконечном удвоении периода. Последовательность Фейгенбаума имеет самоподобную, фрактальную структуру — увеличение какой-либо области выявляет подобие выделенного участка всей структуре.

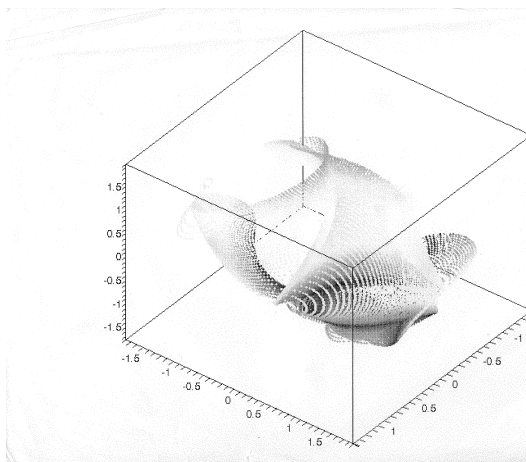


Рис. 2

Если делать цикл по  $\lambda$  и  $\alpha$ , то можно увидеть определенную фигуру. Если посчитать эту картинку в Maple, то ее можно вращать, и в некоторых положения она более или менее похожа на раковину.

Если существенно увеличить  $\lambda$ , то раковину обволакивают толстые сферические слои хаоса. (Рис. 2) Интерес вызывает то, что для этой задачи зона хаоса не расчленяется узкими полосами порядка. Это явление – изрезание хаоса полосами порядка – характерно для классической фейгенбаумовской задачи:  $x_{n+1} = \lambda + x_n^2$ , в которой на плоскости  $(\lambda, x)$  зона хаоса изрезана бесконечным числом полос порядка, и вероятно хаос на оси  $\lambda$  сосредоточен в счетном множестве изолированных точек. Для раковины зона хаоса имеет конечную меру [2].

Фактически, при исследовании любой динамической системы основной интерес представляет не эволюция системы в конкретной точке пространства параметров, но, скорее, бифуркационная структура пространства параметров и, прежде всего, положение и вид бифуркационных гиперповерхностей в этом пространстве, на котором происходит смена аттракторов динамической системы в пространстве состояния системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. А. Йорк, Э.Д. Йорк *Хаотическое поведение и гидродинамика*. – М.: Мир. - 1981.
- [2] Йосс. Ж., Джозеф.Д. *Элементарная теория устойчивости и бифуркации*. – М.: Мир. - 1991.

## Автоматизированные обучающие системы

*Ильин Дмитрий Сергеевич*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: dasdemon@mail.com

Постановка задачи: создание автоматизированной обучающей системы по английскому языку.

При решении проблемы, для возможности применения математического аппарата, ее следует представить в виде математической модели. Задачу оптимизации маршрута можно представить в виде модели на графе.

Проблема автоматизации обучения является актуальной в наши дни. Технологии молниеносно развиваются, совершаются новые открытия, информация постоянно увеличивается в своих объемах, чего нельзя сказать о времени. Его остается столько же на постижение постоянно растущего объема информации. Минимальные требования знаний растут с каждым годом, в связи с этим технологии обучения постоянно модернизируются и совершенствуются, создаются и внедряются нетрадиционные технологии, которые базируются на использовании вычислительной техники с применением активных методов обучения во всем их разнообразии.

Преимущества автоматизированных обучающих систем заключаются в гибкости времени обучения, возможности построения индивидуального учебного плана, охвате разнообразных источников информации, экономичности учебных площадей, технологичности обучающего процесса, социальном равноправии, обновлении роли преподавателя, который теперь координирует учебный процесс, а также улучшает и дополняет его, при этом повышая свою квалификацию.

Для начала нужно определиться с учебным материалом начинкой сайта. Пролистав и проанализировав обучающие сайты и программы, выделив плюсы и минусы каждой обучающей системы, я сделал вывод, что за основу для своего Web-приложения будет взята методическая база из обучающей программы English Platinum, которая в свою очередь является мощным учебным пособием для освоения разговорного и письменного английского.

Каждый интернет-ресурс обладает своей изюминкой, которой и привлекает пользователей сети интернет. Один более опирается на изучение теории и правил, другой на слухо-речевое восприятие и запоминание слов, третий старается комбинировать все возможные способы обучения и т.д. Я же решил

сделать усилие на выполнение упражнений, что позволит обучаемому запоминать не только новые слова, а также правильно использовать их в предложенных обучающей системой предложениях.

Принцип работы будет следующим: пользователь заходит на сайт, авторизуется (либо регистрируется, если этого не делал), затем переходит в раздел обучения, читает и изучает материал. После этого он проверяет свои знания путем выполнения упражнений.

В разделе «упражнения» будет предоставлен список всех упражнений. В каждом из них, представлены предложения, в которых не хватает одного слова. Вместо этих слов стоят поля ввода текста. Пользователь должен заполнить эти формы и нажать кнопку «ок». После того, как он ее нажмет, подсчитывается количество правильных ответов, результат заносится в базу данных и выводится на экран.

Справа от каждого предложения будет его перевод. Если же пользователь затрудняется с ответом, то он может поставить курсор в поле ввода текста и нажать кнопку «подсмотреть» - туда автоматически введется правильный ответ. Затем можно либо продолжить выполнять следующее упражнения либо вернуться к предыдущему, нажав на кнопку «next» или «previous» в зависимости от необходимости.

На личной странице пользователь сможет посмотреть свои результаты оценивания.

Для того, чтобы обучающая система работала, я применяю следующие языки Web-программирования:

HTML - для создания самих страниц сайта;

PHP и JavaScript - для программной начинки Web-приложения;

CSS - для придания сайту динамики и адаптивности к различным устройствам.

Чтобы результаты тестирований где-то регистрировались, и пользователь мог в любой момент просмотреть их, обращаемся за помощью к свободной реляционной системе управления базами данных MySQL, которая позволит хранить информацию в базе данных и далее при помощи PHP-скрипта обращаться к ней, транслировать ее в HTML и при помощи PHP-машины загружать их в браузер пользователя.

Принцип работы авторизации/регистрации пользователя следующая:

Процедура записи результатов пройденных упражнений будет следующая:

1. После выполнения упражнения выдается результат.
2. Происходит запись результата в переменную.
3. Переменная записывается в ячейку таблицы результатов БД.



Затем, когда пользователь захочет посмотреть свои результаты, он зайдет на свою персональную страничку, которая выдаст ему результат по каждому пройденному упражнению и подсчитает общую оценку его проделанной работе. А осуществляться это будет следующим образом:

1. Подается запрос к номеру ячейки таблицы БД.
2. Происходит запись данных из ячейки в переменную. Так процедура проходит с каждой ячейкой.

3. При помощи необходимых функций осуществляются различные действия над ними (вывод отдельных результатов за каждое упражнение, общий подсчет результатов выполненных упражнений и общая оценка проделанной работы), а также вывод результатов на экран.

Итак, автоматизированные обучающие системы являются весьма актуальными на сегодняшний день, т.к. множество людей нуждаются в автоматизированной, а главное – быстрой и простой системе обучения. Web-приложение, посвященное обучению английского языка может с легкостью найти свою целевую аудиторию и занять ячейку среди других конкурирующих обучающих систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] ЭНИМЦ “Моделирующие Системы” *Автоматизированные обучающие системы* – <http://www.ssl.obninsk.ru/web/002/index.nsf/index/aos>
- [2] Коньяков С. *Изучение принципов работы и поддержки обучающих систем* – <http://www.soljah.narod.ru/1semestr.htm>

## Краевая задача термоупругости для прямоугольной пластины

*Крупина Юлия Александровна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: jakrupina@gmail.com

*Рассматривается плоская задача термоупругости для прямоугольной пластины ( $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ) со свободными от напряжения сторонами. Температурное поле  $T(x, y, t)$  считается заданным. Задача рассматривается в квазистатической постановке и сводится к исследованию и решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.*

Исследование напряженного состояния пластины сводится к следующей граничной задаче [1]. Необходимо найти частное решение уравнения термоупругого потенциала

$$\nabla^2 \Phi = \frac{m+1}{m-1} \alpha T \quad (1)$$

и общее решение однородных уравнений Ляме

$$\nabla^2 u + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0; \nabla^2 \omega + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

при следующих граничных условиях:

$$(\sigma_x + \overline{\sigma_x})|_{x=\pm a} = 0; (\sigma_y + \overline{\sigma_y})|_{y=\pm b} = 0; (\tau_{xy} + \overline{\tau_{xy}})|_{x=\pm a, y=\pm b} = 0 \quad (3)$$

В равенствах (1) - (3) введены обозначения:  $m$  - коэффициент Пуассона,  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения материала,  $u$  и  $\omega$  - компоненты вектора перемещений  $\vec{u}$  соответственно по осям  $Ox$  и  $Oy$ ;  $\Theta = \text{div } \vec{u}$  - объемное расширение.

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  находятся по формулам закона Гука, а компоненты тензора напряжений  $\overline{\sigma_x}$ ,  $\overline{\sigma_y}$ ,  $\overline{\tau_{xy}}$  выражаются через термоупругий потенциал соотношениями:

$$\frac{1}{2G} \cdot \overline{\sigma_x} = \frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} - \frac{m+1}{m-1} \alpha T; \frac{1}{2G} \cdot \overline{\sigma_y} = \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} - \frac{m+1}{m-1} \alpha T; \frac{1}{2G} \cdot \overline{\tau_{xy}} = \frac{\partial \Phi^2}{\partial x \partial y}; \quad (4)$$

В общем случае задания температурного поля задачу удобно разбить на четыре более простые задачи, пользуясь свойствами симметрии относительно координатных осей. Рассмотрим случай симметричного распределения температуры, то есть в любой момент времени  $t = t_0$  температура в пластинке

представима в виде:

$$T(x, y, t_0) = \sum_{k,n=0}^{\infty} b_{kn} \cos \frac{k\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

В этом случае легко получить частное решение уравнения (1) для термоупругого потенциала:

$$\Phi(x, y) = -\frac{m+1}{m-1} \alpha \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{b_{kn} \cos \frac{k\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (6)$$

При этом в (5) и (6)  $k, n$  не принимают одновременно нулевые значения. Это обусловлено отсутствием напряжений при равномерном нагреве пластины при данных граничных условиях.

Подставив (6) в (4), можно получить компоненты тензора напряжений, соответствующие термоупругому потенциалу (6).

Построив решение уравнений Ляме (2) по методу, изложенному в работе [2], получаем выражения для напряжений с произвольными постоянными, которые должны быть определены из граничных условий (3). Требование выполнения граничных условий приводит к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

$$q_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_k(a, b) p_n}{a \left( \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)^2} + \quad (7)$$

$$+ \frac{(-1)^k S_k(a, b)}{a \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2} \cdot \frac{m+1}{m-1} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 b_{kn}}{\left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

$$p_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_k(b, a) q_n}{b \left( \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \right)^2} + \quad (8)$$

$$+ \frac{(-1)^k S_k(b, a)}{b \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2} \cdot \frac{m+1}{m-1} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 b_{nk}}{\left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2},$$

где

$$p_n = \frac{(-1)^n}{b} \cdot 4 \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi}{a} b C_n, q_n = \frac{(-1)^n}{a} \cdot 4 \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi}{b} a D_n,$$

$$S_k(a, b) = \frac{4 \left(\frac{k\pi}{b}\right)^3 \sinh^2 \left(\frac{k\pi}{b}\right) a}{\frac{1}{2} \sinh 2 \left(\frac{k\pi}{b}\right) a + \frac{k\pi}{b} a} \quad (9)$$

При исследовании разрешимости и численном решении бесконечных систем будем следовать работе [3]. Несложно показать, что система является регулярной.

В качестве конкретного примера рассмотрим напряженное состояние квадратной пластинки  $a = b = 1$ , вызванное температурным полем, для которого  $b_{kn} = 0$  при  $k \neq 1, n \neq 0$  и  $b_{kn} = -\gamma$  при  $k = 1, n = 0$ . Тогда бесконечная система значительно упрощается и принимает вид:

$$q_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_k(1, 1) p_n}{((k\pi)^2 + (n\pi)^2)^2} + \begin{cases} \frac{S_k(1, 1)}{\pi^2} \cdot \frac{m+1}{m-1} \alpha \gamma, & k=1 \\ 0, & k>0 \end{cases}; \quad (10)$$

$$p_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_k(1, 1) q_n}{((k\pi)^2 + (n\pi)^2)^2} \quad (11)$$

Для нахождения коэффициентов  $p_k$  и  $q_k$  воспользуемся методом улучшенной редукции. Неизвестные бесконечной системы стремятся к ненулевому пределу  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = G_p$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = G_q$ . Вычислим  $G = \frac{G_p + G_q}{2}$ .

$$G_p = 0.590662, G = 0.591604, G_q = 0.592547$$

Тогда решение можно представить в виде:

$$p_k = \check{p}_k + G \cdot \tilde{p}_k; q_k = \check{q}_k + G \cdot \tilde{q}_k \quad (12)$$

где  $\check{p}_k, \check{q}_k$ -решение системы методом простой редукции,  $\tilde{p}_k, \tilde{q}_k$ - решение вспомогательной системы(системы с той же матрицей, но с другими свободными членами).

При численном решении бесконечной системы (10)-(11) в рассмотрение принималось по шестьдесят неизвестных  $p_k, q_k$ . Значения первых двадцати неизвестных представлены в таблице(1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Паркус Г. *Неустановившиеся температурные напряжения*. – М.: Физ-матгиз, – 1963.
- [2] Абрамян Б.Л., Манукян М.М. *Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях*. – ПММ, – 1957– С.177-184.



$p_k$	$q_k$
0.473909	1.435164
0.702894	0.382084
0.692823	0.465713
0.664924	0.510632
0.643497	0.537019
0.628666	0.553538
0.618446	0.564396
0.611288	0.571809
0.606174	0.577026
0.602452	0.580789
0.599695	0.583559
0.597624	0.585632
0.596048	0.587205
0.594835	0.588413
0.593894	0.589349
0.593158	0.590080
0.592579	0.590654
0.592121	0.591108
0.591758	0.591468
0.591469	0.591754
0.591240	0.591981
0.591057	0.592162
0.590913	0.592305
0.590799	0.592417
0.590709	0.592506
0.590640	0.592574
0.590587	0.592626

Рис. 1. Таблица 1

- [3] Коялович Б.М. *Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений.* – Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А.Стеклова, – 1930.

## О собственных частотах при установившихся изгибных колебаниях прямоугольной призмы

*Ляшко Александр Дмитриевич*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: knightLA@yandex.ru

В качестве математической модели выбрана модель установившихся колебаний в постановке плоской деформации изотропного упругого тела. Сечениями призмы являются прямоугольники с размерами  $a:b$ . Периодически изменяющиеся во времени внешние нагрузки приложены к поперечным граням призмы и не изменяются вдоль призмы. К одной из граней призмы приложена

сила, симметричная относительно её середины, а к другой – антисимметричная.

Математическая модель данной задачи сводится к решению краевой задачи на уравнение Навье (1)

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div} \vec{u} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

В данной статье будем рассматривать следующую краевую задачу с крайними условиями (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{xx} \Big|_{|x|=a} &= \sin \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t); & \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{yy} \Big|_{|y|=b} &= 0; \\ \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{xy} \Big|_{|x|=a} &= 0; & \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{xy} \Big|_{|y|=b} &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы решить эту задачу, введем потенциалы Ламе  $\tilde{\phi}(x, y, t)$  и  $\tilde{\psi}(x, y, t)$ , описанные в [1]. Они позволяют заменить уравнение (1) на два волновых уравнения:

$$\Delta \tilde{\phi} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}; \quad \Delta \tilde{\psi} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}; \quad (3)$$

Здесь  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$  – скорости сдвиговой и безвихревой волн соответственно. Так как нас интересуют устоявшиеся колебания, то мы выделим амплитудную составляющую потенциалов Ламе

$$\tilde{\phi} = \phi \sin(\omega t); \quad \tilde{\psi} = \psi \sin(\omega t); \quad (4)$$

Благодаря этой замене уравнения (3) преобразуются в уравнения Гельмгольца

$$\Delta \phi + \Omega_1^2 \phi = 0; \quad \Delta \psi + \Omega_2^2 \psi = 0, \quad (5)$$

где  $\Omega_1 = \omega/c_1$ ,  $\Omega_2 = \omega/c_2$ . В данной статье в качестве безразмерного параметра частоты колебаний призмы будет использоваться  $\Omega = 2\omega a/\pi c_2$ . Для того, чтобы связать потенциалы Ламе с напряжениями воспользуемся законом Гука

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Delta\phi; \\
\frac{1}{2\mu}\sigma_{yy} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Delta\phi; \\
\frac{1}{2\mu}\sigma_{xy} &= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Для того, чтобы решить задачу (5) с краевыми условиями (2), воспользуемся следующим аналитическим представлением решения, которое было получено методом суперпозиции:

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\frac{(-1)^n\sinh(p_{1,n}y)}{p_{1,n}\cosh(p_{1,n}b)}\cos(\alpha_nx)- \\
&-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}y_n\frac{(-1)^n\cosh(p_{1,n}y)}{p_{1,n}\sinh(p_{1,n}b)}\sin(\beta_nx)-\frac{x_0}{\Omega_1^2}\sin(\Omega_1y); \\
\psi &= -\frac{4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\frac{(-1)^n\alpha_n\cosh(p_{2,n}y)}{\alpha_n^2+p_{2,n}^2\cosh(p_{2,n}b)}\sin(\alpha_nx)- \\
&-\frac{4}{b}\sum_{n=1}^{\infty}y_n\frac{(-1)^n\beta_n\sinh(p_{2,n}y)}{\beta_n^2+q_{2,n}^2\sinh(p_{2,n}b)}\cos(\alpha_nx);
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь  $\alpha_n = n\pi/a$ ,  $\beta_n = (2n-1)\pi/2b$ ,  $p_{i,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_i^2$ ,  $q_{1,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_i^2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Для удобства также введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{\beta_n^2 + q_{2,n}^2}{2q_{1,n}}\coth(q_{1,n}a) - 2\frac{\beta_n^2 q_{2,n}}{\beta_n^2 + q_{2,n}^2}\coth(q_{2,n}a); \\
\delta_{1,n} &= \frac{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2}{2p_{1,n}}\tanh(p_{1,n}b) - 2\frac{\alpha_n^2 p_{2,n}}{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2}\tanh(p_{2,n}b)
\end{aligned}$$

Подставив (7) в (6), а получившийся результат в краевые условия (2), после некоторых упрощений получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $x_k$ ,  $y_k$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{2}{ab \sin(\Omega_1 b)} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left( \frac{\beta_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{q_{1,n}^2} - 2 \frac{\beta_n^2}{\beta_n^2 + q_{2,n}^2} \right); \\
x_k &= \frac{2}{b \delta_{1,k}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left( 2 \frac{\beta_n q_{2,n}^2}{(\beta_n^2 + q_{2,n}^2)(\alpha_k^2 + q_{2,n}^2)} - \frac{\beta_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{\alpha_k^2 + q_{1,n}^2} \right); \\
y_k &= \frac{2}{a \delta_k} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left( 2 \frac{\alpha_n p_{2,n}^2}{(\alpha_n^2 + p_{2,n}^2)(\beta_k^2 + p_{2,n}^2)} - \frac{\alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{\beta_k^2 + p_{1,n}^2} \right) - \\
&\quad - x_0 \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\Omega_1 \cos(\Omega_1 b)}{q_{1,k}^2 \delta_k} + \frac{\pi}{b \delta_k} \frac{1}{(\pi/b)^2 - \beta_k^2};
\end{aligned} \tag{8}$$

Решение этой системы обладает той особенностью, что, если существует ограниченное решение, то и  $x_k$ , и  $y_k$  стремятся к некоторой константе. С использованием данного факта, эту систему можно решить более точно, используя, например, метод улучшенной редукции. На этом свойстве и основывается метод нахождения собственных частот, поскольку при собственных частотах не существует ограниченного решения, а при приближении к ним неограниченно возрастает модуль предельной константы. На рисунке 1 показана зависимость величины, обратной предельной константе, от частоты при  $\nu = 3/13$  для призмы с квадратным сечением.

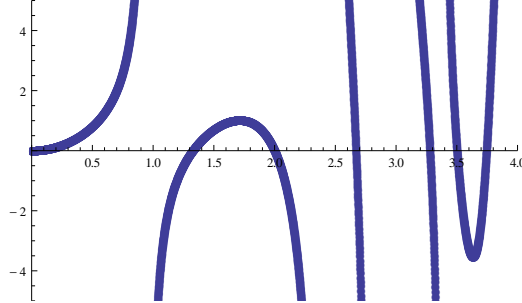


Рис. 1. Зависимость предельной константы от частоты

Таким образом, для того, чтобы найти все собственные частоты достаточно найти все пересечения графика функции с осью абсцисс. С помощью данного метода были найдены первые собственные частоты, указанные таблице 1. В [2] решалась подобная задача, которая может быть сведена к рассматриваемой в

данной статье заменой  $\nu = \tilde{\nu}/(1 + \tilde{\nu})$ . Результаты, полученные в [2] совпадают с результатами из таблицы 1

$b/a$	1/2	1/1	2/1
$\Omega_1^*$	1.051	1.330	1.414
$\Omega_2^*$	2.574	2.003	1.443
$\Omega_3^*$	3.469	2.673	1.816

ТАБЛИЦА 1. Собственные частоты для разных пропорций

В данной статье изложен метод нахождения собственных частот с использованием бесконечной системы линейных уравнений, который опирается на нахождение предела для последовательностей  $x_k, y_k$ . Для проверки данного метода были найдены первые 3 собственные частоты для разных соотношений сторон с точностью 3 знака после запятой. Полученные результаты согласуются с описанными в других источниках, где они были получены другими методами

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.C. Eringen, E.S. Suhubi *Elastodynamics*. Vol. 2. Linear Theory, – New York : Acad. Press. 1975.  
 [2] D.J. Gorman *Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition*. – Journal of Sound and Vibration 272 (2004) 831-851.

## Адаптация электронного пособия "Численные методы" к требованиям дистанционного обучения

*Подаревская Ксения Михайловна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
 КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (500 ГРУППА)

e-mail: ks.podarok@gmail.com

*Целью работы является создание тестирующей системы, которая является необходимым элементом в дистанционном обучении. Методические материалы для тестирующей системы берутся из курса "Численные методы" для студентов 3ого курса специальностей "информатика" и "прикладная математика". Тестирование намечается проводить как по каждой теме отдельно, так и по всему курсу в целом.*

*Перед преподавателями ТНУ в настоящее время поставлена задача: разработать такие методические материалы, которые могут быть реализованы для дистанционного обучения. Следовательно, тематика работы является актуальной и будет использована в учебном процессе в ближайшее время.*

Ранней формой дистанционного обучения можно считать заочное обучение по переписке, активно развивавшееся в начале прошлого века [1]. Современное дистанционное образование базируется на активном применении информационных и коммуникационных технологий, которые помогают выполнять основную задачу ДО – учить, не имея прямого контакта со студентом. Такой вид обучения открывает широкие возможности для образования и повышения квалификации инвалидов; женщин, воспитывающих маленьких детей; лиц, не имеющих возможности прервать свою основную работу; а также для жителей, проживающих в удаленных от образовательных центров районах. Студенты могут обучаться в любое время и в любом месте, где есть интернет.

Наибольшее количество современных потребителей дистанционного обучения сконцентрировано в США и Канаде, а среди европейских стран – в Великобритании, за которой следуют Германия, Италия и Франция. В США дистанционное обучение предлагают более 200 университетов и тысячи колледжей, а количество онлайн-курсов увеличивается примерно на 30-40% ежегодно. В Великобритании разнообразные дистанционные программы предлагают свыше 50 университетов [2].

На сегодняшний день дистанционное обучение в нашем регионе находится в стадии развития и является пока "незрелым". По сравнению с ситуацией в мире, данным специализированных сайтов, развитие рынка электронного обучения здесь отстает на 5-7 лет.

Численные методы - один из базовых курсов для специальности прикладная математика. Для более успешного усвоения материала и получения навыков в настоящий момент создается тестирующая система по этому предмету. Это электронное учебно-методическое пособие, которое на сегодняшний день представляет собой 12 лабораторных работ, которые содержат, кроме всего прочего, методические примеры, выполненные с использованием табличного процессора, а также запускающиеся прямо с гиперссылки Java-апплеты. В конце каждой лабораторной работы предлагается пройти тест для проверки текущих знаний по пройденной теме. Кроме того, из сформированной базы вопросов в дальнейшем можно проводить общее тестирование по курсу.

Рассмотрим пример на основе лабораторной работы №2 – интерполяционный многочлен в формах Лагранжа и Ньютона. Данная лабораторная работа выбрана из следующих соображений:

- Тема "интерполяция и аппроксимация" является обязательной для университетского курса.
- Интерполяционные многочлены используются не только в численных методах, но и в других разделах математики, в частности в функциональном анализе.

Лабораторная работа делится на несколько частей. Первая часть – это теоритический материал, вторая – пример выполнения методических заданий, а третья – тест для проверки знаний.

Рассмотрим одно из заданий: произвольно выбрать 5 точек с абсциссами от -1 до 1 и ординатами от 0 до 1 и построить интерполяционный многочлен Лагранжа, вычисляющийся по формуле:  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$  [3] (Рис. 1).

**Задание 1.1.** Построение интерполяционного многочлена Лагранжа.

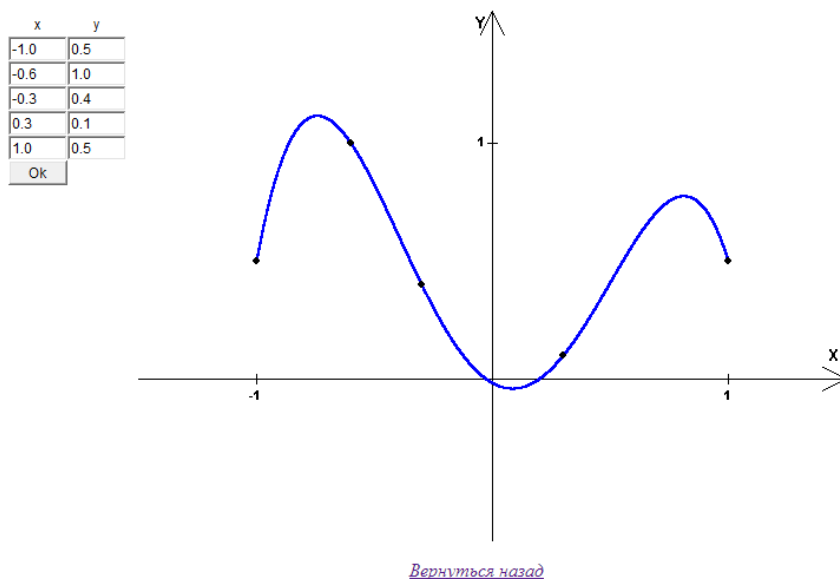


Рис. 1. Пример выполнения задания с помощью Java-апплета.

Ставилась задача сделать изображение как можно более информативное: для этого создано специальное окно, в которое могут быть введены данные, необходимые для построения интерполяционного многочлена. Таким образом, возникает возможность работы в интерактивном режиме.

### Тест

Выберите правильный ответ на каждый вопрос. Для получения результата нажмите кнопку "Результат".

Появится окно, где Вы увидите свои результаты: 0 - Вы ответили правильно, 1 - Вы ответили не правильно.

Оценка тестирования формируется по следующей шкале: 10-9 - отлично, 8-7 - хорошо, 6-5 - удовлетворительно, 4-0 - неудовлетворительно.

1. Постройте интерполяционный многочлен в форме Лагранжа по следующим точкам: (0,5;2,5), (1;2), (1,5;3)

$L_1(x) = 3x^2 - 5,5x + 4,5$

$L_2(x) = 6x^2 - 5x + 1,5$

$L_3(x) = 2x^2 - 5x + 1$

$L_4(x) = -5,5x + 2$

---

2. Постройте таблицу разделенных разностей по следующим точкам: (-1;0,5), (0,5;1), (1;1,5) и найдите  $f(x_0, x_1, x_2)$

$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{2}{3}$

$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{3}{5}$

$f(x_0, x_1, x_2) = -1$

$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{3}$

Рис. 2. Пример тестовых заданий.

Тестирование состоит из 10 вопросов в закрытой форме с множественным выбором. После прохождения теста, студент получает от 0 до 10 баллов. Оценка может быть выставлена по любой из существующих шкал оценивания с использованием шкалы перевода баллов в оценку. Например, 0-4 – неудовлетворительно, 5-6 – удовлетворительно, 7-8 – хорошо, 9-10 – отлично (Рис. 2).

В результате проделанной мною работы, можно сделать следующие выводы:

- В будущем именно дистанционная форма обучения будет использоваться студентами ВУЗов везде, где есть доступ к сетевым технологиям.



- В связи с этим возникает актуальная необходимость изменения структуры учебных пособий. Вместо обычных текстовых файлов целесообразно использовать электронные учебные пособия.
- Для создания таких пособий нужно изучать и использовать в дальнейшем современные специализированные программные средства: html, php, JavaScript и т. п.
- Создание ЭУП по численным методам, в связи с перечисленными выше тремя пунктами, является актуальным для учебного процесса на факультете математики и информатики.
- Даже в том, не совсем законченном, виде, в котором это ЭУП находится сейчас, оно успешно используется при изучении численных методов студентами специальностей "прикладная математика" и "информатика" как очной, так и заочной форм обучения.
- Работа над совершенствованием ЭУП должна быть продолжена. А в дальнейшем имеет смысл создать аналогичное по формату ЭУП для других предметов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] [http://bit.edu.nstu.ru/archive/issue-1-2009/ot\\_distantcionnogo\\_obucheniya\\_k\\_elektronno\\_212/](http://bit.edu.nstu.ru/archive/issue-1-2009/ot_distantcionnogo_obucheniya_k_elektronno_212/)  
 [2] <http://compress.ru/article.aspx?id=14659&iid=695>  
 [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. – М.: Изд-во "Высшая школа". - 1977.  
 [4] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. – М.: Изд-во "Высшая школа". - 1986.

## Исследование и построение T-линейных динамических систем

*Хамитов Сервер Нариманович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 401-П)

e-mail: red17electro@gmail.com

*В работе рассматривается исследование и построение T-линейных динамических систем.*

Одним из новых направлений математических и физических исследований является развитие методов и средств изучения систем с хаотическим поведением, получившее название теории хаоса. Теория хаоса – раздел прикладной математики, изучающий свойства хаотических динамических систем. Хотя

закон функционирования таких систем строго определён и не содержит случайных величин, возможны такие режимы их функционирования, что точно указать каким будет их состояние по прошествии некоторого времени невозможно.

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\theta_{n+1} = \lambda \sin(\theta_n + \alpha) \quad (1)$$

Представлена она в сферических координатах, а тип подобных динамических систем называется Т-линейным. Будем пробовать строить её в декартовых координатах с различными начальными условиями, предварительно осуществив преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \lambda \sin \theta \cos \alpha \\ y = \lambda \sin \theta \sin \alpha \\ z = \lambda \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Обозначения:

$N$  - количество итераций,  $h_\lambda$ -шаг по  $\lambda$ ,  $h_\alpha$ -шаг по  $\alpha$

Начальное  $\theta = 30^\circ$  на протяжении всей дальнейшей работы, т.к оно не оказывает влияния на результат.

Перейдём к построению: Несложно заметить возникшие слои хаоса. Пред-

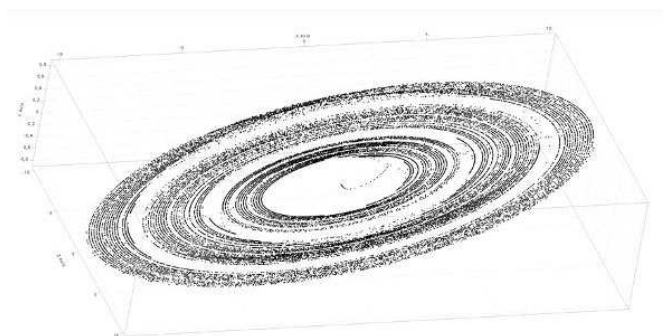


Рис. 1.  $\alpha = 5^\circ$ ;  $0.1 < \lambda < 10$ ;  $h_\lambda = 0.1$ ;  $N = 10000$ , на вывод отправляется последняя 1000.

ставим теперь построение выше на плоскости, чтобы отчётливее видеть распределение положения точек. Как видим, получается очень красочная картина происходящего. На графике выше видны бифуркации и хаотическое поведение системы.

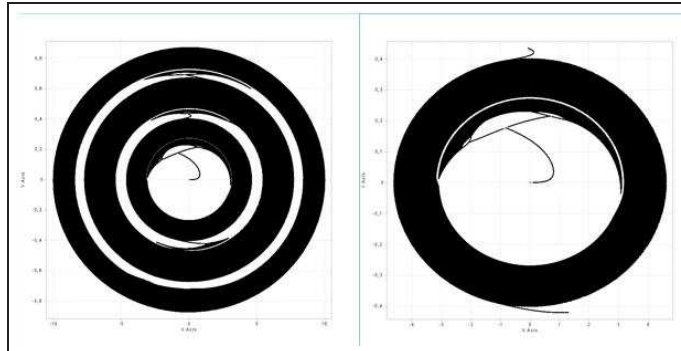


Рис. 2. (а, б). а)  $\alpha = 5^\circ$ ;  $0.1 < \lambda < 10$ ;  $h_\lambda = 0.001$ ;  $N = 10000$ , на вывод отправляется последняя 1000; б)  $\alpha = 5^\circ$ ;  $0.1 < \lambda < 5$ ;  $h_\lambda = 0.001$ ;  $N = 10000$ , на вывод отправляется последняя 1000;

Если же осуществить масштабирование области в районе бифуркаций, то будет заметно отделение слоёв точек незаполненными зонами: Вернёмся к

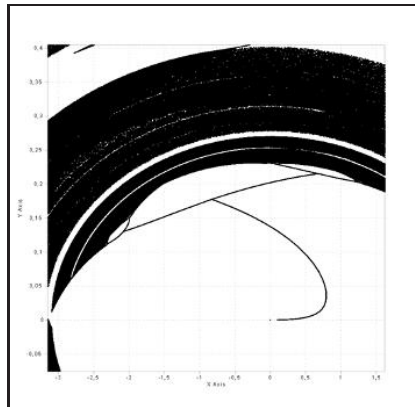


Рис. 3.  $\alpha = 5^\circ$ ;  $0.1 < \lambda < 10$ ;  $h_\lambda = 0.009$ ;  $N = 1000$ , на вывод отправляется последняя 100.

трёхмерному пространству. Осуществляя прогонку ещё и по углу  $\alpha$ , мы получаем удивительные объекты, которые дают обширную почву для исследования. К примеру:

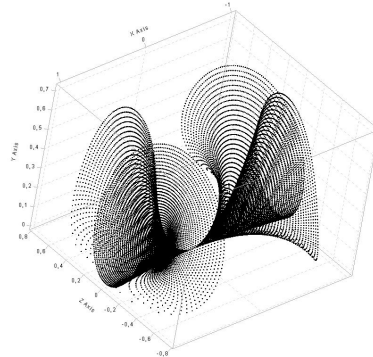


Рис. 4.  $0 < \alpha < 2\pi$ ;  $h_\alpha = 0.02$ ;  $-1.0 < \lambda < 1.0$ ;  $h_\lambda = 0.02$ ;  $N = 1000$ , на вывод отправляется последняя 100.

Продолжим наши эксперименты с параметрами: расширим диапазон значений по  $\lambda$  и немного сузим его по  $\alpha$ . В конечном итоге получим следующую фигуру:

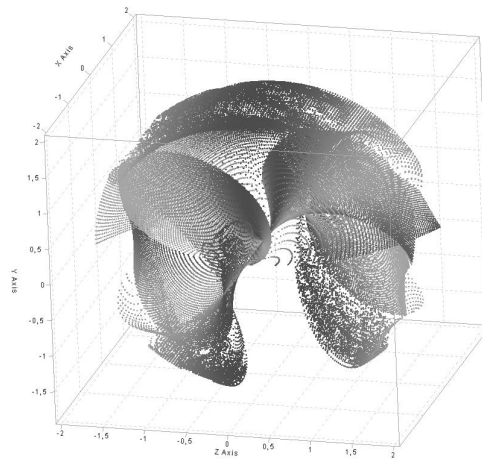


Рис. 5.  $0 < \alpha < \pi$ ;  $h_\alpha = \pi/180$ ;  $-2.0 < \lambda < 2.0$ ;  $h_\lambda = 0.02$ ;  $N = 1000$ , на вывод отправляется последняя 100.

Таким образом, “играясь” с параметрами мы всё глубже раскрываем поведение данной динамической системы, что в дальнейшем можно использовать для её анализа. Помимо этого, данные изображения очень здорово выглядят в цвете.

За помощь и крайне полезные консультации хочу выразить благодарность своему научному руководителю Темненко Валерию Анатольевичу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Schildt *CSharp: The Complete Reference*. – Williams Publishing House, – 2013.
- [2] М. Ву, Т. Девис *OpenGL. Руководство по программированию. Библиотека программиста*. – СПб.: Питер, – 2006.–624 с.:ил
- [3] Темненко В. А. *Динамические системы*. – Конспект лекций, – 2013.
- [4] Н. Kutschbach, P. Lehwark, – *ILNumerics documentation*. – Berlin

## Приближенные локальные элиминационные алгоритмы для решения разреженных задач дискретной оптимизации

*Шаповалова Ирина Александровна, Щербина Олег Александрович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: mzroom26@gmail.com

*Многие практические задачи дискретной оптимизации (ДО) являются NP-трудными и часто обладают большой размерностью. На данный момент не существует решателей, которые позволили бы находить решение таких задач за полиномиальное время. Перспективными декомпозиционными методами являются локальные элиминационные алгоритмы. Целью данной работы является повышение эффективности локальных элиминационных алгоритмов.*

С помощью моделей и алгоритмов ДО можно решать разнообразные прикладные задачи, которые обычно имеют специальную структуру. Матрицы ограничений в задачах большой размерности, как правило, сильно разрежены (содержат большое количество нулевых элементов), а ненулевые матричные элементы часто можно сгруппировать в блоки. Блочность многих прикладных задач ДО можно объяснить слабой связностью подсистем моделируемых реальных сложных систем [1]. Среди блочных структур выделяется блочно-древовидная структура, частным случаем которой является квазиблочная структура, представленная на рисунке 1.

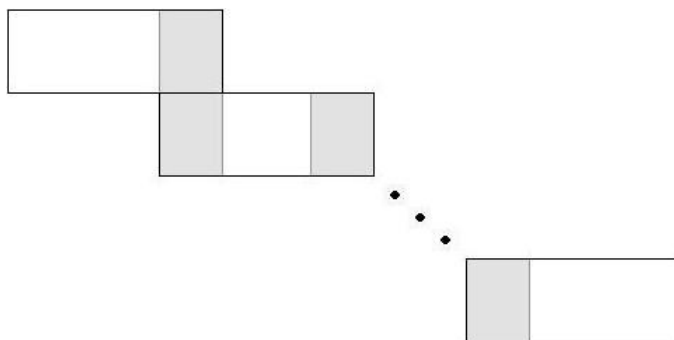


Рис. 1. Квазиблочная матрица.

В данной работе рассматривается задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) (1) с булевыми переменными и матрицей, имеющей квазиблочную структуру.

$$\begin{aligned}
 obj &= \sum_{j=1}^m c_j x_j \rightarrow \max; \\
 \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j &\leq b_i, i = \overline{1, n}; \\
 x_j &= 0, 1, j = \overline{1, m}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Для выделения специальных структур задач ЦЛП рекомендуется использовать методы древовидной декомпозиции [2]. Они позволяют решать множество NP-трудных задач за полиномиальное время с помощью методов динамического программирования на графах, описывающих структуру задачи ЦЛП, с ограниченной древовидной шириной. Перспективными декомпозиционными методами являются локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА) [3].

ЛЭА разбивает задачу на отдельные подзадачи и вычисляет информацию, характеризующую каждую из них. Задача задается в виде структурного графа, вершинами которого являются переменные, а ребра показывают зависимости между ними. Процедура ЛЭА разбивается на две части: прямую и обратную. В ходе прямой части одна за другой элиминируются переменные, вычисляется и запоминается информация в виде локальных решений, а также определяется значение критерия. В обратной части находится глобальное решение всей задачи по найденным в прямой части таблицам с локальными решениями, что обеспечивает достижение критерия в прямой части. Процедуру

локальной элиминации можно применить для элиминации не только отдельных переменных, но и подмножеств переменных в виде блочной элиминации переменных [3].

В связи со сложностью решения задач ЦЛП, в вычислительных алгоритмах используются релаксации – построение оценочных задач. Для снижения объема перебора по переменным можно использовать вместо значений целевой функции значения целевых функций релаксированных задач. Примерами релаксаций являются линейная релаксация, когда вместо задачи ЦЛП рассматривается соответствующая задача линейного программирования, и ранцевая релаксация, в которой вместо ограничений исходной задачи рассматривается суррогатное ограничение, являющееся линейной комбинацией исходных ограничений [4].

В данной работе реализован алгоритм с оракулом (Oracle). Используя LES (Local Elimination Solver – библиотека для решения задач бинарного целочисленного линейного программирования), первоначальный алгоритм был модифицирован следующим образом. После того, как декомпозиционный граф данной задачи ЦЛП построен, строится новый граф, в вершинах которого уже релаксированные подзадачи. В каждой такой подзадаче всего одно ограничение – вектор, каждый элемент которого – это сумма элементов первоначальной матрицы ограничений по строкам. Далее решается задача с модифицированным деревом, а полученные значения общих переменных записываются в качестве результата. После этого исходное дерево упрощается: значения общих переменных подставляются в ограничения, причем изменяются их правые части, а общие переменные исключаются из целевой функции. Теперь решается задача с упрощенным деревом, и значения оставшихся переменных записываются в качестве результата. Таким образом, вместо исходной задачи решаются две релаксированные, что позволяет существенно сократить время работы алгоритма.

Для оценки эффективности данного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент, реализованный на виртуальной машине с помощью программы Oracle VM VirtualBox версии 4.3.6. Все задачи были сгенерированы случайным образом и имеют квазиблочную структуру с одинаковым размером блоков и сепараторов в отдельно взятой задаче. Все результаты записаны в таблицу 1, где  $n$  – количество ограничений,  $m$  – количество переменных,  $time$  – время выполнения программы (в секундах),  $obj$  – значение целевой функции.

Вычислительный эксперимент показал эффективность использования релаксационных методов для решения задач ЦЛП. Несмотря на то, что в общем случае данный алгоритм позволяет находить только приближенные решения

№	n x m	Les		Les+Oracle	
		time	obj	time	obj
1	100x300	84,30691	32244	30,95851	32187
2	100x350	42,48359	40516	33,02636	40357
3	100x600	84,39211	130939	46,15508	130403
4	150x200	19,26795	13378	16,0311	13168
5	200x500	1106,859	88630	556,1173	88217
6	200x500	99,03026	83982	60,19346	83315
7	200x500	104,7135	89129	54,54588	88956
8	200x500	746,6018	88455	288,2616	88016

ТАБЛИЦА 1. Результаты вычислительного эксперимента.

задач, он существенно сокращает время вычислений. В дальнейшем планируется проведение исследования для нахождения наилучшего релаксационного метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Щербина О.А. Элиминационные алгоритмы декомпозиции задач дискретной оптимизации. – Таврический вестник информатики и математики, 1981. – №2. – С. 28 - 41.
- [2] Щербина О.А. Древоподобная декомпозиция и задачи дискретной оптимизации (обзор). – Кибернетика и системный анализ, 2007. – N4 – С. 102 - 118.
- [3] Щербина О.А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач. – Ж. вычисл. матем. и матем. Физ., 2008. – 48:1. – С. 159 - 175.
- [4] Свириденко А.В., Щербина О.А. Релаксации в вычислительной схеме локального элиминационного алгоритма. – Дискретная оптимизация и исследование операций: материалы междунар. конф., 24 – 28 июня 2013 г. – Новосибирск: Ин-т математики, 2013. – С. 151.



## Секция ИНФОРМАТИКИ

### Поиск закономерностей в разнотипных данных

*Бадудина Елена Сергеевна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: badudina@gmail.com

Поиск алгоритмов для задач нахождения закономерностей в последовательностях — классическое и весьма бурно развивающееся направление в современной компьютерной науке. Нахождение закономерностей в данных представляет значительный интерес в самых разных областях знаний. В частности, такие алгоритмы активно используются при анализе генетических последовательностей, конструировании ДНК наномеханических роботов, в задачах медицинской диагностики. Все чаще решение задач состоит не только в поиске нужного для решения алгоритма, но и усложняется возможными исходными данными задачи. Такими, например, могут быть: большие данные (big data), неполная информация или разнотипные признаки в начальной информации проблемы.

#### 1. РАЗНОТИПНЫЕ ПРИЗНАКИ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ НИМИ

С метрической точки зрения различают следующие типы признаков:

- (1) *количественные* (числовые) признаки - это признаки, измеренные в определенной шкале и в шкалах интервалов и отношений.
- (2) *качественные* (ранговые, порядковые, балльные) - используются для выражения терминов и понятий, не имеющих цифровых значений (например, тяжесть состояния) и измеряются в шкале порядка.
- (3) *номинальные* (например, профессия, группа крови, пол) - это признаки, измеренные в шкале наименований. При анализе таких признаков каждую отметку номинальной шкалы считают отдельным самостоятельным признаком. Как правило он является бинарным и разность в значениях таких признаков можно интерпретировать, как степень важности несовпадения данного признака при сравнении двух объектов.

Существует большое количество мер расстояний между парами однотипных признаков. Например, для шкалы порядка своей простотой и естественностью отличается мера Кенделла—Кемени. Мера расстояния между признаками, измеренными в номинальной шкале, равна величине Хэмминга между матрицами смежности, построенными по каждому из признаков. Количественные признаки являются наиболее сильными. “Усилением” признака в общем случае называют их приведение именно к этой шкале.

Для измерения расстояния между разнотипными признаками используется их приведение к одной шкале. Для этого существует два способа: “ослабление” более “сильных” признаков или “усиление” более “слабых” признаков. Общую меру расстояния между разнотипными признаками следует определять как среднюю величину частных расстояний в этих двух случаях. Указанные преобразования входят в группы допустимых преобразований

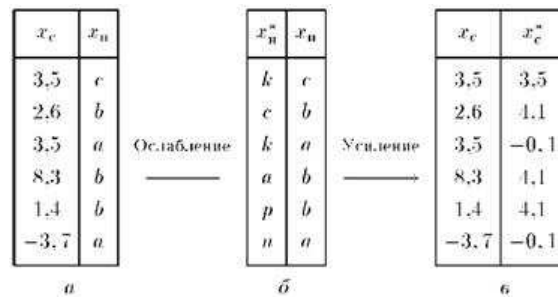


Рис. 1. Пример усиления и ослабления для шкал.

для своих типов шкал, следовательно, величины полученных в этих случаях расстояний также инвариантны к допустимым преобразованиям оцениваемых признаков. “Усиление” и “ослабление” шкал вносят в некотором смысле симметричное искажение (добавление и потерю информации), так что усреднение получаемых частных мер после этих процедур можно считать оправданным.

При решении прикладных задач в случае разнотипных признаков довольно часто сводят все эти признаки к булевым.

## 2. ВЫДЕЛЕНИЕ МОД В ВЫБОРКЕ

Для выделения в полимодальной выборке классов объектов проверяется условие существования более чем одной моды плотности распределения парных расстояний, согласно теореме приведенной в работе [1], и оценивается

неслучайность обнаружения более чем одной моды эмпирической плотности. Предварительно для вычислений проводится построение эмпирической функции распределения  $\hat{F}$  исходной выборки.

$$2\hat{F}(x_1) - \hat{F}(a) - \hat{F}(x_2) > 4\delta$$

$$\hat{F}(b) - 2\hat{F}(x_3) + \hat{F}(x_2) > 4\delta$$

Данные неравенства являются условиями наличия более одной моды плотности  $f(x)$  на некотором отрезке  $[a, b]$ .

Для достоверности оценки вероятности случайного обнаружения более чем одной моды в выборке исходных данных при проверки гипотезы классификации используется критерий Колмогорова. Согласно которому независимые одинаково распределенные случайные величины имеют заданную непрерывную функцию распределения.

### 3. СОВРЕМЕННЫЕ РАЗРАБОТКИ

Одной из определяющих характеристик Big Data является многообразие (англ. variety, в смысле возможности одновременной обработки различных типов структурированных и полуструктурированных данных). В связи с чем актуальность вопроса поиска закономерностей в данных обрела новый смысл. Некоторыми из примеров актуальности задач этого типа в настоящее время являются работы студентов и профессоров Стэнфордского университета [2], а также “ Библиотека логических алгоритмов классификации ” [4].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Донской В.И. *Статистическое обоснование возможности выделения классов объектов в эмпирических выборках* /Донской В.И., Ильченко А.В.// Ученые записки Таверического национального университета им. В.И. Вернадского. – Том 15 (54).- № 2.- 2002.-С.128-132.
- [2] MINE// [Электронный ресурс]/ D. Reshef, Y. Reshef, M. Mitzenmacher, P. Sabeti. Режим доступа: <http://www.exploredata.net>
- [3] D. Reshef *Detecting novel associations in large datasets.*// D. Reshef, Y. Reshef, H. Finucane, S. Grossman, G. McVean, P. Turnbaugh, E. Lander, M. Mitzenmacher, P. Sabeti. *Science* 334, 6062 – 2011—. Режим доступа: <http://www.sciencemag.org/content/334/6062/1518.full>
- [4] Библиотека логических алгоритмов классификации./Forecsys//Технологии прогнозирования и анализа данных. Режим доступа: <http://www.forecsys.ru/ru/site/tech/LogicPro/>
- [5] Ларин С.Б. *О поиске логических закономерностей по прецедентам для решения задач распознавания и анализа данных.*/ С.Б.Ларин, В.В.Рязанов// Вычислительный центр Российской Академии наук. Москва, 2011.

## Разработка игрового приложения "Судоку" для ОС Android

*Ганиева Эвелина Акимовна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 501)

e-mail: ganieva.evelina25@mail.ru

Логические игры всегда пользовались определенной популярностью у различных поколений игроков. В связи с этим разработка игр, в т.ч. и логических, - активно развивающаяся отрасль, а частности для мобильных устройств. А так как на данный момент подавляющее число мобильных устройств работает под управлением этой ОС, разработка приложений под Android открывает широкие перспективы для продвижения услуг среди огромной аудитории пользователей.

Рассмотрим разработку логической игры «Судоку» под ОС *Android*. «Судоку» - это популярная головоломка с числами. Игровое поле представляет собой квадратную сетку размером  $9 \times 9$ , разделённую на меньшие квадраты со стороной в 3 клетки. Таким образом, всё игровое поле состоит из 81 клетки. В них уже в начале игры стоят некоторые числа (от 1 до 9), называемые *подсказками*. От игрока требуется заполнить свободные клетки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом малом квадрате  $3 \times 3$  каждая цифра встречалась только один раз [1].

Существует несколько алгоритмов построения «Судоку», но не все они пригодны для программирования. По расчетам *Б. Фельгенхауэра* с использованием компьютерного алгоритма и учетом определенной эквивалентности некоторых задач, количество возможных комбинаций в «Судоку»  $9 \times 9$  составляет  $6670903752021072936960 \approx 6,7 \cdot 10^{21}$ . За вычетом разных групп симметрии остается  $2297902829591040 \approx 2,3 \cdot 10^{15}$  значимо различных сеток [2].

Для быстрой генерации «Судоку» был разработан алгоритм, который показывает наибольшую эффективность при построении начального состояния даже на слабых процессорах и малых версиях *Android*. В особенностях разработки можно отметить, что при создании «Судоку» генерируется строка символов, представляющая собой последовательность точек и цифр, где точки обозначают пустые состояния на сетке. Это было сделано для того, чтобы ускорить процесс создания начального состояния.

Создание строки производится функцией, которая по исходным сгенерированным данным создает матрицу обращения к символам, которые, в свою очередь, и создают строку состояния:

```

string tmp = "";
for(i = 1; i <= 81; i++)
{
    tmp = tmp.concat(String.valueOf(L[A[i]]));
}

```

Пусть  $q$  – это некоторая целая величина, характеризующая количество заполненных клеток сетки. Соответственно, для того, чтобы игра была решаемая,  $q$  должно быть равно 17 или более [3]. Конечно, для  $q = 17$ , задача является самой сложной и для решения такой головоломки может потребоваться большое количество времени.

Назовем «*сложными*» те начальные состояния, в которых  $22 < q \leq 30$ , «*легкими*» - в которых  $30 < q \leq 38$ . Тогда, для построения конкретного начального состояния заданной сложности необходимо найти такую сетку, решение которой является единственным, добавляя новые элементы в сетку так, чтобы их количество  $q$  удовлетворяло условиям сложности.

В ходе построения может получиться такой вариант, что необходимо будет сгенерировать сложное начальное состояние. Допустим, в процессе генерации  $q$  превысило пороговое значения для данного уровня сложности (т.е. по ходу построения не было сетки с единственным решением). Тогда полученное легкое состояние можно привести к сложному путем просеивания имеющихся значений. Например, при построении «*Судоку*», значение в какой-либо клетке было необходимо, но, после нахождения сетки с уникальным решением, данное значение уже может не влиять на единственность решения игры. Тогда необходимо просеять имеющиеся значения путем их отбрасывания:

```

if(stage == 1)
{
    for (i1=1; I <= 81; i++)
    {
        s1=A[P[i1]];
        A[P[i1]] = 0;
        if (solve() > 1) A[P[i1]] = s1;
    }
}

```

Если после отбрасывания конкретного значения решение все равно осталось уникальным, тогда это значение может быть убрано, в противном случае

его необходимо вернуть. Функция  $solve()$  возвращает 0 - если сетка не имеет решение, 1 - если решение единственно, 2 - если решений 2 и более.

«Судоку» относится к комбинаторному типу задач и предполагает формирование различных перестановок. Простой алгоритм генерации перестановок без рекурсий [4] состоит из нескольких этапов:

1. От конца к началу перестановки ищем первый элемент  $x_i$  такой, что  $x_i < x_{i+1}$ , и запоминаем его индекс  $i$ .

2. От элемента  $i + 1$  до конца ищем последний элемент, который больше  $x_i$ , и запоминаем его индекс  $k$ .

3. Меняем местами элементы с номерами  $i$  и  $k$ :  $x_i \leftrightarrow x_k$ .

4. Группу элементов от  $(i + 1)$ -го элемента до  $n$ -го попарно меняем местами по мере прохождения от границы к середине:  $x_{i+1} \leftrightarrow x_n$ ,  $x_{i+2} \leftrightarrow x_{n-1}$  и т.д.

С математической точки зрения «Судоку» имеет некоторую особенность. В каждой  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце матрицы сумма элементов - есть треугольное число:

$$\sum_{i \forall j} s_{ij} = \sum_{j \forall i} s_{ij} = 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{n(n+1)}{2} = 45$$

Задача обобщённого Судоку на поле  $n^2 \times n^2$  является  $NP$ -полной, так как к ней сводится задача о заполнении латинского квадрата [5].



Рис. 1. Скриншот игрового приложения "Судоку"

В качестве программного комплекса было разработано игровое приложение «Судоку» в *IDE Eclipse* на языке *Java* для ОС *Android*. Приложение представляет собой одну активность *Android*, на экране которой расположено поле «Судоку» и три кнопки: два уровня сложности и подсказка. Изначально поле для игры пустое. При нажатии на один из уровней генерируется головоломка данного уровня сложности. Скриншот приложения представлен на рис. 1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Судоку [Электронный ресурс]. / Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/>
- [2] Felgenhauer В. *Mathematics of Sudoku I* / Felgenhauer В., Jarvis F. // *Mathematical Spectrum*. – 2006. – №39. – Р. 15–22.
- [3] Установлено минимально возможное число подсказок в Судоку [Электронный ресурс]. / Режим доступа: <http://compulenta.computerra.ru/veshestvo/mathematics/654351/>
- [4] Рейнгольд Э. *Комбинаторные алгоритмы* / Рейнгольд Э., Нивельгерт Ю., Део Н. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
- [5] Василенко С. Л. *Числовая гармония Судоку* [Электронный ресурс]. / Режим доступа: <http://www.sciteclibrary.ru/texts/rus/stat/st4689.pdf>

## Распознавание изображений в задачах дополненной реальности

*Гончаров Антон Александрович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: [mytoxa@gmail.com](mailto:mytoxa@gmail.com)

Дополненная реальность — совокупность действий, направленных на увеличение воспринимаемой реальности путем введения в поле восприятия любых сенсорных данных. Смежным понятием для дополненной реальности является дополненная виртуальность, вместе с которой она образует смешанную реальность. Под реальностью понимается наш реальный мир. Под виртуальностью мир, созданный с использованием технических средств. Когда происходит совмещение реального и виртуального мира получается смешанная реальность. Если виртуальный мир дополняется реальными объектами, то получается дополненная виртуальность. Если реальный мир дополняется виртуальными объектами, то получается дополненная реальность.

Существует несколько определений дополненной реальности: исследователь Рональд Азума определил ее как систему, которая:

- (1) Совмещает виртуальное и реальное.
- (2) Взаимодействует в реальном времени.
- (3) Работает в 3D.

Самый распространённый пример дополненной реальности можно встретить в телетрансляциях спортивных игр — параллельная лицевой цветная линия, показывающая нахождение ближайшего полевого игрока к воротам при трансляции футбольных матчей.

Существует два принципиальных подхода для создания дополненной реальности: с использованием заранее подготовленного маркера и без него. Оба подхода используют одинаковую последовательность действий [1]:

- (1) Алгоритмы “компьютерного зрения” распознают объекты в кадре.
- (2) Анализируются данные об объектах, полученные после распознавания.
- (3) Соответствующие объекты дополняются добавлением трехмерных объектов.

Алгоритмы, не использующие маркеры, как правило основаны на обнаружении и распознавании объектов по особым точкам. Наиболее популярные алгоритмы: SIFT, SURF, RIFF и т. д. При использовании маркера в начале определяют что будет маркером. Маркер — специальная метка, которая присутствует в кадре и позволяет быстро выделить его из окружающей среды, распознать и, опираясь на его местоположение, добавить дополнительный объект. В теории маркером может быть любая фигура (объект). Но на практике существуют ограничения разрешения камеры, особенности цветопередачи, освещения и вычислительная мощность оборудования (все расчеты происходят в реальном времени и пересчитываются для каждого кадра), а потому выбирается обычно черно-белый маркер простой геометрической формы [2]. Как правило это прямоугольник или квадрат со вписанным во внутрь идентификатором-образом.

При распознавании маркера используются монохромные изображения, что дает возможность рассматривать изображение как функцию на плоскости. Если рассмотреть точечное множество на плоскости  $T$ , где функция  $f(x, y)$  выражает в каждой точке изображения ее яркость, то такая функция есть формальная запись изображения. Множество же всех возможных функций  $f(x, y)$  на плоскости  $T$  — есть модель множества всех изображений  $X$ . Вводя понятие сходства между образами можно поставить задачу распознавания. В случае использования прямоугольного маркера ставится задача выделения углов маркера из всего множества точек изображения. Используется подход,



при котором находится контур объекта, а затем исследуются его свойства (связанность, наличие углов и т. д.). Алгоритм распознавания маркера состоит из нескольких этапов [3]:

- (1) Преобразование изображения в монохромное.
- (2) Бинаризация изображения с использованием пороговой величины.
- (3) Определение замкнутых областей.
- (4) Выделение контуров.
- (5) Выделение углов маркера.
- (6) Преобразование координат.

Каждый этап в свою очередь реализуется один из возможным алгоритмов. Таким образом, процесс распознавания маркера — это последовательность применения различных алгоритмов. Первый этап на вход принимает значение  $RGB$  для каждой точки изображения, а на выходе получается искомая функция  $f(x, y)$  яркости точек. Все алгоритмы данного этапа основаны на получении единого значения яркости на основе различных манипуляций с  $RGB$ -компонентами заданной точки. Суть второго этапа заключается в получении из  $f(x, y)$  функцию  $g(x, y)$  с булевым множеством значений. Эти значения определяют относим ли мы данный пиксель к чёрному цвету или к белому. На этом этапе используются методы, позволяющие задать оптимальный порог, чтобы на его основе разделить все точки на два класса. Наиболее часто использующийся метод — это метод Оцу, основанный на минимизации внутриклассовой дисперсии. Третий этап на основе функции  $g(x, y)$  получает множество замкнутых областей. Как правило для этого используют различные алгоритмы “заливки”. Четвертый этап на выходе дает множество контуров объектов на изображении. Чаще всего это алгоритм Канни и Собеля, который основан на поиске локального максимума градиента в направлении вектора градиента. На пятом шаге необходимо упростить замкнутые контуры, преобразовав их в многоугольники, а затем получить координаты их вершин. С данной задачей справляется алгоритм Дугласа-Пекера. Последний этап, учитывая масштаб и угол обзора, возвращает необходимые трансформации, которые нужно применить к 3D объекту. Далее 3D объект трансформируют и располагают поверх изображения. Для следующего кадра все этапы повторяются заново.

Итак, дополнительная реальность имеет широкое применение в наши дни и вопрос её создания будет актуален ещё многие годы. Разработано множество алгоритмов, применяющихся в создании дополненной реальности, однако вопрос о наиболее оптимальном из них остаётся открытым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sanni Siltanen *Theory and applications of marker-based augmented reality*
- [2] Harviainen T., Korkalo O., Woodward C *Camera-based interactions for augmented reality*
- [3] Xiang Zhang, Stephan Frönz, Nassir Navab. *Visual Marker Detection and Decoding in AR Systems: A Comparative Study*.

## Приближенные алгоритмы решения задач, сводящихся к задаче k коммивояжеров

*Згурская Ольга Олеговна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 501–И)

e-mail: ZqurskayaOlha@gmail.com

В связи с ростом количества транспортных средств увеличивается количество автозаправочных станций (АЗС). Поэтому у нефтяных компаний возникает потребность в эффективной доставке бензина ко всем АЗС. Для решения этой проблемы необходимо развивать работу служб доставки бензина, чтобы доставка производилась своевременно, и маршрут движения бензовозов был наиболее оптимальным.

Постановка задачи: имеется дорожная сеть города, множество АЗС, которые должны быть обслужены бензовозом, база (объект который должен входить во все маршруты, является начальной и конечной точкой маршрута каждого бензовоза) и имеется ограниченное количество машин для обслуживания АЗС. Каждый объект обслуживания (исключая базу) должен входить ровно в один из маршрутов. Требуется построить оптимальную маршрутную сеть для обслуживания всех АЗС в срок при минимизации затрат на перевозки.

При решении проблемы, для возможности применения математического аппарата, ее следует представить в виде математической модели. Данную задачу удобно представить в виде модели на графе.

Множество всех возможных трасс поездки по улицам города представляется в виде ориентированного графа  $G = (V, E)$ , где  $V$  – множество вершин,  $E$  – множество дуг. Вершины графа – это места дорожной сети, где имеются возможности выбора дальнейшего маршрута поездки по городу, перекрестки на улицах города. И вершинами является множество из  $n + 1$  объектов (АЗС и

база). Ребрам графа соответствуют магистрали и улицы между двумя вершинами. Каждому ребру  $(i, j)$  можно сопоставить критерий выгодности маршрута  $C_{(ij)} \geq 0$ , который можно понимать как, например, расстояние между точками, время или стоимость поездки. Требуется отыскать  $k$  замкнутых маршрутов (для каждого из  $k$  бензовозов) с минимальной суммарной длиной (временем или стоимостью поездки) и с одинаковым (с точностью до 1) числом АЗС в маршрутах. При этом один объект (база) должен входить во все маршруты, а каждый из остальных объектов должен войти только в один из маршрутов.

Очевидно, что данная задача тесно связана с задачей коммивояжера. Во всех рассматриваемых методах на некотором этапе придётся решать задачу коммивояжера, и в связи с этим их можно разделить на две группы:

1. Сначала решается задача коммивояжера для всех объектов обслуживания, а потом подбирается наилучшее разделение результата для  $k$  коммивояжеров (инкассаторов).

2. Сначала множество объектов обслуживания разбивается на  $k$  групп, а затем задача коммивояжера решается для каждой из них.

Как известно, на практике не существует метода, который позволял бы находить точное решение задачи коммивояжера за гарантированное время для более чем 30 – 50 объектов. Поэтому в случае, где нужно будет решить задачу коммивояжера, будем использовать приближённые алгоритмы.

Эвристические приближённые алгоритмы решения рассматриваемой задачи [1]:

- 1) Алгоритм разрезания общего маршрута;
- 2) Метод предварительного разделения объектов на группы для каждого бензовоза;
- 3) Алгоритм разделения объектов по углам.

Для взаимного сравнения предложенных алгоритмов по качеству получаемого решения они были рассмотрены на примере:

- 1) на карте города Симферополя было отмечено 12 АЗС;
- 2) база, для лучшей наглядности работы алгоритмов, помещалась в центр города (пл. им. Куйбышева), на карте обозначена буквой В;
- 3) количество бензовозов равно 3;
- 4) возможные трассы проезда по улицам города на карте выделены белым цветом.

На рис. 1-3 изображены примеры построения маршрутов для числа АЗС  $n = 12$  и числа бензовозов  $k = 3$  алгоритмами представленными выше:

Рис. 1. Алгоритм разрезания общего маршрута.

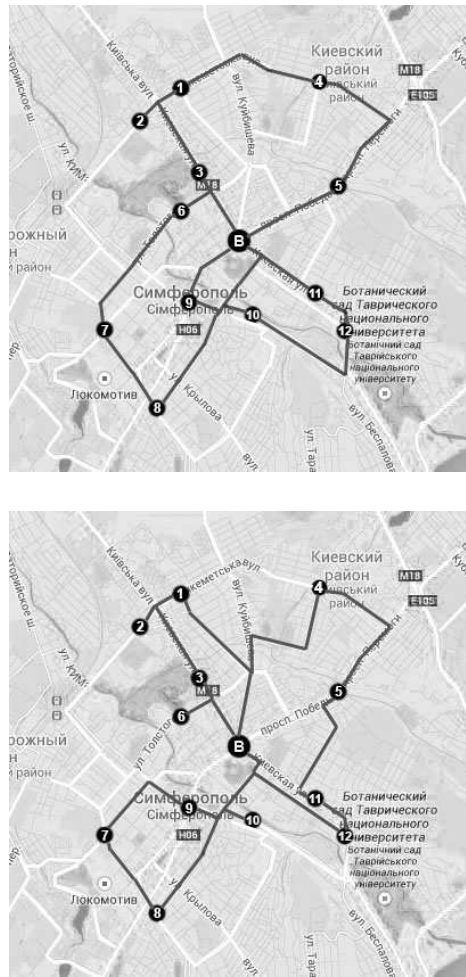


Рис. 2. Метод предварительного разделения объектов на группы для каждого бензовоза.

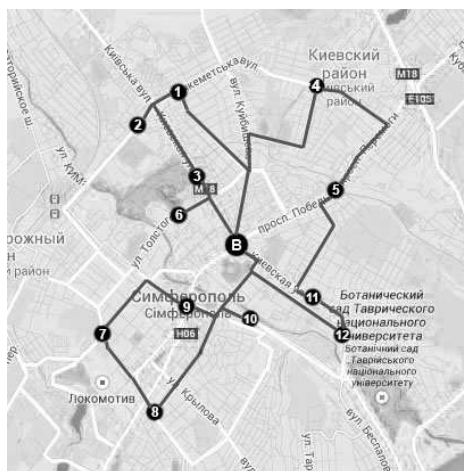


Рис. 3. Алгоритм разделения объектов по углам.

Результаты вычислений позволяют сделать следующие выводы:

1. По качеству решения алгоритмы расположились в следующем порядке (от лучшего к худшему): разрезание общего маршрута (20,1 км.), метод предварительного разделения объектов на группы (23,5 км.), разделение по углам (24,1 км.).

2. По вычислительной сложности алгоритмы расположились в следующем порядке (от лучшего к худшему): алгоритм разделения объектов по углам с трудоемкостью  $O(n \cdot \log n)$ , метод предварительного разделения объектов на группы с трудоемкостью  $O(n^2)$ , алгоритм разрезания общего маршрута трудоемкость которого зависит от выбора метода решения задачи коммивояжера на первом шаге алгоритма, для примера рассмотренного выше трудоемкость равна  $O(n^4)$ , так как был выбран алгоритм Кристофидеса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пожидаев М. С. *Алгоритмы решения задачи маршрутизации транспорта* : 05.13.18 / дис. кандидата технических наук: Пожидаев Михаил Сергеевич – Томск, – 2010. – 136 с.

## Прогнозирование временных рядов методом скользящих средних

*Косов Александр Сергеевич*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)  
НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: КОЗЛОВ А.И.

e-mail: kas77@i.ua

*Решение задачи прогнозирования временных рядов имеет большое значение в процессах, как стратегического планирования, так и оперативного управления в различных сферах науки и техники. Метод скользящих средних позволяет эффективно прогнозировать временные ряды. Суть методов скользящих средних (МА) состоит в том, что фактические уровни исследуемого временного ряда заменяются их средними значениями, погашающими случайные колебания. Это позволяет более четко выделить основную тенденцию изменения исследуемого параметра. Существует много видов скользящих средних, но в основном используются три из них: простой или линейный (Simple MA), взвешенный (Weighted MA) и экспоненциальный (Exponential MA).*

### 1. ПРОСТЫЕ СКОльзяЩИЕ СРЕДНИЕ

Опираясь на работу [2] простые скользящие средние (линейные скользящие средние, simple moving average, SMA) — это среднее арифметическое цен за определенный период времени. Рассмотрим график цен, разбитый на  $n$  равных промежутков по временной шкале. В каждом  $i$ -м промежутке рассмотрим цену  $P_i$  в последний момент времени. Если сложить все значения  $P_i$  цены за несколько промежутков времени и разделить сумму на количество промежутков, то получим определенное число — среднее значение цен за эти  $n$  промежутков. Это и будет значение SMA, предсказывающее значение цены на следующий промежуток времени. Расчетная формула SMA для  $n$  дней имеет следующий вид[1]:

$$SMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i$$

где  $n$  — период усреднения,  $P_i$  — усредняемая цена  $i - 1$  день тому назад ( $i$ -е измерение или отсчет),  $P_1$  — цена в текущий момент,  $P_n$  — самая старая по оси времени цена в рассматриваемый период. Если диапазон временных промежутков сместить на единицу вправо и рассчитать новое значение SMA, то оно будет уже другим, так как слагаемые в формуле изменились — самое левое исчезло, а справа появилось новое. При повторении этой операции

(движении вправо по оси времени) получим график скользящего среднего. Линейное скользящее среднее является самым простым методом среди всех скользящих средних, но у него есть недостаток: SMA дважды реагирует на одно изменение цен. С одной стороны, что SMA сразу меняется, как только новое значение попадает в период усреднения. Тем самым SMA отражает динамику последних цен, но меняется из-за того, что самое старое значение выбрасывается. С другой стороны, возникает проблема отображения действительного состояния данных временного ряда, из-за того, что при расчете все значения в периоде усреднения равнозначны, не зависимо от расположения на временной шкале.

## 2. Взвешенные скользящие средние (WEIGHTED MA)

В линейной MA есть существенный недостаток в том, что при расчете она придает одинаковую важность цене, независимо от того, как близко или далеко она находится от настоящего момента. Этот недостаток был устранен в методе взвешенных скользящих средних. Расчетная формула для взвешенных скользящих средних имеет следующий вид[1]:

$$WMA = \frac{\sum_{i=1}^n P_i * W_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$$

Где,  $P_i$  — значение цена за  $i$ -периодов назад;  $W_i$  — вес для цены  $i$ -периодов назад. Суть данного метода состоит в том, что при построении взвешенных скользящих средних, цене присваивается определенный вес, таким образом, что цены ближние периоды имеют больший удельный вес.

## 3. Экспоненциальные скользящие средние (ЕМА)

По сравнению с простой скользящей средней ЕМА реагирует на каждое изменение цены валютной пары только один раз — при его получении. Экспоненциальные скользящие средние придают больше веса новым данным и меньше — старым, т.е. она быстрее реагирует на текущие изменения цены и в то же время не так сильно зависит от прошедших данных. Таким образом, достигается более качественное сглаживание. Экспоненциальные скользящие средние (ЕМА) рекомендуются для использования, как наиболее надежные из основных типов скользящих средних. Экспоненциальные скользящие средние уменьшают запаздывание за счет

того, что придает последним ценам больший вес, чем более ранним. Следует отметить, что вес, придаваемый последней цене напрямую зависит от длины периода экспоненциальных скользящих средних.

Расчетная формула для экспоненциальных скользящих средних имеет следующий вид[1]:

$$EMA(t) = EMA(t - 1) + 2 * (P(t) \sim EMA(t - 1))$$

Где,  $t$  — период расчета,  $t - 1$  — период, предшествующий периоду расчета,  $P(t)$  — цена закрытия за период расчета,  $EMA(t - 1)$  — экспоненциальные средние за период, предшествующий периоду расчета.

Из работы [4] следует, что экспоненциальные скользящие средние определяется путем добавления к предыдущему значению скользящего среднего определенной доли текущей цены закрытия. Вес придаваемый последним ценам на коротких периодах выше, чем на более длинных. Причем, вес последних цен падает, практически, вдвое каждый раз, когда период экспоненциальной скользящей средней удваивается.

Таким образом, чем короче период ЕМА, тем больший вес будет придаваться последней цене, что, в свою очередь, позволит кривой данных экспоненциальных скользящих средних отражать на ценовом графике близкие к реальным изменения в цене. Указанное свойство дает экспоненциальной скользящей средней преимущество при реагировании на колебания цен по сравнению с простыми скользящими средними, однако это может также рассматриваться и как недостаток, потому что ЕМА по этой же причине (быстрое реагирование на колебания цен), более склонна к восприятию ложных сигналов.

#### 4. Способы улучшения прогнозирования временных рядов

Метод скользящих средних является одним из самых используемых для прогнозирования временных рядов. Он имеет множество видов обладающих своими достоинствами и недостатками. Некоторые из них хорошо себя показывают для прогнозирования на длительный период времени, иные хорошо отображают события, которые должны произойти немедленно. Для выбора наиболее подходящего вида, лучшим решением было совместное использование нескольких скользящих средних и постоянное сравнение результатов. Но так же в скользящих средних возникает проблема с определением длины



периода данных. Достаточно эффективным способом можно считать предварительное произведение оптимизации периода данных, методом перебора используя проверенные данные. Проверенными данными будут выступать множество прошедших данных, значение которых нам уже известны.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для прогнозирования временных рядов первоочередными требованиями становятся точность полученных данных и своевременность. Метод скользящих средних, оптимально отвечает этим требованиям. Главным его преимуществом является простота реализации и тем самым легкость обработки данных для прогнозирования. Так же это дает возможность одновременного использования нескольких разновидностей скользящих средних. Получить точность прогнозирования можно путем оптимизации периода данных МА на проверенных данных. Есть множество методов прогнозирования временных рядов, но ни один из них не дает стопроцентного достоверного результата. Каждый метод обладает своими недостатками и достоинствами, которые в определенных ситуациях являются решающими.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Элдер А.В. *Как играть и выигрывать на бирже*. — М.: Крон-пресс, 1996. — 343 с.
- [2] Стивен Б. А. *Технический анализ от А до Я*. — М.: Диаграмма, 1999. — 376 с.
- [3] Charles Martin *Методы технического анализа*. — <http://www.emastertrade.ru/ru/main/index/id43>

## Скрытые марковские модели в распознавании речи

*Кузин Анатолий Борисович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: shadwak@gmail.com

Каждый процесс, протекающий в реальном мире, порождает сигналы, обрабатывая которые, можно получить информацию об источнике и описать сам процесс. Однако, эта информация редко бывает точной, так как проявление процесса подвержено шумам и искажениям. Для решения этой проблемы создаются математические модели сигнала, в частности — стохастические модели. Одним из типов таких моделей являются скрытые марковские модели. В основе их построения лежит допущение о том, что сигнал может быть описан

случайным процессом, параметры которого могут быть определены конкретным способом.

Скрытой Марковской моделью (СММ) называется модель состоящая из  $N$  состояний, в каждом из которых некоторая система может принимать одно из  $M$  значений какого-либо параметра. Вероятности переходов между состояниями задается матрицей вероятностей  $A = \{a_{ij}\}$ , где  $a_{ij}$  – вероятность перехода из  $i$ -го в  $j$ -е состояние. Вероятности выпадения каждого из  $M$  значений параметра в каждом из  $N$  состояний задается вектором  $B = \{b_j(k)\}$ , где  $b_j(k)$  – вероятность выпадения  $k$ -го значения параметра в  $j$ -м состоянии. Вероятность наступления начального состояния задается вектором  $\Pi = \{\pi_i\}$ , где  $\pi_i$  – вероятность того, что в начальный момент система окажется в  $i$ -м состоянии. Таким образом, скрытой марковской моделью называется тройка  $\lambda = \{A, B, \Pi\}$  [1].

Модель называется «скрытой», так как нас, как правило, не интересует конкретная последовательность состояний, в которой пребывает система. Мы либо подаем на вход системы последовательности типа  $O = \{o_1, o_2, \dots, o_T\}$ , где каждое  $o_i$  – значение параметра (одно из  $M$ ), принимаемое в  $i$ -й момент времени, а на выходе ожидаем модель  $\lambda = \{A, B, \Pi\}$  с максимальной вероятностью генерирующую такую последовательность, – либо наоборот подаем на вход параметры модели и генерируем порождаемую ей последовательность, в том и другом случае система выступает как “черный ящик”.

Для практического применения теории должны быть решены три следующие проблемы [3]:

- 1) Какова вероятность появления последовательности наблюдений  $O = o_1, o_2, \dots, o_T$  для модели  $\lambda = \{A, B, \Pi\}$ ?
- 2) При заданных  $\lambda$  и  $O$ , как выбрать цепочку состояний  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_T)$ , которая некоторым наилучшим образом соответствует имеющейся последовательности наблюдений  $O$ ?
- 3) Каким образом нужно подстроить параметры модели  $\lambda = \{A, B, \Pi\}$ , чтобы вероятность  $P[O|\lambda]$  была максимальной?

Для решения указанных задач существуют классические алгоритмы с вполне приемлемой вычислительной сложностью. Первая задача решается посредством вычисления так называемой прямой переменной  $\alpha$  (алгоритм прямого - обратного хода), что позволяет определить, насколько хорошо данная модель соответствует наблюдениям  $O$ , а если имеется несколько моделей, позволяет выбрать из них ту, которая подходит наилучшим образом. Для решения второй задачи обычно применяется алгоритм Витерби, использующий

динамическое программирование и вычисляющий наилучшую цепочку состояний, имеющую максимальную вероятность  $P[Q|O, \lambda]$ . В третьей задаче применяется процедура переоценки Баума-Уэлча. Идея состоит в том, чтобы так оптимизировать параметры модели  $\lambda$ , чтобы она наилучшим образом соответствовала  $O$ , называемой обучающей последовательностью. Таким образом, создается модель, наиболее близко описывающая наблюдаемый процесс или явление.

В распознавании речи наблюдаемая величина - это вектор спектральных характеристик речевого сигнала в данный момент времени. Для осуществления распознавания необходимо построить кодовую книгу, содержащую множество эталонных наборов для характерных признаков речи (например, коэффициентов линейного предсказания, распределения энергии по частотам и так далее). Для этого записываются эталонные речевые фрагменты, разбиваются на элементарные составляющие (отрезки речи, в течении которых можно считать параметры речевого сигнала постоянными) и для каждого из них вычисляются значения характерных признаков. Одной элементарной составляющей будет соответствовать один набор признаков из множества наборов признаков словаря. Эта фаза в процессе распознавания речи называется предпроцессинг. На второй фазе - декодирования - строятся наиболее вероятные последовательности слов и фраз на базе акустико-фонетической модели, лексикона, языковой модели. Инструментами для решения этой задачи чаще всего и выступают алгоритмы, основанные на теории скрытых марковских моделей [2].

Таким образом, работу по созданию и обучению скрытых марковских моделей для системы распознавания речи можно описать следующими этапами [4]:

- изучение особенностей языка, классификация фонем, выбор единиц распознавания речи, выбор типа модели для базовых единиц речи.
- создание фонетического словаря, который должен включать такие слова и их сочетания, чтобы наиболее полно отражать фонемы и их сочетания, присутствующие в языке (формирование наиболее полного, непротиворечивого и компактного словаря является одной из ключевых задач при создании распознавателей).
- создание на базе фонетического словаря речевой базы данных (речевого корпуса) для обучения и тестирования. Слова и словосочетания из фонетического словаря многократно произносятся разными дикторами в разных условиях и с использованием различного оборудования. Записи размечаются, атрибутируются, снабжаются фонетической

транскрипцией. Часть записей речевого корпуса (обычно большая) используется для обучения моделей, другая часть - для тестирования.

- производится спектральный анализ и параметризация речевых сигналов из обучающего множества записей речевой базы с целью получения эталонных векторов признаков и обучения акустических моделей, описывающих элементы речи. Эталонные векторы признаков должны удовлетворять следующим условиям: иметь одинаковую размерность; одинаково описывать одни и те же фонемы, произносимые разными людьми; существенно отличаться для разных фонем. Составляется набор эталонных векторов признаков, который строится путем кластеризации обучающих речевых сигналов. Речь при распознавании будет преобразовываться в набор векторов, в результате чего и строится последовательность наблюдений.
- составляются модели для всех элементов речи и всех слов из словаря.
- выбираются начальные параметры скрытых марковских моделей.
- производится обучение моделей, для чего последовательно выполняется переоценка параметров скрытых марковских моделей, и модели с новыми параметрами тестируются на тестовой выборке до тех пор, пока не будет достигнут желаемый результат.

Как видно, аппарат скрытых марковских моделей, демонстрирует высокую продуктивность при использовании его для построения дикторонезависимых распознавателей, но вместе с тем имеет ряд уязвимостей. В первую очередь это сама статистическая природа моделей. Во-вторых, не представляется возможным включить в обучающий речевой корпус образцы всех возможных вариантов произношений, что влечет за собой случаи, когда система не сможет понять исходную речь или поймет ее неверно даже при неоднократном повторений высказываний.

Тем не менее, использование дополнительных и альтернативных подходов к решению задач моделирования речевых сигналов, среди которых нейронные сети, гибридные модели и многое другое, способствует росту качества работы распознавателей, хотя и не позволяет, на данном этапе, добиться стопроцентного распознавания речи компьютером.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rabiner L.R., Juang B.H. *Fundamentals of speech recognition*. – A Pearson Education Company Upper Saddle River, NJ. 1993.
- [2] Холоденко А.Б. *О построении статистических языковых моделей для систем распознавания текста*. – [http://intsys.msu.ru/invest/speech/articles/rus\\_in.html](http://intsys.msu.ru/invest/speech/articles/rus_in.html)

- [3] Fink G. A. *Markov Models for Pattern Recognition From Theory to Applications*. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [4] Фархадов М.П., Кудубаева С.А., Ермагамбетова Г.Н. *Теория скрытых Марковских моделей*. – Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2013, №6

## О выборе функции ядра в методе опорных векторов

*Литвинов Дмитрий Сергеевич*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: dlitvinov28@gmail.com

Среди алгоритмов классификации одним из наиболее эффективных является метод опорных векторов (support vector machine, SVM), основанный на методе обобщенных портретов [1].

Метод опорных векторов представляет собой линейный пороговый классификатор, максимизирующий зазор между классами. Пусть задана обучающая выборка  $X^\ell = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^\ell$ . Алгоритм строится в виде

$$a(x) = \text{sign}(\langle w, x \rangle - w_0),$$

где  $x = (x^1, \dots, x^n)$  – признаковое описание классифицируемого объекта, вектор весов  $w = (w^1, \dots, w^n)$  и скалярный порог  $w_0$  – параметры алгоритма. Для задачи классификации с двумя классами, обозначенными  $+1$  и  $-1$ , данный алгоритм строит линейную гиперповерхность в пространстве признаков, разделяющую классы с максимальным зазором. Уравнение разделяющей гиперповерхности:  $\langle w, x \rangle = w_0$ .

Обучение метода опорных векторов заключается в максимизации ширины  $\frac{2}{\|w\|}$  разделяющей полосы. Для этого решается задача квадратичного программирования

$$\begin{cases} \langle w, w \rangle \rightarrow \min \\ y_i(\langle w, x_i \rangle - w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots, \ell \end{cases}$$

Формирование разделяющей полосы происходит только с небольшим числом объектов из обучающей выборки. Эти объекты, лежащие на границе разделяющей полосы, называют *опорными* объектами или векторами. Остальные объекты играют роль поддержки; они подтверждают корректность результата обучения алгоритма. Этот факт положительно влияет на эффективность метода опорных векторов.

Применение разделяющей гиперплоскости обосновано только для задач с линейно разделимыми классами. В случае, когда классы не разделимы линейно, используют прием введения функции ядра (*kernel trick*). Функция ядра представляет собой скалярное произведение в некотором *спрямляющем* пространстве. Спрямляющим называют пространство, которое содержит образы классифицируемых объектов, причем разделяющая гиперповерхность в этом пространстве является линейной. Таким образом, алгоритм строит линейную гиперповерхность в спрямляющем пространстве, которая переходит в нелинейную гиперповерхность в пространстве признаков.

Ядровая функция должна удовлетворять условиям Мерсера – быть симметричной и неотрицательно определенной. Однако, не существует методов построения ядер для задач классификации. В работе [2] указаны конструктивные способы построения ядер, но проблема выбора не разрешена.

Многие исследователи [3] рекомендуют использовать гауссовское ядро (радиально-базисная функция, radial-basis function, RBF)  $K(x, x') = \exp(-\frac{\|x-x'\|^2}{2\sigma^2})$ , где  $\sigma$  – свободный параметр. Указанная функция в задачах распознавания указывает на степень близости объектов. Однако, это ядро неприменимо, например, в задачах обработки текстовых данных. В [4] автор показывает, что RBF-ядро представляет собой полосовой фильтр низких частот и не имеет смысловой нагрузки при работе с текстовыми данными. Таким образом, гауссовскую функцию следует применять только в гладких задачах.

В задачах с разреженными данными следует применять регуляризацию. Широко распространены L1- и L2-регуляризация. L1-регуляризатор основан на методе наименьших квадратов с ограничением сверху на  $L^1$ -норму вектора параметров. L2-регуляризатор, или регуляризация Тихонова, в свою очередь использует норму в пространстве  $L^2$ .

Таким образом, выбор функции ядра должен основываться главным образом на вид исходных данных задачи. Следует применять известные методы анализа данных для выявления особенностей известной информации и, руководствуясь полученными результатами, осуществлять поиск адекватных и эффективных моделей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. *Теория распознавания образов*. – М.:Наука, – 1974.  
 [2] Воронцов К.В. *Лекции по методу опорных векторов*. – <http://www.ccas.ru/voron/download/SVM.pdf>.

- [3] Sergey Demyanov, James Bailey, Kotagiri Ramamohanarao, Christopher Leckie *AIC and BIC based approaches for SVM parameter value estimation with RBF kernels*. – Journal of Machine Learning Research: Workshop and Conference Proceedings 25, Asian Conference on Machine Learning, 2012. – <http://jmlr.org/proceedings/papers/v25/demyanov12/demyanov12.pdf>.
- [4] Charles Martin *Kernels Part 1: What is an RBF Kernel? Really?*. – [http://charlesmartin14.wordpress.com/2012/02/06/kernels\\_part\\_1/](http://charlesmartin14.wordpress.com/2012/02/06/kernels_part_1/).

## Оптимизация структуры нейронной сети

*Марциновский Евгений Павлович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: MartsinovskiyE@mail.ru

*В работе рассматриваются основные способы оптимизации структуры искусственных нейронных сетей.*

Решение реальных задач с помощью нейронных сетей обычно требует использования четко структурированных сетей довольно большого размера. В этом контексте возникает практический вопрос минимизации размера сети без потери производительности. При уменьшении размера нейронной сети снижается вероятность обучения помехам, содержащимся в примерах, и, таким образом, повышается качество обобщения. Минимизировать размер сети можно двумя способами [1].

- *Наращивание сети* (network growing). В этом случае в качестве начальной архитектуры выбирается простой многослойный персептрон, возможностей которого явно недостаточно для решения рассматриваемой задачи, после чего в сеть добавляется новый нейрон или слой скрытых нейронов только в том случае, если ошибка в процессе обучения перестает уменьшаться.
- *Упрощение структуры сети* (network pruning). В этом случае процесс адаптации начинается с большого многослойного персептрона, производительности которого достаточно для решения поставленной задачи. После этого сеть постепенно упрощается за счет избирательного или последовательного ослабления или отключения отдельных синаптических связей.

Примером реализации подхода наращивания сети является обучение *методом каскадной корреляции* (cascade-correlation learning). Процедура обучения

начинается с минимальной структуры сети, имеющей несколько входных и выходных узлов, что определяется условиями задачи, и не содержащей скрытых узлов. Для обучения сети может использоваться любой алгоритм. Скрытые нейроны добавляются в сеть по одному, образуя таким образом многослойную структуру добавленных скрытых нейронов. После добавления нового нейрона его входные синаптические связи замораживаются, а обучаются только его выходные синаптические связи. После их обучения новый скрытый нейрон становится постоянным детектором признаков данной сети. Процедура добавления новых скрытых нейронов описанным выше способом продолжается до тех пор, пока не удастся достичь удовлетворительной производительности сети.

Второй способ (процедура упрощения) предполагает два подхода, первый из которых основывается на одной из форм “регуляризации”, а второй — на удалении из сети определенных синаптических связей [2].

Поскольку архитектура сети по своей природе статична, необходимо обеспечить баланс между достоверностью данных обучения и качеством самой модели. В контексте обучения методом обратного распространения или любого другого метода обучения с учителем этого компромисса можно достичь с помощью минимизации общего риска:

$$R(w) = E_s(w) + \lambda E_c(w)$$

Первое слагаемое —  $E_s(w)$  — это стандартная *мера эффективности* (performance measure), которая зависит как от самой сети (модели), так и от входных данных. При обучении методом обратного распространения она обычно определяется как среднеквадратическая ошибка, которая вычисляется по всем выходным нейронам сети на всем обучающем множестве примеров для каждой эпохи. Второе слагаемое —  $E_c(w)$  — *штраф за сложность* (complexity penalty), который зависит исключительно от самой сети (модели). Его оценка основывается на предварительных знаниях о рассматриваемой модели.  $\lambda$  является *параметром регуляризации* (regularization parameter), который характеризует относительную значимость слагаемого штрафа за сложность по сравнению со слагаемым, описывающим меру производительности. В зависимости от способа представления штрафа существуют три основные процедуры регуляризации сложности для многослойного персептрона: снижение весов, исключение весов, сглаживающая аппроксимация.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воронцов К.В. *Лекции по искусственным нейронным сетям*. — 2007
- [2] Саймон Хайкин. *Нейронные сети: полный курс*, 2-е изд., испр. Пер. с англ. — М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. — 1104 с.
- [3] Ежов А.А., Шумский С.А. *Нейрокомпьютинг и его применение в экономике и бизнесе*. М.: МИФИ, 1998. — 224с.

## Классификация структур временных рядов с помощью сети Кохонена

*Сергеев Андрей Львович*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 501)

e-mail: andre231091@gmail.com

Задача прогнозирования финансовых временных рядов была и остается актуальной, поскольку предсказание является необходимым элементом любой инвестиционной деятельности, ведь сама идея инвестирования – вложения денег с целью получения дохода в будущем – основывается на идеи прогнозирования будущего.

Основные методы прогнозирования финансовых временных рядов, используемые в настоящее время:

- 1) экспертные методы прогнозирования.
- 2) Методы логического моделирования.
- 3) Экономико-математические методы.
- 4) Статистические методы.
- 5) Технический анализ.
- 6) Фундаментальный анализ.

Нейронные сети можно отнести к методам технического анализа, т.к. они пытаются выявить закономерности в развитии ряда, обучаясь на его исторических данных. Прогнозирование изменений цен в будущем на основе анализа изменений цен в прошлом. В его основе лежит анализ временных рядов цен — «чартов» (от англ. chart). Помимо ценовых рядов, в техническом анализе используется информация об объемах торгов и другие статистические данные. Наиболее часто методы технического анализа используются для анализа цен,

изменяющихся свободно, например, на биржах. В техническом анализе множество инструментов и методов, но все они основаны на одном предположении: из анализа временных рядов, выделяя тренды, можно спрогнозировать поведение цен.

В качестве нейронной сети предлагается использовать сети Кохонена. В качестве входных данных выбирается вектор параметров единственного объекта. Предъявленный на входе объект принадлежит к коду класса, который будет результатом работы сети. Кодирование в нейросети осуществляется номером канала. Поэтому сеть будет иметь  $M$  выходов, по числу классов, и чем большее значение принимает выход номер  $m_0$ , тем больше вероятность сети в том, что входной объект принадлежит к классу  $m_0$ .

Выберем евклидову меру близости. В этом случае ядро класса, минимизирующее сумму мер близости для объектов этого класса, совпадает с центром тяжести объектов:

$$c^{m_0} = \frac{1}{N(m_0)} \sum_{p:m(p)=m_0} x^p,$$

где  $N(m_0)$  — число объектов  $x^p$  в классе  $m_0$ .

Суммарная мера близости для всего множества  $\{x^p\}$  входных объектов должна быть минимизирована на классы при разбиении:

$$D = \sum_p \sum_i (x_i^p - c_i^{m(p)})^2 = \sum_p [(x^p, x^p) - 2(x^p, c^{m(p)}) + (c^{m(p)}, c^{m(p)})]$$

Задача поиска минимума  $D$  эквивалентна поиску максимума выражения:

$$\min D \rightarrow \max \sum_p \sum_i x_i^p c_i^{m(p)}$$

Алгоритм классификации для поиска максимума этой функции выглядит следующим образом:

1. для каждого вектора  $x^p$
2. для каждого  $m$
3. считаем сумму

$$\sum_i x_i^p c_i^{m(p)} = D^{m,p}$$

4. Ищем  $m_0$ , где

$$m_0 : \max_m D^{m,p}$$

5. Присоединяем объект к классу  $m_0$ .

Сеть Кохонена позволяет выделять похожие фрагменты данных в классы. Классификации структур в сетях Кохонена формируются динамически. Общее количество классов совпадает с количеством нейронов Кохонена. Меняя количество нейронов, можно динамически менять количество классов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Саймон Хайкин. *Нейронные сети: полный курс, 2-е издание; [пер. с англ. – Н.Н.Куссуль]*. / Саймон Хайкин – Москва: Вильямс, 2006. — 1104с.
- [2] Иван Заенцев. *Нейронные сети: основные модели*. / Иван Заенцев – Воронеж: Воронежский Государственный университет, 1999. — 76с.

## Нейросетевой анализ и прогнозирование временных рядов

*Спирина Мария Евгеньевна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500–И)

e-mail: marimalin0@gmail.ru

В большинстве случаев процессы в технических и природных системах могут быть описаны временными рядами, представляющими значения системных параметров в последовательно идущие моменты времени. Существуют две главные цели анализа временных рядов: выявление природы ряда и прогнозирование. Модель может быть использована для интерпретации конкретных данных (например, для понимания сезонного изменения курсов валют) и позволяет предсказать будущие значения временного ряда путем их экстраполяции. Результатом прогнозирования является уменьшение риска при принятии решения. Предоставляя при прогнозировании больше ресурсов, мы можем увеличить точность прогноза.

Большое количество методов при исследовании временных рядов содержит различные способы фильтрации шума, которые позволяют более четко увидеть регулярную составляющую. Большинство таких составляющих принадлежит двум классам: они являются либо трендом, либо сезонной составляющей. Тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени. Сезонная составляющая — это периодически повторяющаяся компонента. Эти виды регулярных компонент зачастую присутствуют в ряде одновременно.

Первым шагом выделения тренда является сглаживание. Сглаживание включает некоторый способ локального усреднения данных, при котором

несистематические компоненты взаимно погашают друг друга. Следующий шаг состоит в оценивании параметров модели. Для этого используют процедуры минимизации функции потерь. Полученные оценки параметров используются на последнем этапе (прогноз) для того, чтобы вычислить новые значения ряда и построить доверительный интервал для прогноза.

В мире наблюдается повышение интереса к разработкам и применению нейроалгоритмов. Нейронные сети уже сегодня решают множество сложных научных и технических задач, трудноразрешимых или неразрешимых при использовании традиционных подходов вычислительной математики. Нейросетевые методы используются в экономике, системах управления и прогноза в бизнесе и других сферах. Для решения поставленных задач были выбраны именно нейросетевые алгоритмы прогнозирования, так как они адаптивны к новым условиям и способны к обобщению полученной информации (обучаемости на примерах).

Для нейронных сетей на первом этапе следует выбрать следующее:

- какие нейроны мы хотим использовать (число входов, число скрытых слоев, передаточные функции);
- каким образом следует соединять их между собой;
- что взять в качестве входов и выходов сети.

На втором этапе нам следует обучить выбранную сеть, то есть подобрать такие значения ее весов, чтобы сеть работала нужным образом. Важно отметить, что вся информация, которой сеть располагает о задаче, содержится в наборе примеров. Поэтому качество обучения сети напрямую зависит от количества примеров в обучающей выборке, а также от того, насколько полно эти примеры описывают поставленную задачу.

С математической точки зрения процесс обучения можно описать следующим образом. В процессе функционирования нейронная сеть формирует выходной сигнал  $Y$  в соответствии с входным сигналом  $X$ , реализуя некоторую функцию  $Y = G(X)$ . Если архитектура сети задана, то вид функции  $G$  определяется значениями синаптических весов и смещений сети. Обучение состоит в поиске функции  $G$ , близкой к  $F$  (правильному ответу) в смысле некоторой функции ошибки  $E$ . При прогнозировании предполагается, что значение прогнозируемой величины зависит от каких-либо факторов, назовем их определяющими факторами, или признаками. Один из подходов в задачах прогнозирования основан на предположении зависимости прогнозируемых значений от предыдущих.

Для представления многомерных функций многих переменных возможно использовать однородную нейронную сеть, имеющую один скрытый слой

с сигмоидальными передаточными функциями нейронов. В качестве такой сети была выбрана нейронная сеть с обратным распространением ошибки (a feed-forward backpropagation network). Данная сеть очень точно может воспроизводить сложные нелинейные зависимости между входом и выходом. Прогнозирование временных рядов такими сетями сильно зависит от настройки параметров и количества нейронов. Для данной сети существует удобный способ модифицировать модель по мере того, как появляются новые наблюдения. Модель качественно работает с временными последовательностями, в которых мал интервал наблюдений, то есть может быть получена длительная временная последовательность. По этой причине модель используют в областях, где интересуют ежеминутные, ежечасовые, ежедневные или еженедельные наблюдения.

При практической реализации наиболее оптимальным количеством нейронов оказалось 15 ~ 20 штук в скрытом слое и один нейрон в выходном. Описанная сеть достаточно точно аппроксимирует имеющуюся нелинейную зависимость. Ошибка прогнозирования составила 0.0001, что является удовлетворительным показателем для проводимых вычислений. Большее количество нейронов (больше 30) в скрытом слое давало такие же результаты аппроксимации при значительном увеличении времени вычислений, при этом качество прогноза ухудшалось, что вызвано явлением переобучения.

Нейросетевые подходы открывают ряд новых возможностей в отношении создания имитационных моделей, наиболее полно учитывающих реальные свойства системы, в том числе нелинейности, и обеспечения быстрого действия для получения конечного результата.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бокс Дж., Дженкинс Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление*. – М.: Мир, – 1974.
- [2] Крислов В. А., Чумичкин К. В., Кондратюк А. В. *Представление исходных данных в задачах нейросетевого прогнозирования*. – Одесса: Наука, – 2003.
- [3] Медведев Г. А. *Практикум на ЭВМ по анализу временных рядов*. – М.: Мир, – 2001.
- [4] Тарнаруцкий В. Е. *Нейронные сети*.

## Использование генетического алгоритма в прогнозировании временных рядов

*Хохлова Анастасия Олеговна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: hohliksmile@gmail.com

Генетические алгоритмы (ГА) — это процедуры поиска оптимальных решений прикладных задач, основанные на механизмах естественного отбора и наследования. В них используется эволюционный принцип выживания наиболее приспособленных особей.

Существуют два главных преимущества ГА перед классическими оптимизационными методами: не предъявляется каких-либо существенных требований к видам целевых функций и ограничений; поиск экстремума целевой функции осуществляется одновременно по многим направлениям путем использования популяции возможных решений, а переход от одной популяции к другой позволяет избежать попадания в локальный минимум, при этом ГА характеризуется полиномиальной сложностью вычислений [1].

ГА в разных формах применяются к решению многих научных и технических проблем. ГА используются при создании других вычислительных структур, например, автоматов или сетей сортировки. В машинном обучении они используются при проектировании нейронных сетей или управлении роботами. Они также применяются при моделировании развития в разных предметных областях, включая биологические (экология, иммунология и популярная генетика) и социальные (такие как экономика и политические системы) системы.

Популярное применение ГА — оптимизация многопараметрических функций. Большинство реальных задач могут быть сформулированы как поиск оптимального значения, где значение — сложная функция, зависящая от определенных входных параметров. В некоторых случаях, нужно найти те значения параметров, при которых достигается точное значение функции. В других случаях, точный оптимум не нужен — решением может считаться любое значение, лучшее за определенную заданную величину. В этом случае, ГА — приемлемый метод для поиска "приемлемых" значений.

Некоторые модификации ГА позволяют решать задачи прогнозирования временных рядов. Прогнозирование временных рядов подразумевает, что известно значение некой функции в первых  $n$  точках временного ряда. Используя эту информацию необходимо спрогнозировать значение в  $n + 1$  точке временного ряда.

Алгоритм прогнозирования на основе ГА позволяет принимать в расчет более 15 внешних факторов, используя базовый ГА. Принцип работы основан на том, что исходные значения процесса  $Z(t)$  и внешних факторов  $X_1(t), \dots, X_S(t)$  раскладывают в наборы, состоящие из 0 и 1, которые называют генотипами. Далее применяют ряд преобразований: скрещивание и мутирование для формирования преобразованных наборов, которые называются фенотипами. Исходные и полученные наборы исследуются с использованием функции приспособленности. Если решение получилось неудовлетворительным, то снова производится скрещивание и мутирование, в результате чего получается еще более новые наборы (новое поколение), которые снова оцениваются. Итеративный процесс продолжается до тех пор, пока решение не будет удовлетворительным.

Для разработки однофакторных нечетких моделей прогнозирования применяются дискретные нечеткие множества второго типа. ГА обеспечивает выбор оптимальных параметров модели прогнозирования — действительных чисел для корректировки границ универсума, числа интервалов разбиения универсума и степеней принадлежности элементов дискретных нечетких множеств второго типа [2]. Так же можно применять ГА для выбора оптимальных параметров двухфакторной модели [1].

Для более точного прогнозирования необходимо учитывать много факторов. В алгоритмах возникают многопараметрические функции, где подбор параметров является зачастую трудоемкой и непростой задачей. Сила ГА состоит в его способности манипулировать одновременно многими параметрами, которую используют в сотнях прикладных программ, в том числе и в прогнозировании.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Демидова Л.А. *Прогнозирование тенденций временных рядов*. №4, С.46-53. – 2008.
- [2] Демидова Л.А., Скворцова Т.С. *Применение генетических алгоритмов для прогнозирования нечетких временных рядов*. Вестник РГРТУ, №1 (выпуск 31). Рязань, – 2010.
- [3] Mahfoud S., Mani G. *Financial Forecasting Using Genetic Algorithms. Applied Artificial Intelligence*. – Vol. 10, №6. P. 543 – 565. – 1996.

## Основной алгоритм машинной реализации игры «Покер»

*Шафалюк Татьяна Григорьевна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 501-И)

e-mail: vilma\_sh\_91@mail.ru

Внимательно изучив тенденции развития мобильных приложений, можно прийти к выводу, что информационные технологии не стоят на месте и развиваются с каждым годом все больше и больше. Операционная система Android наиболее часто используется для мобильных устройств. Поэтому в данной статье будет рассмотрена разработка приложения «Покер» на Android.

Покер примечателен тем, что он является игрой с неполной информацией — игрок не знает карт соперника. Также в нем присутствуют элементы случайности — карты игроков и на доске выбираются из колоды случайным образом. К этим двум аспектам игры в покер добавляется еще и третий — количество игровых состояний, которое в некоторых покерных дисциплинах лишь слегка уступает шахматам.

Особую сложность для программной реализации представляет эвристическая оценка вероятности выигрыша руки[1], путем нахождения процентной вероятности выигрыша с данным набором карт. Подсчет будет производиться по количествам аутов, имеющихся на данный момент, учитывая возможные состояния руки оппонента.

Для того, чтобы просчитать будет ли удачной раздача, необходимо определить вероятность выигрышной ставки в Техасском Холдеме[3]. Например: если у первого игрок есть две червы на руках и две червы на флопе, его шансы на флеш — 2 к 1. Это означает, что на каждые три раздачи с данной рукой, флеш соберется только в одной из них. Если же шансы игрока были 3 к 1, то выиграть с данной рукой он смог бы всего один раз из четырех раздач.

X к 1 шанс → Вы можете ожидать выигрышной руки 1 из (X + 1) раз

X к 1 шансу:  $1/(X + 1)$  шанс разыграть вашу руку

Пример: 3 к 1 шансу →  $\frac{1}{4} = 25\%$  шанс разыграть вашу руку

Пример: если у игрока на руках одна пара и флоп не содержит карты того же старшинства, возможность раздачи нужной карты на терне[1] 22 : 1(4%). Если в терне также отсутствует данная карта, шансы игрока получить её в ривере[1] снова 22 : 1(4%). Однако суммарно шансы получения её в терне или ривере — 12 : 1(8%).



С математической точки зрения, использование объединенной вероятности имеет место только тогда, когда возможна ситуация all-in[1]. Существует два способа вычисления выигрышной раздачи, длинный и короткий. Рассмотрим для начала длинный. После подсчета всех аутов для одной раздачи можно определить вероятность того, что данная рука может быть разыграна до ривера. Данную вероятность легко просчитать для единичного случая, как флиппинг от терна к риверу. Формула расчета выглядит так:  $\frac{(TotalOuts)}{(Remainingcards)}$  (Общее количество аутов/Остальные карты). Однако для двух карт (от флопа к риверу) данная задача решается более сложно. От 100% вероятности необходимо отнять вероятность того, что два раза подряд вы получите карту, которая вам не нужна:

$$\begin{aligned} \text{Флоп к риверу: } & 1 - [((47 - \text{Ауты})/47) \times ((46 - \text{Ауты})/46)] \\ \text{Терн к риверу: } & 1 - ((46 - \text{Аутов})/46) \end{aligned}$$

Число 47 означает количество карт, оставшихся в колоде после флопа (52 карты всего, минус 2 карты у вас на руках и минус 3 карты на флопе, итого 47 оставшихся карт в колоде). Не смотря на то, что технически в колоде не 47 карт, наши расчёты предполагают, что вы — единственный игрок в игре. Для иллюстрации можно привести пример с двумя оверкартами-дро[1], каждая из которых имеет три аута, которые в сумме дают шесть аутов для розыгрыша топ-пары:

$$\begin{aligned} \text{Две оверкарты-дро} &= 1 - [((47 - 6)/47) \times ((46 - 6)/46)] \\ &= 1 - [41/47 \times 40/46] = 1 - [0.87 \times 0.87] \\ &= 1 - 0.76 \\ &= 0.24 = 24\% \end{aligned}$$

Формула для изменения процента выигрыша:

$$\text{Шансы} = \left( \frac{1}{\text{Проценты}} \right) - 1$$

Таким образом, чтобы изменить 24% вероятность выигрыша, необходимо проделать следующее:

$$\begin{aligned} \text{Шансы} &= \left( \frac{1}{24\% \text{получения оверкарты}} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{1}{0.24} \right) - 1 \\ &= 4.17 - 1 \\ &= 3.17 : 1 \approx 3.2 : 1 \end{aligned}$$

Теперь, когда рассмотрен способ рассчитать вероятность выигрыша руки в Техасском Холдеме, можно рассмотреть альтернативный вариант подсчета

данной вероятности, который является более эффективным. После нахождения количества аутов, необходимо умножить данное число на 4, и получить приблизительный расчет вероятности получения нужной карты от флопа. Если же умножить количество аутов на 2, то получится приблизительный расчет вероятности получить нужную карту от терна. Благодаря данным алгоритмам опытные игроки «Покера» могут увеличить свои шансы на победу. Данный расчет помогает им не делать необдуманных ставок и более грамотно рассчитывать свои возможности в сложных раздачах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Учебник по покеру*. – <http://www.mybet.ru/poker-tutorial/>
- [2] *Комбинации в покере. Покерные руки*. – <http://www.bigpot.ru/career/poker-hands.php>
- [3] *Техасский холдем*. – [http://ru.wikipedia.org/wiki/Техасский\\_холдем](http://ru.wikipedia.org/wiki/Техасский_холдем)

## Оценка сложности миварного подхода

*Щербакова Анастасия Александровна*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 501–И)

e-mail: kykyxDD@gmail.com

На данный момент остается актуальной разработка интеллектуальных систем и, в том числе, экспертных систем. С 2002 года получил распространение миварный подход к построению таких систем. Рассмотрим оценку сложности миварного подхода.

Согласна Поспелову Д.А. производственная система может быть представлена любую совокупность продукции, в которую могут входить продукты типов [1]. Такие системы можно представить в виде однодольного графа. Но производственной системы становится критичной при увеличении количества правил, что означает повышение вычислительной сложности. Даже современные компьютеры позволяют обработать лишь 20 правил, что мало при большом количестве переменных и правил для относительно простых предметных областях. Миварный подход позволяет эффективно упростить задачу, разбив предметную область в виде двудольного графа.

Под миваром понимают точку многомерного информационного пространства  $\langle \text{вещь, свойство, отношение} \rangle (V, S, O)$ , которое задается путем определения основных осей и фиксацией основных объектов и их отношений, названия объектов и отношений в некотором порядке фиксируются на осях [2].

Миварная сеть — это способ представления информации в виде двудольного ориентированного графа, состоящего из переменных ( $P$ ) и правил ( $R$ ), причем этот граф представляется в виде двумерной матрицы  $PxR$  следующим образом [2]:

- сеть состоит из элементов двух видов (двух долей графа): 1) вершин графа — переменных ( $P$ ) и 2) ребер графа — правил ( $R$ );
- для каждой переменной в явном виде хранится информация о всех правилах  $R$ , для которых она является входной ( $X$ ) или выходной ( $Y$ ) переменной с явным указанием этого;
- для каждого правила  $R$  в явном виде хранится информация о всех его входных и выходных переменных  $P$ , включая и информацию о количестве входных ( $X$ ) и выходных ( $Y$ ) переменных.

При таком описании миварной сети представляется возможность создания механизма (алгоритма) поиска логического вывода с линейной вычислительной сложностью. Именно за счет хранения всей информации по каждому элементу миварной сети возникает возможность прямого и однозначного поиска логического вывода с линейной вычислительной сложностью и исключение переборных и возвратов, что было характерно для предшествующих схем логического вывода с NP-полной сложностью поиска решения.

Как было уже сказано, миварные сети могут быть представлены в виде двудольного графа. Для этого необходимо разработать формализованное описание предметной области. Нужно выделить основные объекты-переменные и правила-процедуры. Затем создаются два списка, которые и образуют две непересекающиеся доли графа: список объектов и список правил. Выделим три основных этапа миварной обработки информации [2]:

- формирование миварной матрицы описания предметной области;
- работа с матрицей и конструирование алгоритма решения заданной задачи;
- по полученному алгоритму выполнение всех вычислений и нахождение ответа.

Первый этап является результатом синтеза концептуальной модели предметной области и ее формализации в виде продукционных правил с переходом на миварные правила вида: "входные объекты — правила/процедуры — выходные объекты"

На втором этапе выполняется автоматическое конструирование алгоритма решения или логический вывод. В качестве исходных данных берется миварная матрица описания предметной области, а также заданные входные ("ДА-НО") и искомые ("НАЙТИ") объекты-переменные.

На третьем этапе должно выполняться решение по полученному алгоритму. Опишем теоретические основы работы миварного метода логико-вычислительной обработки данных. Сперва для миварной сети логических правил, представленной в списочной форме, строится матрица. На основе анализа этой матрицы определяется факт наличия успешного маршрута вывода, после определяются возможные маршруты логического вывода, а на последнем этапе из этих маршрутов выбирают "кратчайший наиболее оптимальный по заданным критериям оптимальности".

Если известны  $m$  правил и  $n$  переменных (входящих в правила либо в качестве исходных, либо в качестве получаемых, то есть выходных), тогда в матрице  $V(m \times n)$ , каждая строка которой соответствует одному из правил и содержит информацию об используемых в правиле переменных, могут быть представлены все взаимосвязи между правилами и переменными. В каждой строке все входные переменные этого правила в матрице помечаются символом  $x$ , все выходные —  $y$ ; все переменные, которые уже получили в процессе вывода или задания исходных данных некоторое конкретное значение, —  $z$ ; а все искомые (выходные) переменные, то есть те, которые необходимо "вывести" из исходных (входных) данных, —  $w$ . В матрицу  $V$  добавим одну строку и один столбец для хранения в них служебной информации. Количество служебной информации может видоизменяться для различных конкретных реализаций программных комплексов. Получаем матрицу  $V$  размерности  $(m + 1) \times (n + 1)$ , в которой отражена вся структура исходной сети правил.

Рассмотрим расчет вычислительной сложности миварного метода обработки [2]. Отметим, что миварные сети основаны на том, что каждое правило при решении конкретной задачи запускается максимум один раз. Правило может не запускаться совсем, т.е. 0 (ноль) раз. Есть отдельные модификации ("два прохода") миварного метода, когда сначала выполняется поиск "сверху-вниз" и активизируются все возможные правила, а затем выполняется дополнительный проход по матрице "снизу-вверх" и отсекаются лишние правила и оставляются только такие правила, которые необходимы для решения задачи. В таком случае правила рассматриваются 2 раза.

Общее количество действий при миварном методе определяется суммой действий на каждом этапе:

- 1) присваивание известных  $z$  и искомым  $w$  значений клеткам служебной строки  $(m + 1)$  (общее количество таких действий не более  $n$ );
- 2) присвоение признака обработки правил в служебном столбце  $(n + 1)$  (количество действий не более  $2m$ , но может быть не более числа  $m$ );
- 3) присваивание признака известности ( $z$ ) клеткам служебной строки  $(m + 1)$

(общее количество таких действий не более  $n$ );

4) определение новых значений клеткам строки  $(m + 1)$  (количество таких действий не более  $n$ ).

Действия на 1, 2 и 3 этапах выполняются над одним массивом данных — строкой  $(m + 1)$ . При этом общее, суммарное, количество действий на всех этих этапах (1, 2 и 3) не должно превышать общего количества клеток в этой строке, так как обработанные значения "вычеркиваются" и более не обрабатываются. Получаем, что общее количество действий ( $KD$ ) при миварном методе обработки, то есть его вычислительная сложность, не превышает количества клеток в служебных частях матрицы:  $O(m + n)$ , то есть  $KD \leq (m + n)$ .

Опираясь на работу [2], где приведен этот пример, можно понять, когда нельзя реализовать предложенные сокращения вычислений. Миварный метод решает задачу поиска маршрута логического вывода с вычислительной сложностью:

$$KD = O(m * n)$$

Т.е. в "худшем" случае по каждой клетке миварной матрицы "проходят" один раз, что исключает повторы и циклы. Таким образом, относительно классического подхода получаем линейную зависимость вычислительной сложности от количества правил (где  $n = Const$ ):

$$KD = O(m * Const)$$

Если  $m = Const$ , то  $KD = O(Const * n)$ . При решении практических задач часто количество правил и переменных не изменяется и получаем:

$$KD = O(Const * Const)$$

Так как каждое правило может запускаться только один раз, то именно этим определяется линейная вычислительная сложность миварного метода поиска логического вывода, так как если каждое правило запускается только один раз, то и максимальное количество операций будет равно количеству правил (линейная зависимость).

Возможно различные применения миварных технологий, а также пути повышения их эффективности на основе создания виртуальных потоковых баз данных. Известна перспективная миварная экспертная система для распознавания образов на основе нечеткой классификации и моделирования различных предметных областей с автоматизированным расширением контекста. Именно в исследовании вопросов описания, обработки и представления контекста ведутся перспективные разработки миваров в новых областях их

применения. Таким образом доказано, что существует достаточно универсальный миварный подход для решения многих практических задач применения информационных систем и процессов с одновременным проведением как логической, так и вычислительной обработки данных.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Поспелов Д.А. *Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов.* – М.: Радио и связь, - 1989. 184 с.
- [2] Варламов О.О. *Практическая реализация линейной вычислительной сложности логического вывода на правилах "ЕСЛИ-ТО" в миварных сетях и обработка более трех миллионов правил. Автоматизация и управление в технических системах.* - Научно-методический сборник трудов, - №1(3) Красноярск – 2013, С. 60-96.
- [3] Варламов О.О. *Переход от продукций к двудольному миварным сетям и практическая реализация автоматического конструктора алгоритма управляемого потоком входных данных и обрабатывающего более трех миллионов правил. Искусственный интеллект.* – 2012. – № 4.

## СОДЕРЖАНИЕ

Секция МАТЕМАТИКИ.....	3
<b>Аликина Е.А.</b> FT-алгебры и RT-алгебры.....	3
<b>Аржанникова Я.В.</b> Исследование двухлинейной системы массового обслуживания.....	5
<b>Бастрюкова В.Е., Радомирская К.А.</b> Смешанные краевые задачи сопряжения для оператора Лапласа.....	8
<b>Белялова А.Р.</b> Геометрия ортопроекторов в алгебре фон Нейманна .	13
<b>Жолудева А.К.</b> Теорема о среднем для $K$ -субдифференцируемых отображений.....	16
<b>Закирья Б.М.</b> Построение прямой в $E_3$ по ее заданным Плюккерovým координатам.....	20
<b>Кисель О.С.</b> Порядковая и индивидуальная эргодические теоремы в пространствах Орлича-Лоренца.....	25
<b>Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.</b> Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения.....	30
<b>Кузьмина М.А.</b> Об одном способе построения базисных инвариантов унитарной группы $W(J_3(4))$ .....	37
<b>Курбакова Е.С.</b> Арифметические действия с графиками.....	38
<b>Маматова Э.Р.</b> Факторы. Классификация факторов.....	40
<b>Муединова Н.Н.</b> Коммутативные алгебры фон Неймана.....	44
<b>Осетрова С.А.</b> Формула Крейна для резольвент кососамосопряженных расширений кососимметрического оператора в кватернионном модуле.....	46
<b>Османов С.М.</b> Решение дифференциальных уравнений с помощью математического пакета Maple.....	50

<b>Савчин Т.Б.</b> Геометическое приложение алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ . . .	52
<b>Суркова М. И.</b> Рассмотрение элементов математической статистики с помощью ИТ . . . . .	57
<b>Турчик П.В.</b> Исследование системы $M/D/1$ с одной орбитой . . . . .	61
<b>Шпилёв Р.О.</b> Учёт специфики оптимизационных задач с использо- ванием квазимер и квазирасстояний . . . . .	65
<b>Якубова А.Р.</b> Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм . . . . .	70
<b>Секция ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ . . . . .</b>	
<b>Авджиев В.А.</b> Адаптивный web-дизайн . . . . .	77
<b>Ганиев Ю.С.</b> Т-линейные динамические системы . . . . .	80
<b>Ильин Д.С.</b> Автоматизированные обучающие системы . . . . .	83
<b>Крупина Ю.А.</b> Краевая задача термоупругости для прямоугольной пластины . . . . .	86
<b>Ляшко А.Д.</b> О собственных частотах при установившихся изгибных колебаний прямоугольной призмы . . . . .	89
<b>Подаревская К.М.</b> Адаптация электронного пособия "Численные ме- тоды" к требованиям дистанционного обучения . . . . .	93
<b>Халилов С.Н.</b> Исследование и построение Т-линейных динамических систем . . . . .	97
<b>Шаповалова И.А., Щербина О.А.</b> Приближенные локальные эли- минационные алгоритмы для решения разреженных задач дискрет- ной оптимизации . . . . .	101



Секция **ИНФОРМАТИКИ** ..... 105

<b>Бадудина Е.С.</b> Поиск закономерностей в разнотипных данных.....	105
<b>Ганиева Э.А.</b> Разработка игрового приложения "Судоку" для ОС Android.....	108
<b>Гончаров А.А.</b> Распознавание изображений в задачах дополненной реальности.....	111
<b>Згурская О.О.</b> Приближенные алгоритмы решения задач, сводящихся к задаче коммивояжеров.....	114
<b>Косов А.С.</b> Прогнозирование временных рядов методом скользящих средних.....	118
<b>Кузин А.Б.</b> Скрытые марковские модели в распознавании речи.....	121
<b>Литвинов Д.С.</b> О выборе функции ядра в методе опорных векторов	125
<b>Марциновский Е.П.</b> Оптимизация структуры нейронной сети.....	127
<b>Сергеев А.Л.</b> Классификация структур временных рядов с помощью сети Кохонена.....	129
<b>Спирина М.Е.</b> Нейросетевой анализ и прогнозирование временных рядов.....	131
<b>Хохлова А.О.</b> Использование генетического алгоритма в прогнозировании временных рядов.....	134
<b>Шафалюк Т.Г.</b> Основной алгоритм машинной реализации игры «Покер».....	136
<b>Щербакова А.А.</b> Оценка сложности миварного подхода.....	138