

Крымский научный центр НАН Украины

Таврический национальный университет
им. В.И. Вернадского

**ТАВРИЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ
ПО ИНФОРМАТИКЕ И МАТЕМАТИКЕ**



23-26 апреля 2013
КНЦ НАНУ
Симферополь

Редакционный совет:

Рудницкий О. И., к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики и информатики ТНУ им. В.И. Вернадского

Донской В. И., д.ф.-м.н., профессор, гл. научный сотрудник
КНЦ НАН Украины

Копачевский Н. Д., д.ф.-м.н., профессор

Орлов И. В., д.ф.-м.н., профессор

Чехов В. Н., д.ф.-м.н., профессор

Анашкин О. В., д.ф.-м.н., профессор

Техническая группа:

Марянин Б. Д., к.ф.-м.н., доцент, ответственный редактор

Войтицкий В. И., к.ф.-м.н., старший преподаватель, выпускающий редактор

СЕКЦИИ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ:

1. МАТЕМАТИКА, председатель Копачевский Н. Д.
математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра,
функциональный анализ, геометрия
2. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, председатель Чехов В. А.
математические модели в естествознании, численные методы решения
математических задач
3. ИНФОРМАТИКА, председатель Донской В. И.
прикладная информатика, программное обеспечение компьютерных систем

Печатается по решению научно-технического Совета КНЦ НАНУ и
Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины от 4
апреля 2013 года, протокол 4.

подписано к печати 04.04.2013 г.
отпечатано в типографии КНЦ НАНУ

Секция МАТЕМАТИКИ

О теореме Путнама-Фуглида

Аликина Екатерина Александровна, Ахрамович Максим Вячеславович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404)

e-mail: alikina.katya@gmail.com, fromen@bk.ru

В работе изучены некоторые вопросы коммутационности для нормальных операторов, рассмотрены различные варианты теоремы Путнама-Фуглида, ее обобщения и приложения.

Из известных классов операторов одним из самых важных и хорошо изученных является класс нормальных операторов, который включает в себя унитарные и самосопряженные операторы. Для нормальных операторов построена содержательная спектральная теория, исследованы вопросы коммутационности в конечномерном и в бесконечномерном пространствах. Некоторые результаты, полученные для нормальных операторов, не зависят от размерности соответствующего пространства. Другие же в конечномерном случае могут быть простыми или вообще не иметь смысла. Однако существуют вопросы, ответы на которые не зависят от размерности пространства, в то время как доказательства могут быть по существу разными. Одним из классических примеров является теорема Путнама-Фуглида, играющая важную роль в спектральной теории несамосопряженных операторов.

В конечномерном случае теорема Путнама-Фуглида является необходимым и достаточным условием нормальности оператора. Для неограниченного случая результат верен лишь "в одну сторону".

Пусть H — конечномерное гильбертово пространство, $\dim(H) = n$. Пусть $A \in \mathcal{B}(H)$ — нормальный оператор, действующий в H . Тогда, в силу спектральной теоремы, оператор A единственным образом представим в виде

$$A = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k, \quad r \leq n,$$

где P_1, P_2, \dots, P_r — попарно ортогональные ортопроекторы (спектральные ортопроекторы оператора A), такие, что $\sum_{k=1}^r P_k = I$, а $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Такое разложение оператора A называется спектральным.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. [1] Пусть $A = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k$ — спектральное разложение нормального оператора $A \in \mathcal{B}(H)$. Оператор $B \in \mathcal{B}(H)$ коммутирует с оператором A тогда и только тогда, когда он коммутирует с каждым ортопроектором P_k , $k = 1, \dots, r$.

Для оператора $A \in \mathcal{B}(H)$ имеет место следующий критерий нормальности, который представляет собой конечномерный аналог теоремы Фуглида.

Теорема 2. [1] Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ является нормальным тогда и только тогда, когда для любого оператора $B \in \mathcal{B}(H)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $AB = BA$;
- 2) $A^*B = BA^*$.

Пусть теперь H — произвольное гильбертово пространство и A — нормальный оператор, действующий в H . Рассмотрим произвольный линейный оператор B , действующий в H . Если операторы A и B неограничены, то равенство $AB = BA$, вообще говоря, может не иметь смысла ни для одного ненулевого вектора из H . Например, если $D(A) \cap R(B) = \{0\}$. Поэтому понятие коммутируемости неограниченных операторов нельзя вводить непосредственно.

Допустим, что области определения операторов A и B совпадают и содержат в себе, как подмножества, их области значений. Означает ли это эквивалентность коммутируемости операторов A, B и A^*, B^* ? В монографии [2] построен пример пары нормальных неограниченных операторов, для которых это предположение неверно. Действительно, пусть A_1, B_1 и A_2, B_2 — две коммутирующие пары "канонически сопряженных" операторов, которые рассматриваются в квантовой механике, т.е. операторы A_1, B_1 и A_2, B_2 — самосопряженные,

$$[A_i, A_j] = [B_i, B_j] = 0,$$

$$[A_i, B_j] = \begin{cases} iI, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2.$$

Рассмотрим операторы $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$. Тогда $A^* = A_1 - iA_2$, $B^* = B_1 - iB_2$. Следовательно,

$$A^*A - AA^* = 0, B^*B - BB^* = 0,$$

т.е. операторы A и B нормальны. Можно показать, что A и B коммутируют: $AB - BA = 0$. С другой стороны,

$$AB^* - B^*A = 2iI.$$

Таким образом, операторы A и B^* не являются коммутирующими.

Один из первых результатов о коммутируемости для нормальных неограниченных операторов был получен Б.Фуглидом в работе [3]:

Теорема 3. Пусть $B \in \mathcal{B}(H)$, A — нормальный оператор, действующий в H , со спектральным разложением $A = \int z dE_z$. Если операторы A и B коммутируют:

$$BA \subseteq AB,$$

то оператор B коммутирует со спектральными проекторами E_z :

$$BE_z = E_z B,$$

и, следовательно, коммутирует с A^* :

$$BA^* \subseteq A^* B.$$

В 1951г. К.Р. Путнам в работе [4] обобщил теорему Б. Фуглида для случая двух нормальных операторов:

Теорема 4. Пусть A_1 и A_2 — два нормальных оператора в гильбертовом пространстве H со спектральными разложениями

$$A_j = \int z dE_z^j, \quad j = 1, 2.$$

Если ограниченный оператор $B \in \mathcal{B}(H)$ удовлетворяет условию

$$BA_1 \subseteq A_2 B,$$

то

$$BE_z^1 = E_z^2 B,$$

откуда в частности следует, что

$$BA_1^* \subseteq A_2^* B.$$

Как следствие из этой теоремы, К.Р. Путнам получил следующий результат:

Теорема 5. Пусть A_1 и A_2 — два нормальных оператора в H , для которых существует невырожденный ограниченный оператор T такой, что:

$$A_2 = TA_1 T^{-1}.$$

Тогда операторы A_1 и A_2 унитарно эквивалентны.

Теория нормальных операторов настолько хороша, что многие теории других классов операторов создаются по ее образцу. Ослабив некоторые предпосылки понятия нормальности, были построены квазинормальные, субнормальные и гипонормальные операторы. И, конечно, для этих операторов также возникла необходимость исследования вопроса коммутруемости.

В 1980 Т. Фурута в работе [5] доказал теорему Путнама-Фуглида для случая субнормальных операторов и получил ее асимптотические версии. В последнее время имеется ряд результатов для коммутирующих гипонормальных операторов ([6], [7]). На основании теоремы Путнама-Фуглида исследуются некоторые асимптотические свойства коммутаторов в банаховых алгебрах ([8]-[11]), проводятся оценки степеней разложимых элементов ([12]) и т.п. Теорема Путнама-Фуглида и ее следствия имеют важные приложения в спектральной теории операторов, в асимптотической теории операторов, теории коммутаторов и многих других областях алгебры и функционального анализа.

Авторами ведется работа по исследованию неограниченных нормальных операторов, изучению вопроса коммутруемости для таких операторов и обобщению теоремы Путнама-Фуглида в алгебрах $S(M)$, $LS(M)$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Муратов М.А. *Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах (H)*: Учебное пособие / Муратов М.А., Островский В.Л., Самойленко Ю.С. – Киев.: Центр учебной литературы, – 2012 – 174 с.
- [2] Нейман Дж. фон *Избранные труды по функциональному анализу*. – М.: Наука, – 1987. – Т. 1. – 376 с.
- [3] Fuglede B. *A commutativity Theorem for Normal Operators*. – Proc. Nat. Acad. Sci USA, – 1950. – Vol. 36. – P. 35-40.
- [4] Putnam C.R. *On Normal Operators in Hilbert Space*. – Amer. J. Math, – 1951. – Vol. 73. – P. 357-362.
- [5] Furuta T. *Normality Can Be Relaxed in the Asymptotic Fuglede-Putnam Theorem*. – P.A.M.S., – 1980. – Vol. 79. – P. 593-596.
- [6] Uchiyama A., Tanahashi K. *Fuglede-Putnam's Theorem for p -Hyponormal or log-Hyponormal Operator*. – Glasgow Math. J., – 2002. – Vol. 44. – P. 397-410.
- [7] Jeon H., Tanahashi K., Uchiyama A. *On Quasimilarity for log-Hyponormal Operators*. – Glasgow Math. J., – 2004. – Vol. 46. – P. 169-176.
- [8] Караханян М.И. *Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях*. – Доклады НАН Армении, – 1981. – Т. 23 (5) – С. 265-268.
- [9] Караханян М.И. *Асимптотические свойства коммутаторов*. – Изв. НАН Армении. Математика, – 1994. – Т. 29 (1) – С. 50-58.

- [10] Караханян М.И. *Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах*. – Функ. анализ и прилож, – 2005. – Т. 39 (4) – С. 80-83.
- [11] Караханян М.И. *Некоторые замечания к общим теоремам о коммутаторах*. – Изв. НАН Армении. Математика, – 2007. – Т. 42 (3) – С. 49-54.
- [12] Горин Е.А. *Оценки степеней разложимых элементов комплексной банаховой алгебры*. – Функ. анализ и прилож, – 2005. – Т. 39 (4) – С. 14-31.

Динамика периодических решений феноменологического уравнения нестационарного горения вдоль полосы

Антропова Алёна Александровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 500)

e-mail: antr.al@mail.ru

В данной работе построены и исследованы на устойчивость периодические по времени пространственно неоднородные решения на отрезке с изолированными краями для распределенной автоколебательной системы, состоящей из связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и описывающей движение фронта горения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нестационарные режимы распространения фронта горения могут быть эффективно описаны феноменологическим уравнением [1]

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\varepsilon \left[\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} \right] \quad (1)$$

для координаты ξ точек фронта в системе отсчета, в которой фронт в среднем покоится. Величина ξ зависит от времени t и от координаты x , отсчитываемой вдоль фронта, в то время как сам фронт движется в направлении оси y . Точка означает дифференцирование по времени t , $\lambda > 0$ – корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков фронта, $\beta > 0$ – коэффициент нелокальной связи участков фронта, $0 < \varepsilon \ll 1$ – инкремент неустойчивости малых колебаний плоского фронта, Δ – одномерный лапласиан.

Уравнение (1) рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача (1)–(2) в случае $\beta = 0$ имеет решения в виде стоячих волн. Все они неустойчивы, за исключением периодического решения $\xi_0 = \cos t + O(\varepsilon)$ – синфазной волны.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Теорема 1. *Существует ε_0 такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и малых $\rho - \rho_0 > 0$ ($\rho_0 = \beta^{-1}$) задача (1)–(2) имеет периодические по t пространственно неоднородные решения $\xi_1^\pm(\omega(\varepsilon)t, \theta)$, где $\omega(\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon^2)$ – гладкая функция ε , $\theta = \frac{\pi x}{l}$. Справедливо равенство:*

$$\xi_1^\pm(t, \theta) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin t \cos \theta + O(\varepsilon, \rho - \rho_0). \quad (3)$$

Решения $\xi_1^\pm(\omega(\varepsilon)t, \theta)$ экспоненциально орбитально устойчивы при малых $\varepsilon, \rho - \rho_0$.

Доказательство. В работе Шиян [4, см. 3.5] была доказана эта теорема. Мы будем доказывать аналогичную теорему, только с учетом членов более высокого порядка. Результат получится один и тот же, но это доказательство позволяет нам получить более высокую точность.

Докажем существование при малых $\varepsilon > 0$, $\rho - \rho_0 > 0$ периодического решения задачи (1)–(2) вида

$$\xi = y_0(t) + y_1(t) \cos \theta + y_2(t) \cos 2\theta + v(t, \theta), \quad (4)$$

где $y_0(t), y_1(t), y_2(t), v(t, \theta)$ периодические по t функции, а $v(t, \theta)$ удовлетворяет также условиям

$$\begin{aligned} P_0 v &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t, \theta) d\theta = 0, \\ P_1 v &= \cos \theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t, \theta) \cos \theta d\theta = 0, \\ P_2 v &= \cos 2\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t, \theta) \cos 2\theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Подставим (4) в уравнение (1). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 2\varepsilon \left[\dot{y}_0 \left(1 - \frac{4}{3} \dot{y}_0^2 - 2\dot{y}_1^2 - 2\dot{y}_2^2 \right) - \dot{y}_1^2 \dot{y}_2 - 4\dot{y}_1 P_0(\dot{v}^2 \cos \theta) - \right. \\ &\quad \left. - 4\dot{y}_2 P_0(\dot{v}^2 \cos 2\theta) - 2(\dot{y}_1^2 + 4\dot{y}_0 \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos 2\theta) - 2\dot{y}_2^2 P_0(\dot{v} \cos 4\theta) - \right. \\ &\quad \left. - 4\dot{y}_1 \dot{y}_2 P_0(\dot{v} \cos 3\theta) - 4\left(\frac{1}{3} + \dot{y}_0 \right) P_0(\dot{v}^3) \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= 2\varepsilon \left[\dot{y}_1 \left(\alpha_1 - 4\dot{y}_0^2 - \dot{y}_1^2 - 2\dot{y}_2^2 - 4\dot{y}_0 \dot{y}_2 \right) - 2\dot{y}_1 P_0(\dot{v}^2) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\dot{y}_1 P_0(\dot{v}^2 \cos 2\theta) - 2\dot{y}_2 P_0(\dot{v}^2 \cos 3\theta) - 2(2\dot{y}_0 + \dot{y}_2) P_0(\dot{v}^2 \cos \theta) - \\
& - (\dot{y}_1^2 + 4\dot{y}_0 \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos \theta) - (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + 4\dot{y}_0 \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos 3\theta) - \\
& - \dot{y}_2^2 P_0(\dot{v} \cos 5\theta) - 4\dot{y}_1 (\dot{y}_0 + \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos 2\theta) - 2\dot{y}_1 \dot{y}_2 P_0(\dot{v} \cos 4\theta) - \\
& - \frac{4}{3} P_0(\dot{v}^3 \cos \theta) \Big], \tag{5} \\
\ddot{y}_2 + y_2 = 2\varepsilon & \left[\dot{y}_2 (\alpha_2 - 4\dot{y}_0^2 - 2\dot{y}_1^2 - \dot{y}_2^2) - 2\dot{y}_0 \dot{y}_1^2 - 2\dot{y}_1 P_0(\dot{v}^2 \cos \theta) - \right. \\
& - 2\dot{y}_1 P_0(\dot{v}^2 \cos 3\theta) - 2\dot{y}_2 P_0(\dot{v}^2) - 2\dot{y}_2 P_0(\dot{v}^2 \cos 4\theta) - (\dot{y}_1^2 + \\
& + 4\dot{y}_0 \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos 4\theta) - (4\dot{y}_0^2 + \dot{y}_2^2) P_0(\dot{v} \cos 2\theta) - \dot{y}_2^2 P_0(\dot{v} \cos 6\theta) - \\
& - 4\dot{y}_1 (\dot{y}_0 + \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos \theta) - 2\dot{y}_1 (2\dot{y}_0 + \dot{y}_2) P_0(\dot{v} \cos 3\theta) - \\
& \left. - 2\dot{y}_1 \dot{y}_2 P_0(\dot{v} \cos 5\theta) - \frac{4}{3} P_0(\dot{v}^3 \cos 2\theta) - 4\dot{y}_0 P_0(\dot{v}^2 \cos 2\theta) \right], \\
\ddot{v} + v = 2\varepsilon & \left[\dot{v} (1 - 4\dot{y}_0^2 - 2\dot{y}_1^2 - 2\dot{y}_2^2) - 4\dot{y}_1 P(\dot{v}^2 \cos \theta) - 4\dot{y}_2 P(\dot{v}^2 \cos 2\theta) - \right. \\
& - 2(\dot{y}_1^2 + 4\dot{y}_0 \dot{y}_2) P(\dot{v} \cos 2\theta) - 2\dot{y}_2^2 P(\dot{v} \cos 4\theta) - 4\dot{y}_1 (2\dot{y}_0 + \dot{y}_2) P(\dot{v} \cos \theta) - \\
& - 4\dot{y}_1 \dot{y}_2 P(\dot{v} \cos 3\theta) - \dot{y}_1 \left(\frac{1}{3} \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + 4\dot{y}_0 \dot{y}_2 \right) \cos 3\theta - \frac{1}{3} \dot{y}_2^3 \cos 6\theta - \dot{y}_2 (\dot{y}_1^2 + \\
& + 2\dot{y}_0 \dot{y}_2) \cos 4\theta - \dot{y}_0^2 \dot{y}_1 \cos 5\theta - \frac{4}{3} P(\dot{v}^3) - 4\dot{y}_0 P(\dot{v}^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{v} + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{v} \Big], \\
\dot{v}_x \Big|_{x=0} = \dot{v}_x \Big|_{x=l} & = 0,
\end{aligned}$$

где $P = E - (P_0 + P_1 + P_2)$, а E — единичный оператор. Эта система имеет периодическое решение $(\cos t + O(\varepsilon), 0, 0)$, которое является экспоненциально орбитально устойчивым, если $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 < 1$, и неустойчивым, если $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_2 > 1$. Покажем это. С этой целью линеаризуем систему (5) на указанном периодическом решении. Опустив в ней члены, порядок малости которых относительно ε больше единицы, получим систему:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_0 + y_0 &= 2\varepsilon (1 - 4 \sin^2 t) \dot{y}_0, \\
\ddot{y}_1 + y_1 &= 2\varepsilon (\alpha_1 - 4 \sin^2 t) \dot{y}_1, \\
\ddot{y}_2 + y_2 &= 2\varepsilon (\alpha_2 - 4 \sin^2 t) \dot{y}_2, \\
\ddot{v} + v &= 2\varepsilon \left[(1 - 4 \sin^2 t) \dot{v} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{v} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{v} \right], \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\dot{v}_x \Big|_{x=0} = \dot{v}_x \Big|_{x=l} = 0.$$

Выполним в системе (6) преобразование

$$\begin{aligned} y_k &= z_k \exp(it) + \bar{z}_k \exp(-it), \\ \dot{y}_k &= z_k i \exp(it) - \bar{z}_k i \exp(-it), \quad k = 0, 1, \\ v &= u \exp(it) + \bar{u} \exp(-it), \\ \dot{v} &= ui \exp(it) - \bar{u}i \exp(-it), \end{aligned}$$

а затем в полученной системе произведем замену $t = \tau/\varepsilon$. В результате приходим к системе:

$$\begin{aligned} z'_0 &= -z_0 - \bar{z}_0 + z_0 \exp(2i\tau/\varepsilon), \\ z'_1 &= (\alpha_1 - 2)z_1 - \bar{z}_1 + z_1 \exp(2i\tau/\varepsilon), \\ z'_2 &= (\alpha_2 - 2)z_2 - \bar{z}_2 + z_2 \exp(2i\tau/\varepsilon), \\ u' &= -u - \bar{u} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta u + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta} u + \exp(2i\tau/\varepsilon)u, \\ u'_x \Big|_{x=0} &= u'_x \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Переходим теперь к соответствующей усредненной системе. $\{0, -2, \alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3, \dots, \alpha_k - 1, \alpha_k - 3, \dots\}$ – её спектр устойчивости. Система (5) в окрестности точки бифуркации $(\beta^{-1}, \cos t + O(\varepsilon), 0, 0)$ имеет трехмерное инвариантное многообразие [3, см. 9.1]. При этом $v = 0$ является приближенным представлением этого многообразия. Редукция системы (5) на нём принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 2\varepsilon \left[\dot{y}_0 \left(1 - \frac{4}{3} \dot{y}_0^2 \right) - 2\dot{y}_0 (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \dot{y}_1^2 \dot{y}_2 \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= 2\varepsilon \left[\dot{y}_1 (\alpha_1 - \dot{y}_1^2) - 2\dot{y}_1 (2\dot{y}_0^2 + \dot{y}_2^2) - 4\dot{y}_0 \dot{y}_1 \dot{y}_2 \right], \\ \ddot{y}_2 + y_2 &= 2\varepsilon \left[\dot{y}_2 (\alpha_2 - \dot{y}_2^2) - 2\dot{y}_2 (2\dot{y}_0^2 + \dot{y}_1^2) - 2\dot{y}_0 \dot{y}_1^2 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а α_1, α_2 – параметры.

Эта система имеет периодическое решение $y_0 = \cos t + O(\varepsilon)$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Указанное периодическое решение экспоненциально орбитально устойчиво, если $0 < \alpha_1 < 1$ и $0 < \alpha_2 < 1$. При увеличении параметров α_1, α_2 и их переходе через 1 это периодическое решение устойчивость теряет. В этом случае, как следует из дальнейшего анализа, от указанного периодического решения

ответвляется пара периодических решений. Следуя методу малого параметра [2], построим их в виде:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \cos \tau + \varepsilon p_1(\tau) + \varepsilon^2 p_2(\tau) + \dots, \quad \dot{y}_0(0) = 0, \\ y_1 &= a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau + \varepsilon q_1(\tau) + \varepsilon^2 q_2(\tau) + \dots, \\ y_2 &= a_2 \cos \tau + b_2 \sin \tau + \varepsilon h_1(\tau) + \varepsilon^2 h_2(\tau) + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где $p_k(\tau)$, $q_k(\tau)$, $k = 1, 2, \dots$, — 2π -периодические функции.

Подставим равенство (8) в (7). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим рекуррентную последовательность систем линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений относительно $p_1(\tau)$, $q_1(\tau)$, $h_1(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_1(\tau)}{d\tau^2} + p_1(\tau) &= \left(-2a_0 + 2a_0^3 + 3a_0a_1^2 + a_0b_1^2 + 3a_0a_2^2 + a_0b_2^2 + \frac{3}{2}a_1^2a_2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}a_2b_1^2 + a_1b_1b_2 \right) \sin \tau + \left(-2a_0a_1b_1 - 2a_0a_2b_2 - \frac{1}{2}a_1^2b_2 - \frac{3}{2}b_1^2b_2 - a_1a_2b_1 - \right. \\ &- \left. 2g_1a_0 \right) \cos \tau + \left(-\frac{2}{3}a_0^3 - a_0a_1^2 + a_0b_1^2 - a_0a_2^2 + a_0b_2^2 - \frac{1}{2}a_1^2a_2 + \frac{1}{2}a_2b_1^2 + \right. \\ &+ \left. a_1b_1b_2 \right) \sin 3\tau + \left(2a_0a_1b_1 + 2a_0a_2b_2 + \frac{1}{2}a_1^2b_2 - \frac{1}{2}b_1^2b_2 + a_1a_2b_1 \right) \cos 3\tau, \\ \frac{d^2 q_1(\tau)}{d\tau^2} + q_1(\tau) &= \left(-2\alpha_1 + \frac{3}{2}a_1^3 + \frac{3}{2}a_1b_1^2 + 3a_1a_2^2 + a_1b_2^2 + 2a_2b_1b_2 + 6a_0^2a_1 + \right. \\ &+ \left. 6a_0a_1a_2 + 2a_0b_1b_2 - 2g_1b_1 \right) \sin \tau + \left(2\alpha_1b_1 - \frac{3}{2}a_1^2b_1 - \frac{3}{2}b_1^3 - a_2^2b_1 - 3b_1b_2^2 - \right. \\ &- \left. 2a_1a_2b_2 - 2a_0^2b_1 - 2a_0a_1b_2 - 2a_0a_2b_1 - 2g_1a_1 \right) \cos \tau + \left(-\frac{1}{2}a_1^3 + \frac{3}{2}a_1b_1^2 - \right. \\ &- \left. a_1a_2^2 + a_1b_2^2 + 2a_2b_1b_2 - 2a_0^2a_1 - 2a_0a_1a_2 + 2a_0b_1b_2 \right) \sin 3\tau + \left(\frac{3}{2}a_1^2b_1 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2}b_1^3 + a_2^2b_1 - b_1b_2^2 + 2a_1a_2b_2 + 2a_0^2b_1 + 2a_0a_1b_2 + 2a_0a_2b_1 \right) \cos 3\tau, \\ \frac{d^2 h_1(\tau)}{d\tau^2} + h_1(\tau) &= \left(-2\alpha_2a_2 + \frac{3}{2}a_2^3 + \frac{3}{2}a_2b_2^2 + 3a_1^2a_2 + a_2b_1^2 + 2a_1b_1b_2 + \right. \\ &+ \left. 6a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2 + a_0b_1^2 - 2g_1b_2 \right) \sin \tau + \left(2\alpha_2b_2 - \frac{3}{2}a_2^2b_2 - \frac{3}{2}b_2^3 - a_1^2b_2 - \right. \\ &- \left. 3b_1^2b_2 - 2a_1a_2b_1 - 2a_0^2b_2 - 2a_0a_1b_1 - 2g_1a_2 \right) \cos \tau + \left(-\frac{1}{2}a_2^3 + \frac{3}{2}a_2b_2^2 - \right. \\ &- \left. a_1^2a_2 + a_2b_1^2 + 2a_1b_1b_2 - 2a_0^2a_2 - a_0a_1^2 + a_0b_1^2 \right) \sin 3\tau + \left(\frac{3}{2}a_2^2b_2 - \frac{1}{2}b_2^3 + \right. \\ &+ \left. a_1^2b_2 - b_1^2b_2 + 2a_1a_2b_1 + 2a_0^2b_2 + 2a_0a_1b_1 \right) \cos 3\tau. \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этих уравнений является ортогональность их неоднородностей функциям $\cos \tau$, $\sin \tau$.

$$\begin{aligned} a_0 \left(1 - a_0^2 - \frac{3}{2}a_1^2 - \frac{3}{2}a_2^2 - \frac{1}{2}b_1^2 - \frac{1}{2}b_2^2 \right) - \frac{1}{4}a_2(3a_1^2 + b_1^2) - \frac{1}{2}a_1b_1b_2 &= 0, \\ a_1b_1 \left(a_0 + \frac{1}{2}a_2 \right) + b_2 \left(\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{3}{4}b_1^2 + a_0a_2 \right) + g_1a_0 &= 0, \\ a_1 \left(\alpha_1 - 3a_0^2 - \frac{3}{4}a_1^2 - \frac{3}{2}a_2^2 - \frac{3}{4}b_1^2 - \frac{1}{2}b_2^2 - 3a_0a_2 \right) - b_1b_2(a_0 + a_2) + g_1b_1 &= 0, \\ b_1 \left(\alpha_1 - a_0^2 - \frac{3}{4}a_1^2 - \frac{1}{2}a_2^2 - \frac{3}{4}b_1^2 - \frac{3}{2}b_2^2 - a_0a_2 \right) - a_1b_2(a_0 + a_2) - g_1a_1 &= 0, \\ a_2 \left(\alpha_2 - 3a_0^2 - \frac{3}{2}a_1^2 - \frac{3}{4}a_2^2 - \frac{1}{2}b_1^2 - \frac{3}{4}b_2^2 \right) - \frac{1}{2}a_0(3a_1^2 + b_1^2) - a_1b_1b_2 + g_1b_2 &= 0, \\ b_2 \left(\alpha_2 - a_0^2 - \frac{1}{2}a_1^2 - \frac{3}{4}a_2^2 - \frac{3}{2}b_1^2 - \frac{3}{4}b_2^2 \right) - a_1b_1(a_0 + a_2) - g_1a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $g_1 = 0$ — решение этой системы, от которого при $\alpha_1 = 1$ ($\alpha_2 \neq 1$) ответвляются два решения $(a_0(\alpha_1), 0, 0, \pm b_1(\alpha_1), 0, 0)$, где

$$a_0(\alpha_1) = \sqrt{3 - 2\alpha_1}, \quad b_1(\alpha_1) = \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1}.$$

И при $\alpha_2 = 1$ ($\alpha_1 \neq 1$) ответвляются два решения $(a_0(\alpha_2), 0, 0, 0, \pm b_2(\alpha_2), 0)$, где

$$a_0(\alpha_2) = \sqrt{3 - 2\alpha_2}, \quad b_2(\alpha_2) = \pm 2\sqrt{\alpha_2 - 1}.$$

Эти непрерывные ветви решений системы определены для $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_2 > 1$.

Итак, при росте параметров α_1, α_2 и их переходе через значения $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$ от теряющего устойчивость периодического решения $y_0 = \cos t + O(\varepsilon)$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ системы (7) ответвляется пара периодических решений

$$y_0^\pm = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos \tau + O(\varepsilon), \quad y_1^\pm = \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin \tau + O(\varepsilon),$$

или

$$y_0^\pm = \sqrt{3 - 2\alpha_2} \cos \tau + O(\varepsilon), \quad y_2^\pm = \pm 2\sqrt{\alpha_2 - 1} \sin \tau + O(\varepsilon), \quad \tau = (1 + O(\varepsilon^2))t.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маломед Б.А. *Распространение автоколебательных волн вдоль полосы*. — Изв. ВУЗ, сер. Радиофизика. — 1981. — Т.24. — № 5. — С. 571–575.
- [2] Самойленко А.М., Белан Е.П. *Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения*. — ДАН. — 2006. — Т.406. — № 6. — С. 738–741.
- [3] Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*. — М.: Мир. — 1985. — 376 с.

- [4] Шиян О.В. *Буферність в параболічних задачах Ван-дер-Полевського типу*: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: захищена 29.09.12. — 2012. — С. 66-83.

Критерий простоты минимального симметрического оператора на графе

Ашурова Эмине Неримановна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: work1991@ukr.net

В настоящей работе исследуются соотношения между квантовыми графами с вершинами δ и δ' -типа и дифференциальными симметрическими операторами. Получен критерий простоты минимального симметрического оператора на графе.

1. КВАНТОВЫЕ ГРАФЫ

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — метрический граф, множество ребер E которого состоит из вещественных интервалов $\Delta_k = [x_{2k-1}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, n}$, имеющих положительную длину $l_k = x_{2k} - x_{2k-1}$, а семейство вершин $V = \{V_i\}_{i=1}^m$ представляет собой разбиение множества концов отрезков $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$. Заметим, что в такой конструкции графа не может быть изолированных вершин, однако допустимы петли и кратные ребра.

Линейная мера Лебега, индуцированная на каждом ребре Δ_k , определяет гильбертово пространство $L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^n L_2(\Delta_k)$ и пространство Соболева

$$W^{2,2}(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^n W^{2,2}(\Delta_k).$$

Определение 1. Вершина V_k называется вершиной δ -типа, если в ней имеет место непрерывность функции, то есть, для любой функции $f \in W^{2,2}(\Gamma)$: $f(x_i) = f(x_j)$, где $x_i, x_j \in V_k$.

Для вершин δ -типа будем в дальнейшем обозначать: $f(V_k) = \sum_{x_i \in V_k} f(x_i)$.

Определение 2. Вершина V_k называется вершиной δ' -типа, если в ней имеет место непрерывность нормальной производной функции, то есть, для любой функции $f \in W^{2,2}(\Gamma)$: $\partial_n f(x_i) = \partial_n f(x_j)$ для $x_i, x_j \in V_k$, где

$$\partial_n f(x_k) = \begin{cases} f'(x_k), & \text{если } x_k \text{ — левый конец интервала,} \\ -f'(x_k), & \text{если } x_k \text{ — правый конец интервала.} \end{cases}$$

Для вершин δ' -типа будем в дальнейшем обозначать: $\partial_n f(V_k) = \sum_{x_i \in V_k} \partial_n f(x_i)$.

Предположим, что каждая вершина графа является либо вершиной δ -типа, либо вершиной δ' -типа.

На графе Γ зададим линейный оператор A_{\min} , который, на каждом ребре Δ_k действует как оператор Лапласа:

$$A_{\min} = -\frac{d^2}{dx^2},$$

с областью определения:

$$D(A_{\min}) = \{f \in W^{2,2}(\Gamma) \mid f(V_k) = 0, \partial_n f(V_k) = 0\}.$$

Назовем такой оператор A_{\min} и граф Γ *согласованными*. Построенная конструкция рассматривается как квантовый граф. Заметим, что оператор A_{\min} — замкнутый плотно определенный симметрический оператор.

2. УСЛОВИЯ ПРОСТОТЫ МИНИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть A_{\min} — замкнутый симметрический оператор, согласованный с графом Γ . Так как спектральный анализ собственных расширений симметрического оператора предполагает простоту оператора, то существенным является вопрос, при каких условиях оператор A_{\min} , согласованный с графом Γ , будет простым. Напомним, что замкнутый плотно определенный симметрический оператор называется *простым*, если не существует приводящего подпространства, на котором этот оператор индуцирует ненулевой самосопряженный оператор.

Очевидно, если граф Γ имеет N связных компонент, то оператор A_{\min} является простым тогда и только тогда, когда на каждой компоненте индуцируется простой симметрический оператор.

Если симметрический оператор имеет вещественные собственные значения, то на соответствующих собственных подпространствах он индуцирует самосопряженный оператор. Поэтому отсутствие вещественных собственных значений является необходимым и достаточным условием того, чтобы симметрический оператор дифференцирования являлся простым.

Существует несколько основных возможных видов подграфов графа Γ : дерево, петля, цикл, кратные ребра. Рассмотрим далее каждый из этих случаев.

Лемма 1. *Если граф Γ — дерево, то оператор A_{\min} , согласованный с графом Γ , является простым.*

Доказательство. Пусть V_k — висячая вершина (т.е. вершина степени 1). Эту вершину можно рассматривать, как вершину δ , и δ' -типа.

Без ограничения общности, предположим, что начала всех интервалов $[x_{2k-1}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, n}$, сдвинуты в точку нуль, и концы интервалов будут, соответственно, принимать значения l_k , $k = \overline{1, n}$.

Тогда для функции $f_k(x) = C_k^+ \cos \mu x + C_k^- \sin \mu x$, $\mu = \sqrt{\lambda}$, являющейся решением уравнения $(A_{\min} - \lambda I)f = 0$ на интервале $[0, l_k]$, граничные условия на концах отрезка приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} C_k^+ \cos \mu l_k + C_k^- \sin \mu l_k = 0, \\ C_k^+ \sin \mu l_k - C_k^- \cos \mu l_k = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $C_k^+ = C_k^- = 0$. Таким образом, решение уравнения $A_{\min} f = \lambda f$ на ребрах с висячими вершинами равно нулю. Поэтому такие ребра не влияют на решения уравнения на остальных ребрах, и эти ребра можно исключить из дальнейшего рассмотрения. При этом мы получаем новый набор висячих вершин.

Продолжая рассуждения, получаем, что уравнение $A_{\min} f = \lambda f$ имеет только нулевое решение на графе. Следовательно, для дерева Γ оператор A_{\min} всегда является простым. \square

Лемма 2. *Если граф Γ имеет петлю, то оператор A_{\min} , согласованный с графом Γ , не является простым.*

Доказательство. 1. Пусть V_k — вершина δ -типа, и в этой вершине граф Γ имеет петлю. Тогда для решения $f_k(x) = C_k^+ \cos \mu x + C_k^- \sin \mu x$, $\mu = \sqrt{\lambda}$ уравнения $(A_{\min} - \lambda I)f = 0$ на интервале $[0, l_k]$, граничные условия на концах отрезка приводят к следующим соотношениям:

$$C_k^+ = 0, \quad C_k^- \sin \mu l_k = 0.$$

Очевидно, что при $\mu l_k = \pi t$, $t \in \mathbb{N}$, мы имеем ненулевое решение на ребре Δ_k . Остальные составляющие решения можно выбрать нулевыми.

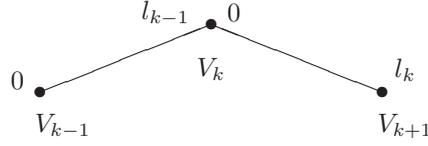
2. Пусть V_k — вершина δ' -типа, и в этой вершине граф Γ имеет петлю. Тогда для решения $f_k(x) = C_k^+ \cos \mu x + C_k^- \sin \mu x$, $\mu = \sqrt{\lambda}$ уравнения $(A_{\min} - \lambda I)f = 0$ на интервале $[0, l_k]$, граничные условия на концах отрезка приводят к следующим соотношениям:

$$C_k^- = 0, \quad C_k^+ \sin \mu l_k = 0.$$

Очевидно, что при $\mu l_k = \pi t$, $t \in \mathbb{N}$ мы имеем ненулевое решение на ребре Δ_k . \square

Лемма 3. Если граф Γ циклический и какие-либо два ребра цикла имеют рационально несоизмеримые длины, то уравнение $A_{\min} f = \lambda f$ на этом цикле имеет только нулевое решение.

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что ребра, имеющие рационально несоизмеримые длины, являются соседними. Допустим, что длины l_{k-1} и l_k этих ребер рационально несоизмеримы, то есть отношение $\frac{l_k}{l_{k-1}}$ является иррациональным числом.



1. Пусть V_k — вершина δ -типа и уравнение $A_{\min} f = \lambda f$ имеет на ребре $(0, l_k)$ ненулевое решение $f_k(x) = C_k^+ \cos \mu x + C_k^- \sin \mu x$. Тогда $f_k(0) = 0$. Следовательно, $C_k^+ = 0$ и $f_k(x) = C_k^- \sin \mu x$, $C_k^- \neq 0$. Нетрудно показать, что $f_{k-1}(x) = C_k^- \sin \mu(x - l_{k-1}) \neq 0$.

Продолжая эти рассуждения, можно показать, что если решение уравнения $Af = \lambda f$ отлично от нуля на каком-либо ребре l_k , то оно отлично от нуля на всех ребрах.

Для вершин V_{k-1}, V_{k+1} возможны четыре разных случая:

- (1) V_{k-1}, V_{k+1} — вершины δ -типа;
- (2) V_{k-1} — вершина δ' -типа, V_{k+1} — вершина δ -типа;
- (3) V_{k-1} — вершина δ -типа, V_{k+1} — вершина δ' -типа;
- (4) V_{k-1}, V_{k+1} — вершины δ' -типа.

Рассмотрим подробно только первый случай, так как в остальные — рассматриваются аналогично.

Итак, пусть V_{k-1}, V_{k+1} — вершины δ -типа. Тогда для соответствующих решений $f_k(x) = C_k^- \sin \mu x$ и $f_{k-1}(x) = C_k^- \sin \mu(x - l_{k-1})$, имеем следующие граничные условия:

$$C_k^- \sin \mu l_k = 0, \quad C_k^- \sin \mu l_{k-1} = 0.$$

Очевидно, что при $\mu l_k = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\mu l_{k-1} = \pi t$, $t \in \mathbb{N}$ существует ненулевое решение.

2. Пусть теперь V_k — вершина δ' -типа.

Применяя аналогичные рассуждения, получаем: $f_k(x) = C_k^+ \cos \mu x \neq 0$, $f_{k-1}(x) = -C_k^+ \cos \mu(x - l_{k-1}) \neq 0$.

Таким образом, решение может быть отлично от нуля, тогда и только тогда, когда ребра l_k, l_{k-1} рационально соизмеримы, что противоречит условию. \square

Следствие 1. *Если граф Γ является циклом, то согласованный с ним оператор A_{\min} является простым тогда и только тогда, когда хотя бы два ребра графа Γ имеют рационально несоизмеримые длины.*

Лемма 4. *Если граф Γ является двухвершинным графом с кратными ребрами, причем, эти ребра имеют попарно рационально несоизмеримые длины, то оператор A_{\min} является простым.*

Доказательство. Пусть граф Γ имеет кратные ребра. Тогда любые два ребра из этого набора образуют цикл длины два. Так как любая пара этих ребер имеет рационально несоизмеримые длины, то уравнение $A_{\min}f = \lambda f$ на этом подграфе, а значит, и на всем графе, имеет только нулевое решение. \square

Теорема 1. *Пусть оператор A_{\min} согласован с графом Γ .*

- (i) *Если граф Γ имеет петлю, то оператор A_{\min} не является простым.*
- (ii) *Если граф Γ имеет цикл, все ребра которого имеют рационально соизмеримые длины, то оператор A_{\min} не является простым.*
- (iii) *Если граф Γ имеет кратные ребра, причем, хотя бы одна пара из этих ребер имеет рационально соизмеримые длины, то оператор A_{\min} не является простым.*
- (iv) *Во всех остальных случаях оператор A_{\min} является простым.*

Автор выражает благодарность доценту кафедры алгебры и функционального анализа Карпенко Ирине Ивановне за постановку задачи и помощь в ее решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Peter Kuchment *Quantum graphs: an introduction and a brief survey.* – arXiv:0802.3442v1[math-ph] 23 Feb 2008.
- [2] Pavel Kurasov *Graph Laplacians and topology.* – Ark.Mat.,46 – 2008, 95- 111.
- [3] Карпенко И.И., Кандагура А.Н. *Конструкция граничных троек для квантового графа с нелокальными граничными условиями.* – Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Том 24 (63) №1 – 2011 – С. 1-16.

Симметрические компактные субдифференциалы

Баран Инна Викторовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: matemain@mail.ru

Понятие компактного субдифференциала перенесено на случай симметрического компактного субдифференциала, обобщающего понятие первой симметрической производной. Рассмотрены примеры.

Понятие субдифференциала является базовым понятием современного выпуклого и негладкого анализа и находит широкие применения. Несколько лет назад И. В. Орловым было введено понятие компактного субдифференциала (К-субдифференциала), которое затем нашло успешные применения ([1], [2], [3], [4]).

В нашей работе рассмотрен вопрос об обобщении понятия К-субдифференциала на симметрический случай. А именно, в исходной конструкции мы заменяем обычное разностное отношение $f(x+h) - f(x)/h$ на симметрическое $f(x+h) - f(x-h)/2h$. Таким образом, обобщается понятие симметрической, а не обычной, производной. В работе рассмотрены основные свойства симметричного К-субдифференциала для отображений вещественного аргумента, вплоть до обобщенной теоремы о среднем.

Напомним классическое определение первой симметрической производной (см. [5]).

Определение 1. *Первой симметрической производной f в точке x называется предел*

$$\widehat{f}'(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta^1 f(x, h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Напомним понятие компактного (несимметрического) субдифференциала (см. [1]) для отображения $f : [a; b] \rightarrow E$, где E – ЛВП.

Определение 2. *Частный выпуклый субдифференциал f в точке x есть множество:*

$$\partial_{co} f(x, \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Компактный субдифференциал (K -субдифференциал) отображения f в точке x есть множество:

$$\widehat{\partial}_K f(x) = K\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \widehat{\partial}_{co} f(x, \delta).$$

Перейдем теперь к основным определениям.

Определение 3. Частный симметрический выпуклый субдифференциал имеет вид:

$$\widehat{\partial}_{co} f(x, \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \mid 0 < h < \delta \right\}.$$

Если существует K -предел,

$$\widehat{\partial}_K f(x) = K\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \widehat{\partial}_{co} f(x, \delta),$$

назовем его симметрическим K -субдифференциалом первого порядка отображения f в точке x .

Нетрудно убедиться, что справедлива следующая

Теорема 1. Если существует обычная симметрическая производная $\widehat{f}'(x)$, то

$$\widehat{\partial}_K f(x) = \left\{ \widehat{f}'(x) \right\}.$$

В вещественнозначном случае $\widehat{\partial}_K f(x)$ может быть вычислен по простой формуле.

Теорема 2. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ симметрически K -субдифференцируема в точке $x \in [a, b]$, тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные верхняя и нижняя симметрические производные: $-\infty < \underline{\widehat{\partial}} f(x) \leq \widehat{\partial} f(x) < +\infty$; при этом

$$\widehat{\partial}_K f(x) = [\underline{\widehat{\partial}} f(x); \widehat{\partial} f(x)].$$

Приведем следствие, которое является обращением теоремы 1.

Следствие 1. Если симметрический K -субдифференциал $\widehat{\partial}_K f(x)$ является одноточечным множеством: $\widehat{\partial}_K f(x) = \{y\}$, то функция f симметрически дифференцируема в точке x , т.е.

$$\widehat{\partial}_K f(x) = \left\{ \widehat{f}'(x) \right\}.$$

Рассмотрим пример, когда $\widehat{\partial}_K f(x)$ не является одноточечным множеством.

Пример 1. Положим $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. В силу теоремы 2, существует симметрический K -субдифференциал $\widehat{\partial}_K f(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Заметим при этом, что, т.к. $\widehat{\partial}_K f(0)$ не является одноточечным, то $f'(x)$ не существует.

Как известно, симметрическая производная является обобщением обычной производной. Покажем, что и симметрический K -субдифференциал является обобщением обычного K -субдифференциала, при этом симметрическая оценка – более точная.

Теорема 3. Если существует K -субдифференциал $\partial_K f(x)$, то существует и симметрический K -субдифференциал $\widehat{\partial}_K f(x)$, причём

$$\widehat{\partial}_K f(x) \subset \partial_K f(x).$$

Одним из наиболее важных свойств как обычного K -субдифференциала, так и симметрического, является субаддитивность.

Теорема 4. (Субаддитивность). Пусть $f, g : \mathbb{R} \rightarrow E$, где E – произвольное вещественное отделимое ЛВП. Если отображения f и g симметрически K -субдифференцируемы в точке x , то отображение $f + g$ также симметрически K -субдифференцируемо в точке x , причём

$$\widehat{\partial}_K(f + g)(x) \subset \widehat{\partial}_K f(x) + \widehat{\partial}_K g(x).$$

Перейдем к теореме о среднем для симметрического K -субдифференциала. Здесь мы рассмотрим случай банахова пространства E .

Теорема 5. (Теорема о среднем). Если отображение $f : [a, b] \rightarrow E$ непрерывно на $[a, b]$ и симметрически K -субдифференцируемо на (a, b) , то выполняется оценка:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in (a, b)} \left(\sup \|\widehat{\partial}_K f(x)\| \right) \cdot (b - a).$$

Отметим полезное следствие

Теорема 6. Пусть пространство E удовлетворяет свойству Радона-Никодима [2]. Если отображение $f : [a, b] \rightarrow E$ непрерывно на $[a, b]$ и ограничено симметрически K -субдифференцируемо на (a, b) , то f почти всюду дифференцируемо на $[a, b]$ в обычном смысле.

Замечание 1. Напомним, что класс банаховых пространств, обладающих свойством Радона-Никодима, достаточно широк. Для отображений в

такие пространства, в условиях последней теоремы, симметрическая K -субдифференцируемость может отличаться от обычной дифференцируемости лишь на множестве меры нуль.

Автор выражает признательность проф. И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — 34. — С. 121–138. (English translation in: J. Math. Sc., 2010, Vol. 170, Issue 2, pp 251–269.)
- [2] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Предельная форма свойства Радона - Никодима справедлива в любом пространстве Фреше* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — 37. — С. 55–69. (English translation in: J. Math. Sc., 2012, Vol. 180, Issue 6, pp 731–747.)
- [3] Стонякин Ф. С. *Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала* // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". — 2009. — № 850. — С. 11–21.
- [4] Орлов И. В., Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам.* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — в печ.
- [5] Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* — М.: ФМ, 1961. — 936 С.

Семейства коммутирующих неограниченных измеримых самосопряженных операторов, присоединенные к коммутативной алгебре фон Неймана

Белялова Фериде Рустамовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: feride-95@mail.ru

В работе рассматриваются семейства коммутирующих измеримых самосопряженных операторов, присоединенные к коммутативной алгебре фон Неймана, область определения которых состоит из одной точки $\{0\}$.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть H - гильбертово пространство, а $B(H)$ - алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H .

*-Подалгебра $M \subseteq B(H)$, содержащая тождественный оператор I , и замкнутая в слабой операторной топологии, называется алгеброй фон Неймана. Заметим, что если

$$M' = \{S \in B(H) : TS = ST \text{ для любого } T \in M\},$$

коммутант алгебры фон Неймана M , то она удовлетворяет равенству

$$M'' = M,$$

которое, в свою очередь, является характеристическим.

Определение 1. *Линейное подпространство D в H называется присоединенным к алгебре фон Неймана M ($D \eta M$), если $U(D) \subseteq D$ для каждого унитарного оператора $U \in M'$.*

Определение 2. *Линейный оператор T с областью определения $D(T)$, действующий в гильбертовом пространстве H , называется присоединенным к алгебре фон Неймана M ($T \eta M$), если $UT \subseteq TU$ для каждого унитарного оператора $U \in M'$.*

Определение 3. *Линейное подпространство $D \subseteq H$ называется сильно плотным в H относительно алгебры фон Неймана M , если $D \eta M$ и существует последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ такая, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subseteq D$ и P_n^{\perp} является конечным проектором для каждого $n = 1, 2, \dots$.*

Определение 4. *Замкнутый линейный оператор T , действующий в гильбертовом пространстве H , называется измеримым относительно алгебры фон Неймана M , если $T \eta M$ и область определения $D(T)$ оператора T сильно плотна в H .*

Теорема 1. *Множество $S(M)$ всех измеримых относительно алгебры фон Неймана M операторов является *-алгеброй над полем \mathbb{C} с единичным элементом I относительно операций сильной суммы и сильного произведения ($\overline{T+S} = \overline{T} + \overline{S}$, $\overline{TS} = \overline{T} \cdot \overline{S}$) и операции перехода к сопряженному оператору.*

2. КОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА

Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с полной локально конечной мерой μ , и пусть $H = L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для каждой функции $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ определим линейный оператор T_f на H равенством:

$$T_f(g) = fg, \quad g \in H.$$

Тогда: 1). Множество $\mathcal{M} = \{T_f : f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)\}$ является коммутативной алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, такой что $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Более того, отображение $\phi : L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \rightarrow \mathcal{M}$, задаваемое равенством: $\phi(f) = T_f$, является *-изоморфизмом из $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ на \mathcal{M} ;

2). Функционал $\tau : \mathcal{M}_+ \rightarrow [0, \infty]$, определяемый как

$$\tau(T_f) = \int_{\Omega} f d\mu,$$

является точным нормальным полуконечным следом на \mathcal{M}_+ ;

3). Для каждой коммутативной алгебры фон Неймана \mathcal{N} существует измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с полной локально конечной мерой μ такое, что \mathcal{N} *-изоморфна алгебре фон Неймана $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, т.е. можно считать, что \mathcal{N} действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ и что

$$\mathcal{N} = \{T_f : f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)\} = \mathcal{M}.$$

Пусть $\mathcal{M} \cong L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ – коммутативная алгебра фон Неймана всех измеримых ограниченных комплекснозначных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, m) с полной локально конечной мерой m . Будем считать, что алгебра фон Неймана \mathcal{M} действует в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega, \Sigma, m)$ по правилу $T(f)(\omega) = T(\omega)f(\omega)$, где

$$T \in \mathcal{M} \cong L_\infty(\Omega, \Sigma, m), \quad f \in H, \quad \omega \in \Omega.$$

В этом случае коммутант \mathcal{M}' совпадает с \mathcal{M} .

Обозначим через $S(\Omega, \Sigma, m)$ *-алгебру всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на (Ω, Σ, m) . Для каждой функции $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$ положим:

$$D(f) = \{g \in H : fg \in H\}.$$

Ясно, что $D(f)$ – всюду плотное линейное подпространство в H . Определим линейный оператор $T_f : D(f) \rightarrow H$, полагая $T_f(g) = fg$. В следующем утверждении дается описание *-алгебры

$$S(\mathcal{M}) \cong S(L_\infty(\Omega, \Sigma, m)).$$

Утверждение 1. 1). Оператор T_f принадлежит $S(\mathcal{M})$ для каждой функции $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$.

2). Для каждого оператора $T \in S(\mathcal{M})$ существует единственная функция $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$ такая, что $T = T_f$.

3. СЕМЕЙСТВО КОММУТИРУЮЩИХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ИЗМЕРИМЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОБЩАЯ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОТОРЫХ СОСТОИТ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ $\{0\}$.

Пример 1. Пусть $(\Omega, \Sigma, m) = ([0, 1], \Sigma, dt)$ — пространство Лебега, $H = L_2([0, 1], dt)$, $\mathcal{M} \cong L_\infty([0, 1], dt)$ и $S(\mathcal{M}) \cong S(L_\infty([0, 1], dt))$. Для каждого оператора $T_f \in S(\mathcal{M})$, $f \in S(L_\infty([0, 1], dt))$ область определения равна

$$D(T_f) = \left\{ g \in H : \int_0^1 |fg|^2 dt < \infty \right\}.$$

Ясно, что алгебра $S(\mathcal{M})$ — коммутативная.

Утверждение 2. $\bigcap_{f \in S(L_\infty([0, 1], dt))} D(T_f) = \{0\}$.

Доказательство. Допустим, что существует такая функция $g_0 \in H = L_2([0, 1], dt)$, принадлежащая $\bigcap_{f \in S(L_\infty([0, 1], dt))} D(T_f)$ и удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 |g_0(t)|^2 dt = \varepsilon < \infty.$$

Рассмотрим последовательность $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ такую, что

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < 1$$

и

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} |g_0(t)|^2 dt = \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot 1_{[t_{k-1}, t_k]}.$$

Тогда

$$\int_0^1 |f_0(t)g_0(t)|^2 dt = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \infty,$$

т.е. $g_0 \notin D(T_{f_0})$ и потому $g_0 \notin \bigcap_{f \in S(L_\infty([0,1], dt))} D(T_f)$. Таким образом,

$$\bigcap_{f \in S(L_\infty([0,1], dt))} D(T_f) = \{0\}. \quad \square$$

Автор выражает благодарность профессору кафедры математического анализа Муратову Мустафе Абдурешитовичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Segal, Irving E. A non-commutative extension of abstract integration./Segal, Irving E.// Ann. Math. —57(1953). — P. 401–457.
- [2] Strătilă, Şerban. Lectures on von Neumann algebras./Strătilă, Şerban; Zsidó, László.// Editura Academiei, Bucharest; Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979. 478 pp.
- [3] Муратов М. А. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. /Муратов М. А., Чилин В. И. — Праці Ін-т. Матем. НАН України. — Київ. — 2007. - 389 с.
- [4] Косяк А. В. О семействах коммутирующих самосопряженных операторов. /Косяк А. В., Самойленко Ю. С. — Укр. мат. журн. — 31(1979). —№5 — с. 555-558.

Методическое пособие по курсу «Теория меры и интеграла»

Гуляй Нелли Станиславовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: nelli.virgo@mail.ru

В работе описаны основные характеристики подготовленного методического пособия по курсу «Теория меры и интеграла» для студентов третьего курса факультета математики и информатики специальности «Математика».

Методическое пособие было разработано с использованием учебных пособий [1], [2], а также учебника [3].

Данное методическое пособие по курсу «Теория меры и интеграла» предназначено для использования на практических занятиях для студентов специальности 040201 «Математика» третьего курса. В нем раскрываются основные темы, такие как:

- (1) «Элементы теории множеств»;
- (2) «Борелевские множества»;
- (3) «Мера Лебега в R^n »;
- (4) «Множества канторовского типа»;

- (5) «Интеграл Лебега»;
 (6) «Интеграл Лебега – Стильеса».

Пособие состоит из двух разделов: «Теория меры» и «Теория интеграла», содержащих, соответственно, темы (1) – (4) и (5) – (6). Каждый раздел включает в себя:

- теоретический минимум по лекциям курса, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы;
- наборы задач (15 – 20) по каждой из тем;
- подробные планы практических занятий по каждой из тем, включающие решения типовых задач.

Разработанное методическое пособие по курсу «Теория меры и интеграла» предназначено для проведения практических занятий, организации самостоятельной работы, текущего и итогового модульного контроля знаний студентов. Заметим, что наборы задач, представленные в методическом пособии, позволяют легко формировать практические задания для проведения модульного контроля по данному курсу.

Приведём, в качестве примера, подробный план практического занятия по теме «Интеграл Лебега».

Практическое занятие по теме: Интеграл Лебега

Вычислить интеграл Лебега на отрезке от $[a, b]$ или доказать, что он расходится.

- (1) Задачи: ряд исследуется по признаку сходимости.

Задача № 1

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \setminus K, n \in \mathbb{N} \\ t^{10}, & t \in K, \\ t \cos t^2 & t \in \left(1; \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$$

$$(L) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt - ?$$

Решение

- 1) Упрощение функции:

$$mK = 0;$$

$$f(t) \cong \begin{cases} \sqrt{n}, & \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}; \\ t \cos t^2, & t \in \left(1; \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$$

- 2) Задача корректна: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

3) Разбиение интеграла:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} dt + \int_1^{\frac{\pi}{2}} t \cos t^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \int_1^{\frac{\pi}{2}} t \cos t^2 dt =: \Sigma + I_1;$$

4) $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)}$ - сходится, т.к. по признаку сравнения в предельной форме:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 < \infty.$$

$$5) I_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} t \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\pi}{2}} t \cos t^2 d(t^2) = \frac{1}{2} \sin t^2 \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi^2}{4} - \sin 1).$$

$$6) I = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi^2}{4} - \sin 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)}, \text{ где ряд сходится.}$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi^2}{4} - \sin 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)}, \text{ где ряд сходится.}$$

Задача № 2

$$f(t) = \begin{cases} (-n)^n, & t \in \left[-\frac{1}{n!}, -\frac{1}{(n+1)!} \right) \setminus K, n \in \mathbb{N} \\ \sin t, & t \in K, \\ \cos \pi t & t \in [-2; -1] \end{cases}$$

$$(L) \int_{-2}^0 f(t) dt - ?$$

Решение

1) Упрощение функции:

$$mK = 0;$$

$$f(t) \cong \begin{cases} (-n)^n, & t \in \left[-\frac{1}{n!}, -\frac{1}{(n+1)!} \right); \\ \cos \pi t, & t \in [-2; -1] \end{cases}$$

2) Задача корректна:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(n+1)!} \right) = 0.$$

3) Разбиение интеграла:

$$I = \int_{-2}^0 f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{n!}}^{-\frac{1}{(n+1)!}} (-n)^n dt + \int_{-2}^{-1} \cos \pi t dt =: \Sigma + I_1;$$

$$4) \Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n \left(-\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n \cdot \left(\frac{-1+(n+1)}{n!(n+1)!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n \cdot \frac{n}{(n+1)!} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

По признаку сходимости Коши (используя формулу Стирлинга):

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{n^n \cdot n}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{n+1}{e}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{en}{n+1} = e > 1$$

ряд расходится, следовательно: I - расходится.

Ответ: I - расходится.

(2) Задачи: ряд - геометрическая прогрессия ($n \in \mathbb{N}$).

$f(t) = \begin{cases} t \ln t, & t \in [0, \frac{4}{5}] \setminus K, \\ (-1)^n, & t \in [1 - \frac{1}{5^n}, 1 - \frac{1}{5^{n+1}}] \setminus K \\ \arctgt, & t \in K \end{cases}$ $(L) \int_0^1 f(t) dt - ?$	$f(t) = \begin{cases} (-1)^n 2^{\frac{n}{2}}, & t \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}) \setminus K \\ \arctgt, & t \in K, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & t \in ([-1, 0] \cup [\frac{1}{2}, 1]) \setminus K \end{cases}$ $(L) \int_{-1}^1 f(t) dt - ?$
--	--

(3) Задачи: ряд - смешанная прогрессия.

$f(t) = \begin{cases} n, & t \in (\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}) \setminus K, n \in \mathbb{N} \\ [e^{t^2}], & t \in K, \\ \frac{1}{\sqrt{1+t}}, & t \in ([-1, 0] \cup (\frac{1}{3}, 1)) \setminus K \end{cases}$ $(L) \int_{-1}^1 f(t) dt - ?$	$f(t) = \begin{cases} n, & t \in (\frac{2}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^n}) \setminus K, n \in \mathbb{N} \\ \frac{t+1}{t^2+1}, & t \in [\frac{2}{3}, \sqrt{2}]K, \\ e^t, & t \in K \end{cases}$ $(L) \int_0^{\sqrt{2}} f(t) dt - ?$
--	--

(4) Задачи: ряд возникает с помощью "целой части".

$f(t) = \begin{cases} [\frac{1}{\sqrt{t}}], & t \in (0, 1) \setminus K, \\ [\frac{1}{t}], & t \in K, \\ (\cos t) \cdot e^{\sin t}, & t \in [-1, 0) \end{cases}$ $(L) \int_{-1}^1 f(t) dt - ?$	$f(t) = \begin{cases} [\frac{1}{t}], & t \in [0, 1] \setminus K, \\ e^t, & t \in K, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}} - 2, & t \in (1, 2] \end{cases}$ $(L) \int_0^2 f(t) dt - ?$
---	--

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Антонец А. Б., Радьно Я. В. *Функциональный анализ и интегральные уравнения: лабораторный практикум*: Учеб. пособие, - Минск: БГУ, - 2003 - С. 179.
- [2] Сторож О. Г. *Задачи з теорії міри та функціонального аналізу*. - Львів, Видавець І. Чижиков - 2011 - С. 149.
- [3] Березанський Ю. М. *Функціональний аналіз*. - Київ, «Вища школа» - 1990 - С. 600.

Влияние нестандартных уроков на мотивацию изучения математики учениками 8-ых классов средних школ

Жирова Екатерина Сергеевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: catherinelas2008@yandex.ru

В статье на примере проведенного урока-соревнования производится сравнение активности учеников на стандартных и нестандартных уроках. Проанализированы плюсы и минусы нестандартных уроков, и обоснована полезность их проведения. Затронута проблема активизации деятельности учеников на уроках. Обоснованы полезность и необходимость проведения в средней школе нестандартных уроков.

Процесс обучения — процесс двухсторонний. Для успеха обучения требуется высокое качество работы учителя и активная деятельность учащихся. Даже самый талантливый учитель не сможет обучить ученика без его желания и интереса к обучению. Увеличение умственной нагрузки на уроках математики заставляет задуматься над тем, как поддержать у учащихся интерес к изучаемому материалу. Необходимо строить уроки так, чтобы каждый ученик работал активно и увлеченно. Немаловажную роль в этом играет проведение нестандартных уроков. Важный вопрос, волнующий каждого школьного учителя: «Как сделать уроки интересными, нескучными, запоминающимися?» Именно этот вопрос я задала себе первым после проведения уроков математики в 8 классе средней школы. В данной статье кратко излагаются мысли, к которым я пришла, пытаясь ответить на этот вопрос.

Идея провести нестандартный урок возникла у меня после прочтения книги Людмилы Михайловны Чернокужниковой «Нестандартные уроки. Математика. 5-10 класс» [4]. К нестандартным урокам можно отнести: деловые игры, урок-соревнование, урок-практикум, пресс-конференция, урок-защита творческих проектов и другие. После консультации с преподавателем математики, для проведения итогового урока на закрепление знаний и умений по темам: множества чисел, квадратные корни и квадратные уравнения, был выбран урок-соревнование.

Учеников заранее предупредили о проведении итогового занятия по этим темам. Класс превратился в три команды с капитанами во главе. По условиям соревнования разрешалось коллективно обсуждать вопросы, но отвечать на новый вопрос должен был по очереди каждый участник команды. Ответы

на вопросы принимались как устно, так и письменно. Предлагались задания разного характера, а именно: 1. Практические — извлечение квадратных корней и решение квадратных уравнений [1, 3]; 2. Теоретические — на внимание и знание истории математики [2]. Оценивание ответов проводилось по трехбалльной системе. От команд требовалась скорость и точность реагирования на вопросы. При ошибках в ответах баллы снижались.

К недостаткам уроков данного типа можно отнести следующее: выкрики с мест; неудовлетворенность тем, что с команды сняли баллы за якобы неправильный ответ; не дали ответить, выбрав другого члена команды; попытки ответить на все задания одними и теми же учениками; нежелание работать в команде с неуспевающими учениками.

Недостатки при проведении командной игры связаны с новизной и непривычной структурой урока. Для их устранения учителю необходимо:

1. Провести обязательный предварительный инструктаж с учениками по структуре нестандартного урока и правилам поведения на нем.

2. За нарушение этих правил предусмотреть дополнительный практический вопрос каждому ученику-нарушителю по указанным темам.

3. Учитывать активность всех членов команды, например, присваивать титул «Самая сплоченная команда», что дает дополнительные преимущества при подведении итогов.

Достоинствами проведенного нестандартного урока являлось то, что знающие ученики быстрее находили ответы, чем на стандартном уроке; члены команд учились вместе находить решения и вовремя озвучивать их; многих учеников увлекла командная игра, они с удовольствием делились своими мнениями и предложениями.

Считаю, что нестандартные уроки следует использовать в основном как итоговые при обобщении и закреплении знаний, умений и навыков учеников. Нет необходимости слишком часто обращаться к таким формам организации учебного процесса из-за их времязатратности. На таких уроках школьники не только получают и закрепляют знания, но и учатся работать в коллективе, привыкают к нормам общения. Определяют свое отношение к математике, друг к другу и учителю. Каждый урок-игра производит неизгладимое впечатление на учеников и надолго запоминается, что способствует более прочному закреплению темы урока. В процессе игры школьники учатся сосредотачиваться, мыслить самостоятельно, развивать внимание и стремление к знаниям. Даже самые пассивные ученики включаются в игру, стараются не подводить своих товарищей, что позволяет повысить общую успеваемость в классе.

Нестандартные уроки очень хорошо дополняют традиционные уроки. Их проведение в процессе обучения оживляет его, делает интересным и занимательным. Нетрадиционные уроки — это не развлечение, а вид творческой деятельности, тесно связанный с другими формами учебной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бевз Г. П. *Алгебра. Пробный учебник для 7-9 классов средней школы.* — К.: Освіта, — 1998. — 319 с.
- [2] Болгарский Б. В. *Очерки по истории математики.* — 2-е изд., испр. и доп. — Мн.: Выш. школа, — 1979. — 368 с., ил.
- [3] Ершова А. П., Голобородько В. В., Ершова А. С. *Решения к сборнику "МАТЕМАТИКА". Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 8 класса.* — Харьков: Моби Дик, — 2003. — 240 с.
- [4] Чернокижничкова Л. М. *Нестандартные уроки. Математика. 5-10 класс.* — М.: АРК-ТИ, — 2010. — 110 с.

Упрощение Плюккерových координат прямой с помощью параллельного переноса репера.

Закирья Билял Мутолипович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ГРУППА 402-М)
 e-mail: 0992727692@mail.ru

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве E_3 , отнесенном к реперу $T = \{0, \vec{e}_i\}$, дана прямая L , координатами двух своих точек

$$A(a_1; a_2; a_3) \in L, B(b_1; b_2; b_3) \in L.$$

По паре точек A, B можно построить [1] шесть однородных плюккерových координат q_{ij} прямой $AB \equiv L$ [2]. При этом шесть чисел q_{ij} удовлетворяют Фундаментальному Условию Плюккера [3]

$$q_{12}q_{34} - q_{13}q_{24} + q_{14}q_{23} = 0. \quad (1)$$

Перейдём от исходного репера T к новому реперу T^* с помощью параллельного переноса

$$\begin{cases} x = x^* + a, \\ y = y^* + b, \\ z = z^* + c. \end{cases} \quad (2)$$

репера T на вектор $\vec{Q} = \{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}\}$. При этом в новом репере T^* та же самая прямая AB будет иметь новые плюккеровы координаты q_{ij}^* . Можно показать, что новые q_{ij}^* выражаются через параметры $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ параллельного переноса и шесть старых плюккеровых координат q_{ij} по формулам (3):

$$\begin{aligned} q_{12}^* &= q_{12} - bq_{14} + aq_{24}, \\ q_{13}^* &= q_{13} - cq_{14} + aq_{34}, \\ q_{14}^* &= q_{23} - cq_{24} + bq_{34}, \\ q_{23}^* &= q_{23}, \quad q_{24}^* = q_{24}, \quad q_{34}^* = q_{34}. \end{aligned} \quad (3)$$

Потребуем от трёх параметров $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ параллельного переноса, чтобы

$$q_{12}^* = q_{13}^* = q_{14}^* = 0. \quad (4)$$

Тогда из (4) и трёх условий (3) получим следствия:

$$\begin{cases} aq_{24} - bq_{14} = -q_{12}, \\ aq_{34} - cq_{14} = -q_{13}, \\ bq_{34} - cq_{24} = -q_{23}. \end{cases} \quad (5)$$

В зависимости от значений q_{ij} для решения системы (5) будут возможны только пять различных случаев:

1°	2°	3°	4°	5°
$q_{14} \neq 0$	$q_{14} = 0$ $q_{34} \neq 0$	$q_{14} = 0$ $q_{34} = 0$ $q_{24} = 0$	$q_{14} = 0$ $q_{34} = 0$ $q_{13} = 0$ $q_{24} = 0$	$q_{14} = 0$ $q_{34} = 0$ $q_{13} = 0$ $q_{24} \neq 0$

Рассмотрим подробно каждый из этих пяти случаев.

Случай 1°

При $q_{14} \neq 0$ в системе трёх уравнений (5) линейно независимыми будут только два. При $q_{14} \neq 0$ решение системы (5) можно представить в виде:

$$a = \forall, \quad b = \frac{aq_{24} + q_{12}}{q_{14}}, \quad c = \frac{aq_{34} + q_{13}}{q_{14}}.$$

Вершины всех реперов $T^*(a)$ лежат на прямой L_1 .

$$L_1 : \begin{cases} x = a, \\ y = \frac{q_{24}}{q_{14}}a + \frac{q_{12}}{q_{14}}, \\ z = \frac{q_{34}}{q_{14}}a + \frac{q_{13}}{q_{14}}. \end{cases}$$

a -параметр, $-\infty < a < +\infty$.

Вектор $\vec{q}_1 = \left\{1; \frac{q_{24}}{q_{14}}; \frac{q_{34}}{q_{14}}\right\}$ — направляющий вектор прямой L_1 .

Случай 2°

Если же $q_{14} = 0$ и $q_{34} \neq 0$, тогда:

$$a = -\frac{q_{13}}{q_{34}}, \quad b = \frac{-q_{23} + cq_{24}}{q_{34}}, \quad c - \forall.$$

Вершины всех реперов $T^*(c)$ будут лежать на одной прямой, которая будет задаваться параметрическими уравнениями:

$$L_2 : \begin{cases} x = -\frac{q_{13}}{q_{34}}, \\ y = \frac{-q_{23} + cq_{24}}{q_{34}}, \\ z = c. \end{cases}$$

c -параметр, $-\infty < c < +\infty$.

Вектор $\vec{q}_2 = \left\{0; \frac{q_{24}}{q_{34}}; 1\right\}$ — направляющий вектор прямой L_2 .

Случай 3°

При $q_{14} = 0$ система (5) примет вид:

$$\begin{cases} aq_{24} = -q_{12}, \\ aq_{34} = -q_{13}, \\ bq_{34} - cq_{24} = -q_{23}, \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) будет совместной только при:

$$\begin{vmatrix} q_{24} & q_{12} \\ q_{34} & q_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е., при

$$q_{24}q_{13} - q_{12}q_{34} = 0. \quad (7)$$

Условие (7) сейчас является тождеством. А оно совпадает с ФУП (1) при $q_{14} = 0$. При $q_{34} = 0$ и $q_{24} = 0$ решение системы (6) будет иметь вид:

$$q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{23} = q_{24} = q_{34} = 0.$$

Случай одновременного обращения всех шести плюккерových координат в ноль невозможен. Т.е. случай 3° невозможен.

Случай 4°

При $q_{34} = 0$ и $q_{13} = 0$ система (6) примет вид:

$$\begin{cases} aq_{24} = -q_{12}, \\ cq_{24} = q_{23}. \end{cases} \quad (8)$$

Т.к. сейчас ещё и $q_{14} = 0$, $q_{24} = 0$, то из (8) вытекает, что $q_{12} = q_{23} = 0$, т.е. все шесть плюккерových координат $q_{ij} = 0$, а случай одновременного обращения всех шести плюккерových координат в ноль невозможен. Т.е. случай 4° невозможен.

Случай 5°

Для 5° решение системы (5) можно представить в виде:

$$a = -\frac{q_{12}}{q_{24}}, \quad b = \forall, \quad c = \frac{q_{23}}{q_{24}}.$$

А это означает, что вершины всех реперов $T^*(b)$ опишут прямую L_5 :

$$L_5 : \begin{cases} x = -\frac{q_{12}}{q_{24}}, \\ y = b, \\ z = \frac{q_{23}}{q_{24}}. \end{cases}$$

b —параметр, $-\infty < b < +\infty$.

Вектор $\vec{q}_5 = \{0; 1; 0\}$ — направляющий вектор прямой L_5 .

Вывод: Для любой исходной прямой L , заданной своими плюккерowymi координатами q_{ij} в исходном репере T , всегда можно с помощью параллельного переноса (2) построить такой новый репер T^* , в котором будет:

$$\begin{aligned} q_{12}^* = q_{13}^* = q_{14}^* = 0, \\ q_{23}^* = q_{23}, \quad q_{24}^* = q_{24}, \quad q_{34}^* = q_{34}. \end{aligned}$$

При этом таких новых реперов T^* существует однопараметрическое семейство. Вершины каждого $T^* = \{Q; \vec{e}_i\}$ пробегает прямую L_i .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клейн Феликс «Высшая геометрия». — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. Москва 1939г. — 399с
 [2] Кованцов Н.И. «Теория комплексов». — Издательство киевского университета 1963г. 285с
 [3] Финников С.П. «Теория конгруэнций». — Государственное издательство технико-теоретической литературы, М.: 1950, 528 с.

Дискретизация и локализация пространств Орлича-Лоренца

Кисель Ольга Сергеевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: olya_kisel@mail.ru

В настоящей работе рассматривается симметричное пространство Орлича-Лоренца $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}$ на полуоси $(0, \infty)$ и его "локализация" $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(I)$ и "дискретизация" $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(N)$.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть μ — мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$ и $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(0, \infty)$ пространство всех μ -измеримых почти всюду конечных функций на $(0, \infty)$, $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{(0, \infty)}$ — симметричное пространство измеримых функций на полуоси $(0, \infty)$. Пространству \mathbf{X} однозначно соответствуют симметричное пространство $\mathbf{X}(I) = \mathbf{X}_{(0, 1)}$ измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ и симметричное пространство $\mathbf{X}(\mathbb{N})$ последовательностей, называемые "локализацией" и "дискретизацией" пространства \mathbf{X} .

Определение 1. Локализацией симметричного пространства \mathbf{X} на отрезок I называется симметричное пространство

$$\mathbf{X}|_I = \mathbf{X}(I) = \{g = f \cdot 1_{[0, 1]} : f \in \mathbf{X}\} \quad (1)$$

с нормой

$$\|g\|_{\mathbf{X}(I)} = \|f \cdot 1_{[0, 1]}\|_{\mathbf{X}}. \quad (2)$$

Определение 2. Дискретизацией симметричного пространства \mathbf{X} называется симметричное пространство $\mathbf{X}_{\mathbb{N}}$ последовательностей:

$$\mathbf{X}(\mathbb{N}) = \left\{ a = \{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1_{[n-1, n)} \in \mathbf{X} \right\} \quad (3)$$

с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{X}(\mathbb{N})} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1_{[n-1, n)} \right\|_{\mathbf{X}}. \quad (4)$$

Симметричное пространство \mathbf{X} единственным образом определяется по $\mathbf{X}(I)$ и $\mathbf{X}(N)$.

Для функции $f \in \mathbf{L}_{\infty} + \mathbf{L}_1$ определены оператор сужения E_I и оператор математического ожидания E_N , действующие следующим образом:

$$E_I(f) = f_I = f|_{(0,1)}. \quad (5)$$

и

$$E_N(f) = f_N = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{где } a_n = \int_n^{n+1} f(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Оператор E_I отображает положительные функции в положительные, не увеличивает нормы пространств $\mathbf{L}_{\infty}(0, \infty)$ и $\mathbf{L}_1(0, \infty)$ и

$$E_I : \mathbf{L}_{\infty}(0, \infty) + \mathbf{L}_1(0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}_1(0, 1), \quad E_I : \mathbf{L}_{\infty}(0, \infty) \cap \mathbf{L}_1(0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}_{\infty}(0, 1).$$

Аналогично, оператор E_N отображает положительные функции в последовательности положительных чисел, не увеличивает нормы пространств $\mathbf{L}_{\infty}(0, \infty)$ и $\mathbf{L}_1(0, \infty)$ и

$$E_N : \mathbf{L}_{\infty}(0, \infty) + \mathbf{L}_1(0, \infty) \rightarrow \mathbf{l}_{\infty}, \quad E_N : \mathbf{L}_{\infty}(0, \infty) \cap \mathbf{L}_1(0, \infty) \rightarrow \mathbf{l}_1.$$

Пространства $\mathbf{X}(I)$ и $\mathbf{X}(N)$ естественным образом вложены в пространство \mathbf{X} . Вложения $I_I : \mathbf{X}(I) \hookrightarrow \mathbf{X}$ и $I_N : \mathbf{X}(N) \hookrightarrow \mathbf{X}$ определяются равенствами:

$$I_I(f) = f \cdot 1_{(0,1)}, \quad I_N(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 1_{[n, n+1)}. \quad (7)$$

Оба вложения I_I и I_N положительны и оставляют нормы инвариантными. Более того, операторы $E_I \circ I_I$ и $E_N \circ I_N$ тождественны на $\mathbf{X}(I)$ и $\mathbf{X}(N)$ соответственно.

Имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3. Измеримая функция f принадлежит симметричному пространству \mathbf{X} тогда и только тогда, когда $f_I^* \in \mathbf{X}(I)$ и $f_N^* \in \mathbf{X}(N)$.

Утверждение 4. Нормы в пространствах \mathbf{X} , $\mathbf{X}(I)$ и $\mathbf{X}(\mathbb{N})$ связаны неравенствами:

$$\|f_I\|_{\mathbf{X}(I)} \leq \|f\|_{\mathbf{X}}, \quad \|f_N\|_{\mathbf{X}(N)} \leq 2\|f\|_{\mathbf{X}}$$

и

$$\|f\|_{\mathbf{X}} \leq 2 \cdot \|f_I\|_{\mathbf{X}(I)} + \|f_N\|_{\mathbf{X}(N)}.$$

Локальные свойства функции f симметричного пространства \mathbf{X} описываются в терминах пространства $\mathbf{X}(I)$, а поведение на бесконечности — в терминах пространства $\mathbf{X}(N)$.

Норма $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ симметричного пространства \mathbf{X} может удовлетворять различным условиям, например, условия (A) и (B)

Говорят, что в \mathbf{X} норма *порядково непрерывна*, или что в \mathbf{X} выполнено условие (A), если из $\{f_n\} \subset \mathbf{X}$, $f_n \downarrow 0$ следует, что $\|f_n\|_{\mathbf{X}} \downarrow 0$.

Говорят, что в \mathbf{X} норма *монотонно полна*, или что в \mathbf{X} выполнено условие (B), если из $\{f_n\} \subset \mathbf{X}$, $0 \leq f_n \uparrow$, $\sup\|f_n\|_{\mathbf{X}} < \infty$ следует, что существует $f \in \mathbf{X}$, для которого $f_n \uparrow f$.

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА-ЛОРЕНЦА

Нетривиальная функция $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ называется *функцией Орлича*, если Φ — непрерывна слева, неубывающая, выпуклая функция, для которой $\Phi(0) = 0$.

Пространством *Орлича* называется множество

$$\mathbf{L}_\Phi = \{f \in \mathbf{L}_0 : \|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf \left\{ a > 0 : \int_0^\infty \Phi \left(\frac{|f|}{a} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

Возрастающая, вогнутая функция Ψ на $[0, \infty)$ называется *функцией Лоренца*, если $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(x) \neq 0$.

Пространством *Лоренца* называется множество

$$\mathbf{\Lambda}_\Psi = \{f \in \mathbf{L}_0 : \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_\Psi} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_\Psi} = \int_0^\infty f^*(x) d\Psi(x),$$

f^* — убывающая перестановка функции f .

Определение 3. *Пространством Орлича-Лоренца называется множество*

$$\mathbf{L}_{\Phi, \Psi} = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : \|f\|_{\Phi, \Psi} < \infty\},$$

где Φ и Ψ соответственно функции Орлича и Лоренца и

$$\|f\|_{\Phi, \Psi} = \inf \left\{ a > 0, \int_0^\infty \Phi \left(\frac{f^*}{a} \right) d\Psi \leq 1 \right\}.$$

Определение 4. *Локализацией симметричного пространства $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}$ на отрезке $[0, 1]$ называется пространство*

$$\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(I) = \mathbf{L}_{\Phi, \Psi}|_{[0, 1]} = \{f = f \cdot 1_{[0, 1]} : f \in \mathbf{L}_{\Phi, \Psi}\}, \quad (8)$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(I)} = \inf \left\{ a > 0, \int_0^1 \Phi \left(\frac{f^*}{a} \right) d\Psi \leq 1 \right\}. \quad (9)$$

Определение 5. *Дискретизацией симметричного пространства $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}$ называется пространство*

$$\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(N) = \left\{ a = \{a(k)\} \in R^N : \sum_{k=1}^\infty \Phi \left(\frac{a^*(k)}{\lambda} \right) \cdot \Psi'(k) \cdot 1_{[k-1, k)} \in \mathbf{L}_{\Phi, \Psi}, \lambda > 0 \right\},$$

с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(N)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \sum_{k=1}^\infty \Phi \left(\frac{a^*(k)}{\lambda} \right) \cdot \Psi'(k) \cdot 1_{[k-1, k)} \leq 1 \right\}. \quad (10)$$

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}$ — симметричное пространство и $\mathbf{L}_{\Psi, \Phi}(I)$ и $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(N)$ его локализация и дискретизация. Тогда*

- (1). *Пространство $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}$ обладает свойством (A) тогда и только тогда, когда оба пространства $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(I)$ и $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(N)$ обладают свойством (A).*
- (2). *Пространство $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}$ обладает свойством (B) тогда и только тогда, когда оба пространства $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(I)$ и $\mathbf{L}_{\Phi, \Psi}(N)$ обладают свойством (B).*

Автор выражает благодарность профессору кафедры математического анализа Муратову Мустафе Абдурешитовичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красносельский М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича/ М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий. — М. : Физматгиз, 1958. — 278 с.
- [2] Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов/ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М : Наука, 1978. — 400 с.
- [3] Bang H. H. Some properties of Orlicz-Lorentz spaces/ H. H. Bang, N. V. Hong and V. N. Huu.// Acta Mathematica Vietnamica. — 2011. — Vol. 36. — No 2. — P. 145–167.
- [4] Hudzik H. Geometric properties of some Calderon-Lozanovski spaces and Orlicz-Lorentz spaces./ H. Hudzik, A. Kaminska and M. Mastyllo.// Houston J. Math. — 22 (1996). — P. 639-663.
- [5] Kaminska A. Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces/ A. Kaminska.// Math. Nachr. — 147(1990). — P. 29-38.

Методические аспекты разработки учебного пособия по исследованию операций и принятию решений

Крошка Варвара Александровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 500)

В пособии представлен дидактический и методически обработанный систематизированный материал, соответствующий учебной программе по взаимосвязанным дисциплинам “Исследование операций” и “Методы принятия решений”. Кроме традиционных разделов, ориентированных на задачи экономики и управления, выделяются блоки многокритериальной оптимизации, псевдобулевой оптимизации и экстремальных задач на графах прикладного характера в условиях неопределенности.

Целью работы является введение в практику учебного процесса прикладных задач управления, принятия решений социально-экономического характера.

Так, в задачах распределительного характера предполагается, что ограниченный ресурс (например, инвестиции) распределяются между некоторыми проектами с целью достижения максимального экономического эффекта. Критериев для оценки эффекта может быть один или более. В простых случаях решение сводится к задачам выбора и ранжирования. Задача формирования программ или программы из проектов является более сложной и предполагает наличие общей иерархии целей. Такая задача представляется в виде

двухуровневого графа, где на нижнем уровне решаются оптимизационные задачи по выбору каждого из проектов, допустимого для включения в программу, из конечного множества альтернативных проектов. На высшем уровне - решается оптимизационная задача о включении в программу некоторого числа из допустимых отобранных проектов и о начале их реализации. При этом задача может быть поставлена сразу для двух уровней (уровней может быть больше для конкретной иерархической системы). В такой постановке задачи могут быть учтены возможности рефинансирования одних проектов за счет других, ресурсные ограничения, риски и т.п. Решение задачи позволяет достичь совместного эффекта, который недостижим при внедрении каждого проекта в отдельности.

С точки зрения системы поддержки принятия решений (СППР), задач оптимизации (многокритериальных или однокритериальных), возникающих ограничений, информационной составляющей, компьютерной поддержки, рассматриваемые задачи являются, как правило, линейными экстремальными задачами условной оптимизации распределительного типа с булевыми переменными. Для их решения предложены точные и приближенные (эвристические) алгоритмы, например, методы ветвей и границ, динамического программирования и др.

В работе подобраны примеры экономического характера, пригодные для применения имеющихся алгоритмов из пакета Excel. Пособие содержит разнообразные материалы для обучающихся, а также материалы для самоконтроля и контроля.

Методическая разработка на тему: “Тестовый контроль знаний по математике” (для студентов 1 курса колледжа ТНУ)

Курзина Анна Игоревна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: Anyararyadom@mail.ru

Математика - самая древняя наука, игравшая важнейшую роль в жизни и деятельности человека на всех исторических этапах, т.к. людям всегда нужно было что-либо считать и чертить, измерять и вычислять, прогнозировать и проектировать, создавать новое. Многие правила из школьных учебников арифметики и геометрии были известны древним грекам две с лишним тысячи

лет назад. Другие древние народы - египтяне, вавилоняне, китайцы, народы Индии - в третьем тысячелетии до нашего летосчисления имели сведения по геометрии и арифметике, которых не хватает некоторым ученикам пятого или шестого класса. Ведь всюду, где надо что-то считать, измерять, сравнивать, без математики не обойтись. А чем дальше, тем больше и точнее нужно было считать. С каждым десятилетием математика становилась всё нужнее людям. Теперь расчётами и вычислениями приходится заниматься не только самим математикам: и инженеры, и моряки, и строители на каждом шагу сталкивались с вычислениями. Что может математика? Астроному она помогает определить пути далёких звёзд. Инженер с помощью математики рассчитывает реактивный самолёт, корабль или новую электростанцию. Учёному-физику математика открывает законы атомного ядра, а моряку указывает путь корабля в океане. Словом, математика может всё или почти всё там, где нужно что-либо вычислять. С изобретением электронно-вычислительных машин началась новая эпоха в математике и многих других науках. Моя работа посвящена усовершенствованию навыков счета, так как в связи с развитием компьютерных технологий, а как следствие внедрение калькуляторов во все сферы нашей жизни, связанной с какими-либо подсчетами, навыки не развиваются. Умение правильно и быстро выполнять арифметические действия являются главной составляющей математической культуры каждого человека. Некоторые думают: "Зачем считать устно, если для этого есть калькулятор?" Но, во-первых, он не всегда оказывается под рукой. Во-вторых, значение определенных математических закономерностей иногда позволяет опередить умную машину. Наконец, устный счет развивает память, быстроту реакции, вырабатывает умение сосредоточиться. Устному счету уделял большое внимание известный русский деятель в области просвещения, доктор естественных наук, профессор Сергей Александрович Рачинский (1832-1902). Он написал ряд математических пособий. Наибольшую известность среди них приобрела книга "1001 задачи для счета в уме". Всем известно картина Н. П. Богданова-Бельского "Устный счет". На ней изображен С. А. Рачинский со своими учениками. Обратимся к картине. На доске записан пример . Мало, кто сможет быстро вычислить значение этого числового выражения. Мало, кто догадается, что сумма квадратов чисел $10+11+12=13+14$ каждая из двух сумм равна 365, значит значение данного выражения равно 2. Настоящим королем устного счета считали Карла Фридриха Гаусса. Известно, что ему не было и 10 лет, когда он сумел за несколько секунд вычислить сумму 100 таких чисел

$81207+81495+81693+\dots+100899$. Эта задача под силу современному ученику 9 класса, который может найти эту сумму по специальной формуле. Причина, по которой без математических методов сейчас не обходится не только техника, механика, электроника, экономика, но и медицина, экология, психология, социология, лингвистика, история, юриспруденция и др., проста - для математических методов характерны: - четкость формулировок и определений; - использование точных количественных оценок; -логическая строгость; -сочетание индуктивного и дедуктивного подходов; -универсальность. Использование математических методов формирует так называемый математический стиль мышления, т.е. абстрактный, логический, идеально строгий и - самое главное - нацеленный на поиск закономерностей. Профессионал, грамотно и аккуратно применяющий математические методы, способен принести пользу в любой сфере деятельности. При изучении математики осуществляется развитие интеллекта школьника, обогащение его методами отбора и анализа информации. Преподавание любого раздела математики благотворно сказывается на умственном развитии учащихся, поскольку прививает им навыки ясного логического мышления, оперирующего четко определенными понятиями. Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Ее основные и взаимно противоположные элементы - логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность. Изучение математики также способствует формированию гражданских качеств личности посредством воспитания свойства, которое мы называем интеллектуальной честностью, благотворно сказывается на умственном, нравственном и эстетическом развитии учащихся. Одновременно воспитываются волевые качества личности, без которых невозможно овладение научной теорией, формируются навыки самостоятельной исследовательской работы, наконец, воспитывается интеллектуальная честность, которая не позволяет оперировать сомнительными, не доказанными со всей необходимой строгостью фактами. Причем это относится не только к решению математических задач, но и к другим областям человеческой деятельности, в том числе и к анализу явлений общественно-политической жизни. Математическое образование из внешнего по отношению к ученику процесса обучения трансформируется в собственно познавательный процесс. Только совместные действия этих полярных начал и борьба за их синтез обеспечивают жизнённость, полезность и высокую ценность математической науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б.В. Гнеденко *Математика в современном мире*. - М.: Просвещение, 1990г. - 128 с.

- [2] Е.А. Беляев, В.Я. Перминов *Философские и методологические проблемы математики*, МГУ, 1981, - 214 с.
- [3] Н.И. Жуков *Философские проблемы математики*, Минск, 1977, - 95 с.
- [4] К.Л. Костюченко *Математика и ее приложения в социально-правовой сфере (учебное пособие)*.

Свободные модули конечного типа над кольцом с делением

Лемешенко Мария Николаевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА АЛГЕБРА И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 401-М)

e-mail: mariya.lemeshenko@mail.ru

Конечномерные линейные пространства над полем являются хорошо изученным объектом в математике, их свойства многократно обсуждаются в основных учебных курсах по специальности "математика". Однако достаточно востребованными являются аналоги этих понятий над кольцами более общего типа: кольцом целых чисел и телом кватернионов. Цель настоящей работы — построить теоретическую базу, позволяющую работать с этими математическими объектами.

1. Модули: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть R — кольцо, M — аддитивная абелева группа.

Определение 1. M называется левым R -модулем, если задано отображение $R \times M \rightarrow M$, которое для $\alpha \in R, x \in M$ обозначается как αx , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\forall \alpha, \beta \in R \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- 2) $\forall \alpha \in R, x, y \in M \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
- 3) $\forall \alpha, \beta \in R, x \in M \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
- 4) Если R — кольцо с 1, то $\forall x \in R \quad 1 \cdot x = x$.

Аналогично можно дать определение правого модуля, где соответствующее отображение действует из $M \times R \rightarrow M$ и все аксиомы меняются очевидным образом.

Пример 1. Пусть R — кольцо. Рассмотрим множество

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}.$$

как аддитивную абелеву группу относительно покомпонатного сложения, и отображение $R \times R^n \rightarrow R^n$, действующее по следующему правилу

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad \alpha \in R.$$

R^n можно рассматривать как левый модуль над R . Аналогично можно рассмотреть правый модуль R^n .

Если кольцо R является полем, то R -модуль называют линейным пространством над R . Многие свойства линейных пространств обусловлены как раз тем фактом, что кольцо R является полем. В дальнейшем мы рассмотрим те свойства кольца, которые обеспечивают R -модулю многие полезные свойства линейного пространства.

Определение 2. Подмодулем N модуля M называется подмножество модуля M такое, что

- 1) N — подгруппа абелевой группы M ;
- 2) $\forall x \in N, \alpha \in R \quad \alpha x \in N$;

Всякий подмодуль N R -модуля M порождает разбиение этого модуля на смежные классы: $a + N := \{a + x \mid x \in N\}$. Обозначим множество таких смежных классов M/N . На этом множестве можно задать левый R -модуль, если определить следующие операции:

$$(a + N) + (b + N) := (a + b) + N; \quad \alpha(a + N) = \alpha a + N, \quad \alpha \in R.$$

Этот левый R -модуль называется фактор-модулем R -модуля M по подмодулю N .

Определение 3. Гомоморфизмом R -модулей M_1 и M_2 называется такое отображение $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$, что

- 1) $\forall x, y \in M_1 \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- 2) $\forall x \in M_1, \alpha \in R \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

Ядром гомоморфизма φ называется множество $\text{Ker} \varphi := \{x \in M_1 \mid \varphi(x) = 0\}$. Ядро гомоморфизма является подмодулем в M_1 , в то время как образ гомоморфизма $\varphi(M_1)$ — подмодуль в M_2 . При этом имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ — гомоморфизм модулей. Тогда $\varphi(M_1) \simeq M_1 / \text{Ker} \varphi$.

2. СВОБОДНЫЕ МОДУЛИ КОНЕЧНОГО ТИПА

Начиная с этого раздела все рассматриваемые кольца — с единицей.

Определение 4. Пусть M — R -модуль, Q подмодуль в M . Система $S \subset Q$ называется системой порождающих для Q , если любой элемент $x \in Q$ записывается в виде $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$, где $x_i \in S$, $\alpha_i \in R$. В этом случае используют обозначение $Q = \langle S \rangle$. Если порождающее семейство конечно, модуль называется конечнопорожденным или модулем конечного типа.

Если $L = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_R$ — конечномерное линейное пространство над полем R , то в нем существует базис, и любой элемент однозначно выражается через базис. Причем, все базисы содержат одно и то же количество векторов. Однако в случае модуля над кольцом базис есть не всегда, и даже при условии его существования мы не всегда можем гарантировать постоянное количество векторов в базисе. Поэтому далее мы рассмотрим условия, обеспечивающие R -модулю эти полезные свойства.

Определение 5. R -модуль M называется свободным, если в нем существует такая система порождающих e_1, \dots, e_n , что любой элемент $x \in M$ однозначно представляется в виде $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_i \in R$. Эта система порождающих называется свободным базисом.

Пример 2. Так, модуль R^n обладает базисом $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \dots, 1)$, а значит является свободным.

Предложение 1. Если M — свободный модуль над областью целостности или кольцом с делением, то количество элементов свободного базиса есть величина постоянная. Количество этих элементов называется рангом свободного модуля.

Доказательство 1. Предположим, что в модуле есть два свободных базиса:

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \quad y_1, y_2, \dots, y_m.$$

Тогда любой вектор из первого базиса может быть представлен как

$$x_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i, \quad a_{ij} \in R,$$

а любой вектор из второго базиса допускает разложение

$$y_i = \sum_{k=1}^n b_{jk} x_k, \quad b_{jk} \in R.$$

При этом элементы a_{ij} определяют матрицу $A \in M_{m \times n}(R)$, а элементы b_{jk} определяют матрицу $B \in M_{n \times m}(R)$. Подставляя векторы y_i в x_j , получим

$$x_j = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij} b_{jk} x_k,$$

что эквивалентно матричному равенству $E_m = AB$. Так как для матриц над областью целостности или кольцом с делением справедливо неравенство $\text{rang} E \leq \min\{\text{rang} A, \text{rang} B\}$, то $n \leq \min\{m, n\}$. Аналогично можно показать, что $n \leq \min\{m, n\}$, откуда следует, что $m = n$.

Таким образом, если R — область целостности или кольцо с делением, то модуль R^n имеет ранг n . Кроме того, этот пример показывает, что существует свободный модуль любого конечного ранга.

Теорема 2. *Каждый R -модуль конечного типа является гомоморфным образом свободного R -модуля.*

Доказательство 2. Пусть M — R -модуль конечного типа с n порождающими: $M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Рассмотрим свободный модуль $N = R^n$ и построим отображение $\varphi : N \rightarrow M$:

$$\varphi(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N.$$

Нетрудно показать, что отображение φ является гомоморфизмом, и $M = \text{Ran} \varphi$.

Очевидно, верно и обратное утверждение.

Теорема 3. *Любой модуль конечного типа изоморфен фактор-модулю свободного модуля по некоторому подмодулю.*

Доказательство 3. Пусть $M = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — R -модуль конечного типа. Рассмотрим свободный R -модуль ранга n : $S = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Построим гомоморфизм $\varphi : S \rightarrow M$, ставящий в соответствие элементу $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in S$ элемент $\varphi(x) = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \in M$. Поскольку модуль S свободен, то это отображение задано корректно. Так как элементы a_i — порождающие для модуля M , то отображение φ сюръективно. Обозначая $Q := \text{Ker} \varphi$, получаем, что $M \cong S/Q$.

Известно, что из каждой системы векторов n -мерного линейного пространства можно выбрать базис (свободную порождающую систему). Для R -модулей это утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Пример 3. Рассмотрим левый \mathbb{Z} -модуль \mathbb{Z} . Очевидно, что $\text{rang}\mathbb{Z} = 1$. Возьмем различные простые числа p, q . Тогда существуют целые u, v такие, что $pu + qv = 1$. В этом случае для любого $a \in \mathbb{Z}$ имеем $a = (ua)p + (va)q$, откуда $M = \langle p, q \rangle$. Следовательно, p, q — порождающая система, но при этом ни одно из этих чисел не является свободным базисом, так как

$$\{ap \mid a \in \mathbb{Z}\} = p\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}, \quad \{aq \mid a \in \mathbb{Z}\} = q\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}.$$

Напомним, что область целостности R , в которой каждый идеал I является главным, т.е. $I = (a) = \{ra \mid r \in R\}$, называется *кольцом главных идеалов*. Ниже приведем без доказательства два важных утверждения:

Теорема 4. Пусть M — свободный R -модуль ранга n . Если R — кольцо главных идеалов или кольцо с делением, то любой подмодуль этого модуля также является свободным, причем его ранг не превосходит n .

Следствие 1. Любой подмодуль модуля конечного типа над кольцом главных идеалов или кольцом с делением является модулем конечного типа.

Выводы. Так как \mathbb{H} — кольцо с делением, а \mathbb{Z} — кольцо главных идеалов, то \mathbb{H} -модуль \mathbb{H}^n и \mathbb{Z} -модуль \mathbb{Z}^n являются свободными модулями ранга n . Любой подмодуль этих модулей также является свободным, причем его ранг не превосходит n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б. *Курс алгебры*. — 3-е изд. — М. Факториал-Пресс, — 2002. — 544 с.
- [2] Голод Е. С. *Курс лекций по высшей алгебре*. М., — 2003. — 42 с.
- [3] Каш Ф. *Модули и кольца*. — М.: Мир, — 1981. — 367 с.

Обучающая информационная программа «Стереометрия»

Люманова Севиле Ремзиевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 504)

e-mail: sevilya.lyimanova.92@mail.ru

В настоящее время все большее значение приобретает компьютер, как средство коммуникации, а овладение им хотя бы на уровне пользователя, становится одним из условий эффективного участия в социальной жизни. Особенно необходим компьютер для обучения учащихся и должен занять в данном

процессе достойное место. Применение вычислительной техники в учебном процессе открывает новые пути в развитии навыков мышления и умения решать сложные задачи, предоставляет принципиально новые возможности для активизации обучения.

Увеличение умственной нагрузки на уроках математики заставляет задуматься над тем, как поддержать интерес к изучаемому материалу у учащихся, их активность на протяжении всего урока. В связи с этим ведутся поиски новых эффективных методов обучения и таких методических приемов, которые бы активизировали мысль школьников, стимулировали бы их к самостоятельному приобретению знаний. Возникновение интереса к математике у значительного числа учащихся зависит в большей степени от методики ее преподавания, от того, насколько умело будет построена учебная работа.

Программа «Стереометрия» была создана в 1999 году. Данное издание разработано издательством «КОРДИС & МЕДИА» совместно с «Компьютерным Учебным Детским Информационным Центром» («КУДИЦ»). Издание адресовано учащимся старших классов и абитуриентам, а также учителям средних школ. Школьникам электронный учебник-справочник поможет разобраться в основных геометрических понятиях и научиться решать задачи по стереометрии. Издание станет пособием для подготовки к контрольным работам и экзаменам, а также справочником по указанной тематике. Учитель может использовать диск при объяснении нового материала на уроке (на компьютере с видеопроектором) или для контроля уровня знаний учащихся (в компьютерном классе с локальной сетью).

Издание состоит из «Учебника», «Зачета» и встроенного трехмерного редактора чертежей «СtereoКонструктор». «СtereoКонструктор» предназначен для решения задач на построение, а также для создания графических и анимационных иллюстраций для рабочих тетрадей. Сtereoконструктор позволяет создавать анимированные иллюстрации, ничем не уступающие тем, которые включены в Учебник. Анимация состоит из последовательности кадров. С каждым кадром может быть связан тот или иной эффект. При создании анимации пользователь определяет общее количество кадров в анимации, а также начальный и конечный кадр каждого эффекта. Возможны кадры без эффектов.

В распоряжении пользователя есть следующие эффекты:

- появление и исчезновение геометрического объекта;
- масштабирование геометрического объекта;
- вращение геометрического объекта;
- перемещение геометрического объекта;

- мерцание геометрического объекта (с характерным звуком);
- постепенная прорисовка линии (с характерным звуком);
- заливка плоской поверхности (с характерным звуком);
- появление символического обозначения (возможно с характерным звуком);
- голосовое, музыкальное или другое звуковое сопровождение.

В свою очередь, «Учебник» включает в себя: «Теорию», в которой изложены основные сведения по стереометрии (66 тем); дополнительные теоремы, формулы и примеры; а также представлены более 3000 трехмерных интерактивных иллюстраций, «Задачник», в котором содержится подбор типовых задач (более 420), ориентированный на подготовку к выпускным экзаменам в школе и к вступительным экзаменам по математике в ВУЗы. Каждая задача снабжена ссылками на необходимый для ее решения теоретический материал. «Рабочую тетрадь», дающую возможность дополнить материал издания собственными разработками, задачами и их решениями, обменяться ими с коллегами - преподавателями и методистами - через Интернет и подготовить собственное мультимедийное пособие по математике. В разделе «Зачет» предлагается набор задач (количество задач определяет пользователь), который случайным образом формируется из задач по выбранному разделу или по всему курсу. Имеется шкала, отображающая количество выбранных задач, количество решенных и количество правильно решенных задач. При изучении стереометрии многие учащиеся сталкиваются с определенными трудностями. Эти трудности связаны, в частности, и с тем, что в акцент делается на изучение алгебры, изучение стереометрии часто носит ознакомительный характер, она изучается поверхностно, не всегда в полном объеме. В такой ситуации есть возможность передать компьютеру часть функций преподавателя, в частности, путём использования специализированных электронных учебников по стереометрии. Благодаря встроенному в ЭУ Стереоконструктору, существует возможность «разглядеть» чертежи, проанализировать свойства геометрических фигур.

Но учителям также не стоит забывать, что излишнее применение различных моделей фигур на первых уроках стереометрии может привести в дальнейшем к торможению, а не развитию пространственного воображения.

На мой взгляд, одним из основных преимуществ «Стереометрии» является развитие математического, логического мышления и творчества школьников, ведь человеку, занимающему математикой, приходится определять понятия, выяснять связи между ними путём рассуждений, выводить разнообразные формулы, закономерности, правила. То есть без логики и творчества не может быть математики. Учитывая, что геометрия имеет в своём распоряжении

огромный потенциал для развития творчества, а компьютер является мощным методическим средством, позволяющим его усилить за счёт динамических возможностей, возникла необходимость проведения целенаправленной, систематической работы по организации творческой деятельности учащихся с использованием компьютерных технологий. Эту работу можно реализовать путём использования электронного учебника «Стереометрия».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <http://www.cordis.ru>
- [2] <http://www.curator.ru>
- [3] <http://www.allmatematika.ru>
- [4] Программная среда «Образовательная коллекция. Стереометрия 10-11».

Внеклассная работа по математике. Олимпиадные задачи

Мамбетова Ферузе Илимдаровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 504)

e-mail: mamfer@mail.ru

Роль математики в жизни человека, его умственном развитии и становлении личности очень велика. Усвоение программного материала во многом зависит от интереса учащихся к предмету. Поэтому большое внимание уделяется внеклассной работе по математике. С этой целью проводится много различных математических конкурсов, соревнований, олимпиад. Они пользуются большой популярностью как среди учащихся, так и среди учителей.

Олимпиады по математике способствуют расширению математических знаний учащихся, знакомству их с интересными и изящными задачами, порой неожиданными методами их решений. Дух соревнования подталкивает их к максимальному напряжению всех сил при подготовке к олимпиаде и на самой олимпиаде.

При решении многих задач используется логический метод рассуждений — «от противного». В данной статье рассмотрена одна из его форм — принцип Дирихле. Принцип Дирихле и различные его усиления — едва ли не самая частая идея в олимпиадных задачах. Этот принцип утверждает, что если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где $N > n$ то, по крайней мере, в одной части будет более одного элемента.

Принцип назван в честь немецкого математика Дирихле (1805-1859), который успешно применял его к доказательству арифметических утверждений.

По традиции принцип Дирихле объясняют на примере «зайцев и клеток». Для того чтобы применить принцип Дирихле при решении конкретной задачи, необходимо разобраться, что в ней – «клетки», а что – «зайцы».

Самая популярная формулировка принципа Дирихле звучит так:

Формулировка 1. Если в n клетках сидит $n + 1$ или больше зайцев, то найдётся клетка, в которой сидят по крайней мере два зайца.

Доказательство. Противоречие к формулировке звучит так: «в каждой клетке сидит не более одного зайца». Но тогда зайцев, очевидно, не больше, чем клеток. Поэтому есть клетка, где зайцев не менее двух, что и требовалось доказать.

Заметим, что в роли зайцев могут выступать различные предметы и математические объекты — числа, отрезки, места в таблице и т. д.

Принцип Дирихле можно сформулировать на языке множеств и отображений.

Формулировка 2. При любом отображении множества P , содержащего $n + 1$ элементов, в множество Q , содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P , имеющие один и тот же образ.

Несмотря на совершенную очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение. Однако во всех этих задачах часто нелегко догадаться, что считать «зайцем», что — «клеткой», и как использовать наличие двух «зайцев», попавших в одну «клетку». С помощью принципа Дирихле обычно доказываются существование некоторого объекта, не указывая алгоритм его нахождения или построения. Это даёт так называемое неконструктивное доказательство — мы не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть.

Приводимые ниже задачи показывают, что природа «зайцев» и «клеток» в различных задачах может сильно отличаться друг от друга.

Задача 1. В мешке лежат шарики 2-х разных цветов (много белых и много черных). Какое наименьшее количество шариков надо на ощупь вынуть из мешка, чтобы среди них заведомо оказались два одного цвета.

Решение. 3 шарика. Это — просто применение принципа Дирихле: кроликами будут взятые шарики, а клетками — черный и белый цвета. Клеток две, поэтому если кроликов хотя бы три, то какие-то два попадут в одну клетку (будет 2 одноцветных шарика). С другой стороны, взять два шарика мало, потому что они могут быть двух разных цветов.

Задача 2. На краю круглого стола расположены на одинаковом расстоянии друг от друга n флагов стран, за столом сидят n послов этих стран, причём каждый посол сидит рядом с чужим флагом. Доказать, что существует такое вращение стола, после которого хотя бы два посла окажутся рядом с флагом своей страны.

Решение. Существует $n - 1$ способов вращения стола, после каждого из них взаимное расположение флагов и послов изменится. Каждому послу сопоставим вращение, после которого он окажется рядом со своим флагом. Согласно принципу Дирихле при каком-то вращении два (может, и больше) посла окажутся рядом со своим флагом. В решении задачи роль «зайцев» играют, естественно, послы, а роль «клеток» — положения стола при различных вращениях. Посол попадает в «клетку», если при соответствующем этой «клетке» вращении стола он оказывается рядом с флагом своей страны. Таким образом, «клеток» у нас $n - 1$, а «зайцев» — n .

Замечание. Условие о том, что вначале ни один из послов не находится рядом со своим флагом, существенно. На самом деле первоначальное положение также является «клеткой», но эта «клетка» по условию заведомо окажется пустой. Так что можно считать, что всего «клеток» имеется $n - 1$.

В ряде задач применяют следующее обобщение принципа Дирихле. К решению различных задач: в теории чисел, для длин и площадей. Также рассматривают непрерывный принцип Дирихле.

Принцип Дирихле в теории чисел

Задача 3. Дано 11 различных целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 10.

Решение. По крайней мере два числа из 11 дают одинаковый остаток при делении на 10 (принцип Дирихле). Пусть это будут

$$A = 10a + r,$$

$$B = 10b + r.$$

Тогда их разность делится на 10. $A - B = 10(a - b)$.

Многие задачи легко решаются, если в них некоторую величину заменить на определённую чётность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую чётность, невозможны. Иногда эту величину (функцию) надо сконструировать, например, рассмотреть чётность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты в 2 цвета. Чётность в играх — это возможность сохранить чётность некоторой величины при своём ходе. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 4. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

Решение. Назовём марсиан с чётным числом рук чётными, а с нечётным — нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук чётно. Общее число рук у чётных марсиан чётно, поэтому общее число рук у нечётных марсиан тоже чётно. Следовательно, число нечётных марсиан чётно.

Решение такого рода нестандартных задач, в первую очередь могут служить толчком в развитии интереса к предмету и вызвать у учащихся, которые пока не проявляют заметной склонности к математике, желание узнать больше.

Главный же результат олимпиад — создание среди школьников более положительного отношения к математике. Подавляющее большинство школьников, не станут профессиональными математиками, но их помощниками останутся — умение отличить точно поставленный вопрос, видение математической ситуации под не математической оболочкой, умение не поддаваться соблазну ложной учености.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болтянский В.Г. *Шесть зайцев в пяти клетках*. – Ж-л "КВАНТ" 1977, № 2.
- [2] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. *Как решают нестандартные задачи*. – М.: Изд-во МЦНМО, – 2008.
- [3] Успенский В.А. *Простейшие примеры математических доказательств*. – М., 2009.

Разработка методического материала для практического занятия по высшей математики для студентов 1-го курса направление подготовки “Химия”

Мартыненко Марина Викторовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ГРУППА 402-М)

e-mail: marina.marine@mail.ru

Цели урока: Закрепить знания учащихся по теме “Числовые ряды”. Решение задач.

Задачи: Обобщить знания учеников о числовых рядах. Закрепить и усовершенствовать навыки решения задач. Провести самостоятельную работу.

План практического занятия.

Организационный момент.

Проверка отсутствующих. Объявление темы и целей урока.

Теоретические вопросы. [1],[2]

- 1) Что называется числовым рядом?
- 2) Что такое сумма ряда? Дать определение сходящегося и расходящегося рядов. Привести примеры.
- 3) В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
- 4) В чем суть признаков Даламбера и Коши?
- 5) В чем суть интегрального признака Коши?

Вопросы по домашней работе.

Решение практических задач.

1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

Ответ: ряд сходится и имеет сумму $1/4$.

2. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$$

Ответ: сходится абсолютно.

3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n+10} + \dots$$

Ответ: расходится.

4. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$$

Ответ: расходится.

5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$$

Ответ: расходится.

6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{n}{3^{n/2}} + \dots$$

Ответ: сходится.

7. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Ответ: сходится.

8. Исследовать сходимость ряда

$$1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

Ответ: расходится.

Домашнее задание.

Пользуясь необходимыми признаками сходимости, доказать расходимость следующих рядов

$$1) \frac{1}{9} + \frac{4}{13} + \frac{9}{17} + \dots + \frac{n^2}{4n+5} + \dots \quad 2) \frac{1}{9} + \frac{2}{19} + \frac{3}{29} + \dots + \frac{n}{10n-1} + \dots$$

$$3) \frac{4}{7} + \frac{7}{12} + \frac{10}{17} + \dots + \frac{3n+1}{5n+2} + \dots \quad 4) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots$$

Проверочная работа.

Первый вариант

$$1) \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{10n} + \dots \quad 2) 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^{n-1}} + \dots$$

$$3) -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots \quad 4) 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \dots$$

Ответы: 1) Расходится; 2) Сходится; 3) Сходится условно; 4) Сходится абсолютно.

Второй вариант.

$$1) \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{10n-2} + \dots \quad 2) 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$$

$$3) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} + \dots \quad 4) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \dots$$

Ответы: 1) Расходится; 2) Сходится; 3) Сходится абсолютно; 4) Расходится.

Подведение итогов.

Резервное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова «Высшая математика в упражнениях и задачах». — Москва "Высшая школа" 1986г. — 415с
 [2] В.А. Подольский, А.М. Суходский, Е.С. Мироненко «Сборник задач по математике». — Москва "Высшая школа" 1999г. — 496с

Краткий обзор современных интерактивных технологий

Минакова Мария Александровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: mochalova91@mail.ru

Работа посвящена обзору современных интерактивных технологий, которые все еще редко используются в нашем государстве, но популярны в странах Европы: «Открытое пространство», виртуальные обучающие среды (Moodle), образовательное программное обеспечение.

Новый государственный стандарт был принят постановлением Кабинета министров Украины №1392 от 23.11.2011 «Про затвердження Державного стандарту базової і повної освіти». Он предъявляет высокие требования к современной школе: уже с первого класса дети изучают английский язык, со второго – информатику, с пятого вводится второй иностранный язык, все это увеличивает нагрузку на ученика. При этом сроки обучения остаются без изменения. Возросший объем информации и жесткие требования к знаниям,

умениям и навыкам школьника – современные условия образовательного процесса. Эти запросы невозможно удовлетворить основываясь только на традиционных методах и средствах педагогических технологий. Необходимы новые подходы к организации обучения, опирающиеся на прогрессивные информационные технологии, в частности, на мультимедиа и интерактивные, которые позволяют сделать урок более насыщенным и интересным.

В данной статье будут рассмотрены популярные в странах Европы, технологии.

1) Технология «Открытое пространство» (в западных источниках – Open Space).

«Открытое Пространство» – это один из методов групповой работы, позволяющий учителю проводить мероприятия для групп от 5 человек. Исходя из 20-летнего опыта применения Ольгой Золотаревой, ведущим тренером-консультантом компании «БЕСТ-Тренинг», в Санкт-Петербургском государственном педагогическом университете стало ясно, что этот метод помогает создать уроки с творческой атмосферой [2]. И, хотя технология «Открытое Пространство» знаменита тем, что в ней отсутствует структура работы, в действительности делает урок структурированным, соответствует потребностям ученика и работе.

2) Виртуальные обучающие среды.

Существует много виртуальных обучающих сред : Learning space, TopClass, CoMentor, Moodle и другие. Остановимся на Moodle, так как данная среда внедряется в Таврическом национальном университете им. В. И. Вернадского. Moodle – это свободная система управления обучением, ориентированная прежде всего на организацию взаимодействия между преподавателем и учениками, хотя подходит и для организации традиционных дистанционных курсов, а так же поддержки очного обучения. Moodle имеет возможности для масштабирования вплоть до нескольких сотен тысяч учащихся, а может использоваться даже для начальной школы или самостоятельного обучения. Так же её используют для создания полностью онлайн-курсов (известное как смешанное обучение).

3) Образовательное программное обеспечение.

Главным назначением данного программного обеспечения (ПО) является обучение или развитие навыков, в зависимости от предмета исследования. Это может быть: игра, тест, среда программирования и так далее. Возрастная аудитория пользователей такого программного обеспечения занимает диапазон от 3 лет и старше. Например, школьное программное обеспечение – это

тип образовательного ПО предназначен для использования в учебных классах. Примером школьного ПО, применимого на уроке информатики, является «Виртуоз школьник» – среда визуального конструирования и выполнения алгоритмов. Построение алгоритма происходит в интерактивном режиме манипулированием его блок-схемой и/или редактированием текста на языке программирования. 4) Интерактивные образовательные среды.

В отличие от рассмотренных выше образовательных ПО – интерактивное позволяет ставить виртуальные эксперименты, и на собственном опыте открывать закономерности и проверять гипотезы. К таким программам можно отнести: программы динамической геометрии (Geonet, GeoGebra, «Математический конструктор»), физические конструкторы (Конструктор виртуальных экспериментов / Crocodile Physics), программы для построения и исследования графиков функций (Advanced Grapher, Algebr). В современной школе, удобно использовать программу — GeoGebra, так как она бесплатна, проста в использовании, многофункциональна, дает наглядное представление о пространственных фигурах, трехмерных графиках, изучаемых в предмете геометрии. GeoGebra – свободно распространяемая динамическая геометрическая среда, которая даёт возможность создавать чертежи в планиметрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки. Кроме того программа выполняет следующие функции: построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и так далее.

Однако предложенные технологии имеют свои недостатки: сложность использования в школах из-за слабой материально-технической базы; кадровый состав школ в основном не обладает навыками работы в данных средах; в зависимости от возрастных особенностей дети не очень ответственны, поэтому могут отвлекаться от заданной темы, используя возможности компьютера. Но также технологии имеют и достоинства: совершенствуют процесс обучения, так как экономят время на уроке (все перечисленные технологии), совершенствуют вычислительные навыки (GeoGebra), делают материал урока более наглядным (GeoGebra, Виртуоз Школьник), дают возможность моделировать жизненные ситуации на уроках математики и информатики (Виртуоз школьник), обучаться в домашних условиях (Moodle), развивают самостоятельность школьника в поиске информации (Moodle).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Селевко Г.К. *Современные образовательные технологии*. – Москва, «Народное образование»— 1998.
- [2] Золотарева О.В. *Что такое технология Open Space ?*. –Санкт - Петербург — 2004.

Обобщение второй теоремы Галуа

Оноприенко Анна Васильевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 401М)

e-mail: anna.oav@mail.ru

В данной работе доказано обобщение второй теоремы Галуа для конечных чисто периодических цепных дробей вида $\alpha = \overline{[q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m]}$.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Определение 1. Дробь вида

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}} = [q_0, \dots, q_n] \quad (1)$$

называется конечной цепной дробью (КЦД).

Определение 2. Дроби вида $\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} := \frac{1}{0}$; $\frac{P_0}{Q_0} := \frac{q_0}{1}$; $\frac{P_k}{Q_k} := [q_0, \dots, q_k]$, $k = \overline{1, n}$ называются подходящими дробями к цепной дроби $[q_0, \dots, q_n]$.

P_k и Q_k определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1}q_k + P_{k-2}, \\ Q_k &= Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Определение 3. Бесконечная цепная дробь $[q_0, q_1, \dots]$ называется чисто периодической, с периодом $s \in \mathbb{N}$, если существуют такие числа $s \in \mathbb{N}$ и $k_0 \geq 0$ — целое, что для любого $k \geq k_0$, $q_{k+s} = q_k$. (Обозначение $\overline{[q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m]}$).

Более подробно о ЦД см., например, [1].

Определение 4. Иррациональное число α , которое является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, называется квадратичной иррациональностью (КИ).

Если α — КИ, то найдутся такие числа $A, B, C \in \mathbb{Z}$ ($A \neq 0, C \neq 0$), что $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$. То есть, α совпадает с одним из чисел $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

Отсюда следует, что число $B^2 - 4AC$ не должно быть точным квадратом. Таким образом, любая КИ α имеет следующий вид $\alpha = \frac{\sqrt{D} + a}{b}$, где $b \neq 0$, $D > 0$ не является точным квадратом.

Число D называется дискриминантом КИ α . ([1], [2]).

Число $\alpha' = \frac{-\sqrt{D} + a}{b}$ — называется алгебраически сопряженным к α .

Теорема 1. (1-ая теорема Галуа). КИ α раскладывается в чисто периодическую бесконечную ЦД тогда и только тогда, когда $\alpha' \in (-1; 0)$, где α' — алгебраически сопряженная величина.

Теорема 2. (2-ая теорема Галуа). Пусть $\alpha = [\overline{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n}]$. Тогда

$$-\frac{1}{\alpha'} = [\overline{q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, q_0}].$$

Доказательство теорем 1 и 2 см. [1], [4]

2. ОБОБЩЕНИЕ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ГАЛУА

Из второй теоремы Галуа следует, что отображение $\alpha \mapsto -\frac{1}{\alpha'}$ переводит ЦД $[\overline{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n}]$ в ЦД $[\overline{q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, q_0}]$.

Пусть $u = [\overline{q_0, \dots, q_n}]$ и $v = [\overline{g_0, \dots, g_m}]$, $n, m \in \mathbb{N}$ произвольные КИ.

Рассмотрим квадратичные иррациональности:

$$\alpha = [\overline{q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m}], \quad (2)$$

$$A = [\overline{q_n, \dots, q_0, g_m, \dots, g_0}]. \quad (3)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. (обобщение второй теоремы Галуа). Квадратичные иррациональности (2) и (3) связаны между собой следующим равенством:

$$A = -\frac{S_m \alpha' + S_{m-1}}{R_m \alpha' + R_{m-1}}, \quad (4)$$

где $\frac{R_m}{S_m}, \frac{R_{m-1}}{S_{m-1}}$ — подходящие дроби к $v = [g_0, \dots, g_m]$.

Покажем теперь, что у α и A дискриминанты совпадают.

Пусть $\alpha = [q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m] = \frac{P_n R_m + P_{n-1} S_m}{Q_n R_m + Q_{n-1} S_m} = \frac{T_{n+m+1}}{W_{n+m+1}}$, где $P_n, Q_n, P_{n-1}, Q_{n-1}$ — подходящие дроби к u , а S_m, R_m — подходящие дроби к v .

Из равенства $\alpha = \frac{\alpha T_{n+m+1} + T_{n+m}}{\alpha W_{n+m+1} + W_{n+m}}$ получаем квадратное уравнение относительно α :

$$\alpha^2(Q_n R_m + Q_{n-1} S_m) + \alpha(Q_n R_{m-1} + S_{m-1} Q_{n-1} - P_n R_m - P_{n-1} S_m) - (P_n R_{m-1} + P_{n-1} S_{m-1}) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения имеет вид:

$$D = (Q_n R_{m-1} + S_{m-1} Q_{n-1} + P_n R_m + P_{n-1} S_m)^2 - 4(-1)^{m+n}. \quad (5)$$

Аналогично для КИ A :

$$\widehat{D} = (P_{n-1} S_m + S_{m-1} Q_{n-1} + P_n R_m + Q_n R_{m-1})^2 - 4(-1)^{m+n}.$$

Следовательно, получаем, что $D = \widehat{D}$.

Вторая теорема Галуа (теорема 2) является частным случаем теоремы 3. Действительно, $\alpha = [\overline{q_0, \dots, q_n}]$, $A = [\overline{q_n, \dots, q_0}]$, период $[g_0, \dots, g_m] = \frac{R_m}{S_m}$ отсутствует. Для него имеем $R_{-1} = 1$, $R_{-2} = 0$, $Q_{-1} = 0$, $Q_{-2} = 1$ подставив эти значения в (4) получим, что $A = -\frac{1}{\alpha'}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть (2) и (3) КИ. $[q_0, \dots, q_n] = \frac{P_n}{Q_n}$, $[g_0, \dots, g_m] = \frac{R_m}{S_m}$. Тогда

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - (\tau_{nm} + \omega_{nm})}{2\eta_{nm}}, \quad (6)$$

$$A = \frac{\sqrt{D} + (\tau_{nm} - \omega_{nm})}{2\xi_{nm}}, \quad (7)$$

где D определяется равенством (5), а

$$\begin{aligned} \tau_{nm} &= S_{m-1} Q_{n-1} - P_n R_m, & \omega_{nm} &= Q_n R_{m-1} - P_{n-1} S_m, \\ \eta_{nm} &= Q_n R_m + Q_{n-1} S_m, & \xi_{nm} &= P_{n-1} R_m + Q_{n-1} R_{m-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $\alpha = \frac{4 + \sqrt{72}}{7} = [\overline{q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m}] = [\overline{1, 1, 3, 1, 1, 1}]$,

где $u = [1, 1]$, $v = [3, 1, 1, 1]$. $\alpha' = \frac{4 - \sqrt{72}}{7}$ — алгебраически сопряженная величина к α . Для v найдем подходящие дроби $\frac{R_3}{S_3} = \frac{11}{3}$ и $\frac{R_2}{S_2} = \frac{7}{2}$. Нам надо найти число A , которое раскладывается в следующую цепную

дробь $A = [\overline{q_n, \dots, q_0, g_m, \dots, g_0}] = [1, 1, 1, 1, 1, 3]$. По формуле (4) получаем

$$A = -\frac{S_3\alpha' + S_2}{R_3\alpha' + R_2} = \frac{6 + \sqrt{72}}{9}.$$

Пример 2. Пусть $\alpha = \frac{1072 + \sqrt{2169728}}{896} = [\overline{q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m}] = [2, 1, 5, 3, 1, 3, 4, 2]$,

где $u = [2, 1, 5, 3, 1]$, $v = [3, 4, 2]$. $\alpha' = \frac{1072 - \sqrt{2169728}}{896}$ — алгебраически сопряженная величина к α . Для v найдем подходящие дроби $\frac{R_2}{S_2} = \frac{29}{9}$ и $\frac{R_1}{S_1} = \frac{13}{4}$.

Нам надо найти число A , которое раскладывается в следующую цепную дробь $A = [\overline{q_n, \dots, q_0, g_m, \dots, g_0}] = [1, 3, 5, 1, 2, 2, 4, 3]$. По формуле (4) получаем

$$A = -\frac{S_2\alpha' + S_1}{R_2\alpha' + R_1} = \frac{911 + \sqrt{2169728}}{1813}.$$

Пример 3. Пусть $\alpha = \frac{436 + \sqrt{1385328}}{911} = [\overline{q_0, \dots, q_n, g_0, \dots, g_m}] =$

$= [1, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 4, 1]$, где $u = [1, 1, 3, 2, 1]$, $v = [3, 1, 2, 4, 1]$.

$\alpha' = \frac{436 - \sqrt{1385328}}{911}$ — алгебраически сопряженная величина к α .

Для v найдем подходящие дроби $\frac{R_4}{S_4} = \frac{59}{16}$ и $\frac{R_3}{S_3} = \frac{48}{13}$. Нам надо найти число A , которое раскладывается в следующую цепную дробь $A = [\overline{q_n, \dots, q_0, g_m, \dots, g_0}] = [1, 2, 3, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 3]$. По формуле (4) получаем

$$A = -\frac{S_4\alpha' + S_3}{R_4\alpha' + R_3} = \frac{804 + \sqrt{1385328}}{1376}.$$

Пример 4. Пусть $\alpha = [1, 1, 2, 3, 1, 1, 1]$, где $u = [1, 1, 2]$, $v = [3, 1, 1, 1]$. Необходимо найти КИ α . По теореме 4 имеем $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{3}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}$, $\frac{R_3}{S_3} = \frac{11}{3}$, $\frac{R_2}{S_2} = \frac{7}{2}$. По формуле (5): $D = 7060$. $\tau_{nm} = -53$, $\omega_{nm} = 15$, $\eta_{nm} = 66$. Тогда, согласно формуле (6) получаем: $\alpha = (\sqrt{7060} + 38)/132$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бухштаб А.А. Теория чисел. — М., Просвещение, —1966.—С. 384.
- [2] Карпенко И.И., Третьяков Д.В. Методическое пособие по теории чисел, часть 2. — Симферополь.—2010.—С. 39.
- [3] Третьяков Д.В. Об одном обобщении уравнения Пелля.— International scientific journal. Spectral and Evolution problems.— Vol.18.— 2008. — pp.141-147.
- [4] Третьяков Д.В. Бесконечные цепные дроби. — Кварк.—№3-4.— Симферополь.—1996.—С. 2-8.

Оператор Лапласа в кватернионном гильбертовом модуле

Осетрова Софья Александровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

e-mail: osetrova_sofiya@mail.ru

В работе проводится спектральный анализ кососамосопряженного оператора Лапласа в гильбертовом кватернионном модуле. Основным результатом является конструкция граничной тройки кососимметрического оператора, относительно которой кососамосопряженный оператор Лапласа является почти разрешимым, и описание спектра этого оператора.

В ряде современных работ по теоретической физике (см. напр, [4]) рассматриваются кососамосопряженные операторы Лапласа в гильбертовом кватернионном модуле. Для спектрального анализа таких операторов разработан аппарат, основанный на методе граничных троек (комплексный аналог этого метода представлен работами [1, 3, 2]). В настоящей работе проводится спектральный анализ конкретного кососамосопряженного оператора Лапласа, иллюстрирующий возможности метода граничных троек в кватернионных модулях.

Пусть \mathbb{H} — тело кватернионов, $L_2([0, 1], \mathbb{H})$ — правый \mathbb{H} -модуль функций, определенных на интервале $[0, 1]$, со значениями в \mathbb{H} и суммируемых со своим квадратом. Заметим, что всякая функция $x(t) \in L_2([0, 1], \mathbb{H})$ может быть представлена в виде

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)i + x_2(t)j + x_3(t)k, \quad \text{где } x_s(t) \in L_2([0, 1], \mathbb{R}).$$

В $L_2([0, 1], \mathbb{H})$ рассмотрим оператор

$$(Ax)(t) = j \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{1}$$

с плотной областью определения

$$\mathfrak{D}(A) = \{x \in W^{2,2}[0, 1] \mid x(0) = x(1) = x'(0) = x'(1) = 0\}. \tag{2}$$

Оператор A^* , сопряженный к оператору A , имеет следующий вид

$$(A^*x)(t) = -j \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \mathfrak{D}(A^*) = W^{2,2}([0, 1], \mathbb{H}). \tag{3}$$

Следовательно, $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(A^*)$ и $A^*x = -Ax$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$. Таким образом, наш оператор A является *кососимметрическим*. Собственное расширение \tilde{A} этого оператора с областью определения

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbf{W}^{2,2}[0, 1] \mid x(0) = x(1); x'(0) = x'(1)\} \quad (4)$$

является, как нетрудно показать, кососамосопряженным. Одним из методов, позволяющих исследовать спектр кососамосопряженных расширений, является метод граничных троек. Задача настоящей работы заключается в том, чтобы показать возможности данного метода применительно к решению спектральной задачи для дифференциального кососамосопряженного оператора в кватернионном модуле.

Определение 1. Пусть A — замкнутый плотно заданный кососимметрический оператор, действующий в гильбертовом \mathbb{H} -модуле H . Тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, состоящая из вспомогательного гильбертова правого \mathbb{H} -модуля \mathcal{H} и линейных отображений $\Gamma_i : D(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 0, 1$, называется **граничной тройкой** для сопряженного оператора A^* , если выполняются следующие два условия:

- (1) $\langle A^*x, y \rangle + \langle x, A^*y \rangle = \langle \Gamma_0x, \Gamma_1y \rangle + \langle \Gamma_1x, \Gamma_0y \rangle$, $x, y \in D(A^*)$;
- (2) Отображение $\Gamma := \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : D(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\Gamma x := \{\Gamma_0x, \Gamma_1x\}$ является сюръективным.

Размерность вспомогательного гильбертова модуля \mathcal{H} определяется размерностью так называемого дефектного подмодуля \mathfrak{N}_q оператора A , соответствующим классу сопряженности $[q] = \{uq\bar{u} \mid u \in \mathbb{H}, |u| = 1\}$, который определяется как

$$\mathfrak{N}_q = (\text{Ran}(A - R_q) \cap \text{Ran}(A - R_{\bar{q}}))^\perp.$$

Напомним, что согласно [5] *дефектные числа* кососимметрического оператора A определяются для вещественных q равенствами

$$n_+ = \dim[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}], q > 0; \quad n_- = \dim[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}], q < 0,$$

Граничная тройка замкнутого плотно заданного кососимметрического оператора A , действующий в гильбертовом \mathbb{H} -модуле H , существует, если этот оператор имеет конечные и равные дефектные числа $n_+ = n_- = n$.

Построенная граничная тройка позволяет наиболее эффективно проводить спектральный анализ собственного расширения в том случае, когда это расширение является почти разрешимым.

Определение 2. Собственное расширение \tilde{A} замкнутого кососимметрического оператора A называется **почти разрешимым**, если существуют

граничная тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ и линейный ограниченный оператор $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ такие, что

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0).$$

Почти разрешимое расширение, которому соответствует оператор B , будем обозначать A_B . В частности, кососамосопряженные расширения кососимметрического оператора являются почти разрешимыми в некоторой (однако не всякой!) граничной тройке.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть A — замкнутый кососимметрический оператор, определяемый равенствами (1), (2), \tilde{A} — его собственное кососамосопряженное расширение, область определения которого задается равенством (4). Тогда граничная тройка для оператора A^* , относительно которой оператор \tilde{A} является почти разрешимым, имеет вид:

$$\mathcal{H} = \mathbb{H}^2, \quad \Gamma_0 x = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(1) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 x = \begin{pmatrix} jx'(0) \\ jx(1) \end{pmatrix} \quad (\forall x \in \mathfrak{D}(A^*)). \quad (5)$$

При этом $D(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Доказательство. Так как в соответствии с формулами (3)

$$\langle A^* x, y \rangle + \langle x, A^* y \rangle = -\overline{y(1)} j x'(1) + \overline{y(0)} j x'(0) + \overline{y'(1)} j x(1) - \overline{y'(0)} j x(0),$$

то непосредственная проверка показывает, что тройка $\{\mathbb{H}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ является граничной тройкой для оператора A^* .

Покажем, что в данной граничной тройке оператор \tilde{A} — почти разрешимое расширение. Действительно, если для $x \in D(\tilde{A})$ $\Gamma_0 x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $x(0) = 1$, $x'(1) = 0$, откуда $x(1) = 1$, $x'(0) = 0$, и тогда $\Gamma_1 x = \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}$. Если же для $x \in D(\tilde{A})$ $\Gamma_0 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то $\Gamma_1 x = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}$. Полученные соответствия доказывают, что $D(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$, где матрица B определяется равенством (6). □

Спектральный анализ почти разрешимого расширения кососимметрического оператора предполагает использование функции Вейля, которая строится непосредственно по выбранной граничной тройке.

Определение 3. Оператор-функция $M(\cdot)$, определенная в граничной тройке $(\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ равенством

$$M(q)\Gamma_0 x_q = \Gamma_1 x_q, \quad x_q \in \mathcal{N}_q,$$

в точках регулярного типа $q \in \pi(A)$, называется функцией Вейля оператора A .

Здесь \mathcal{N}_q — \mathbb{H} -подмодуль дефектного подмодуля \mathfrak{N}_q , который строится следующим образом: пусть $S_q = \mathfrak{N}_q \cap \ker \Gamma_0$, и $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$ — базис в \mathfrak{N}_q/S_q ; тогда $\mathcal{N}_q = \mathbb{H}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Теорема 2. Функция Вейля замкнутого кососимметрического оператора A , определяемого равенствами (1), (2), относительно граничной тройки, построенной в теореме 1, имеет вид

$$M(q) = j \begin{pmatrix} -\mu \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu} & \frac{1}{\cosh \mu} \\ \frac{1}{\cosh \mu} & \frac{\sinh \mu}{\mu \cosh \mu} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Доказательство. Как показывают вычисления, $\mathfrak{N}_q = \mathbb{H}\langle e^{\mu t}, e^{-\mu t}, e^{-j\bar{\mu}t}i, e^{j\bar{\mu}t}i \rangle$. Так как \mathbb{H} -модуль S_q натянут на векторы

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -e^{\mu t} j\bar{\mu}(e^{-\mu} - e^{j\bar{\mu}}) - e^{-\mu t} j\bar{\mu}(e^{\mu} - e^{j\bar{\mu}}) - 2e^{j\bar{\mu}t} \mu sh \mu, \\ a_2(t) &= e^{\mu t} j\bar{\mu}(e^{-\mu} - e^{j\bar{\mu}}) + e^{-\mu t} j\bar{\mu}(e^{\mu} - e^{-j\bar{\mu}}) - 2e^{-j\bar{\mu}t} \mu sh \mu, \end{aligned}$$

то

$$\mathcal{N}_q = \mathbb{H}\langle e^{\mu t}, e^{-\mu t} \rangle.$$

Поэтому если $\Gamma_0 x_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $x_q = e^{\mu t} x_1 + e^{-\mu t} x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$, то согласно формулам (5) $\Gamma_1 x_q = j \begin{pmatrix} -\mu \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu} \\ \frac{1}{\cosh \mu} \end{pmatrix}$. Если же $\Gamma_0 x_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то $\Gamma_1 x_q = j \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh \mu} \\ \frac{\sinh \mu}{\mu \cosh \mu} \end{pmatrix}$. Отсюда на основании определения 3 что функция $M(q)$ определяется равенством (7). \square

Как известно, $\sigma_p(A_B)$ совпадает со множеством нулей определителя матрицы

$$M(q) - B = j \begin{pmatrix} \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu} & \frac{1}{\cosh \mu} - 1 \\ \frac{1}{\cosh \mu} - 1 & \frac{\sinh \mu}{\mu \cosh \mu} \end{pmatrix},$$

который задается равенством

$$\det(M(q) - B) = \frac{2(1 - \cosh \mu)}{\cosh \mu}.$$

Поэтому точечный спектр оператора A_B определяют корни уравнения

$$\cosh \mu = 1.$$

Так как спектр кососамосопряженного оператора чисто мнимый, то можно в данном уравнении положить $\mu = j\lambda$, $\lambda > 0$. Тогда относительно новой переменной последнее уравнение принимает вид

$$\cos \lambda = 1.$$

Решения этого уравнения описывают все классы $[j\lambda]$ собственных значений кососамосопряженного оператора A_B .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Albeverio, J. Brasche, M. Malamud, H. Neidhardt. Inverse Spectral Theory for Symmetric Operators with Several Gaps: Scalar-Type Weyl Functions // University Bonn SFB 611, Preprint no. 166(2004).
- [2] V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Mathematics and its Applications (Soviet Series) 48, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.
- [3] V. A. Derkach, M. M. Malamud, Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps, J. Funct. Anal. **95** (1991), 1 — 95.
- [4] Stefano De Leo, Gisele Ducati. Quaternionic differential operators// arXiv:math-ph/0005023 v3 8 Aug 2002.
- [5] Карпенко И.И. Дефектные подмодули кососимметрических операторов в \mathbb{H} -модулях// ТВИМ.-№2.-с.42-46.

Система массового обслуживания $M/M/1$ с отключением прибора

Османова Алие Рустемовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: osmanov35@mail.ru

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим систему массового обслуживания $M/M/1$, где первая буква M в этих обозначениях соответствует тому, что входящий поток пуассоновский,

λ — его интенсивность. Вторая буква M означает, что обслуживание экспоненциальное, μ — интенсивность обслуживания, 1 — одна линия обслуживания. Пока есть заявки наша система работает, но как только их обслуживание заканчивается линия отключается на случайное время α . Если включившись через случайное время α , линия не обнаруживает новых заявок, то она опять отключается. Но если, в то время когда линия была отключена, в ней накопились заявки, то после включения начинается их обслуживание. Тем не менее, новые заявки могут проявлять нетерпение и покидать систему, не дождаввшись начала обслуживания. При этом, время пребывания каждой «нетерпеливой» заявки — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром γ .

Требуется найти стационарные характеристики этой системы. Состояния системы обозначим двумя индексами — (i, k) . Первый индекс отображает действия нашей системы. То есть, если: 1) $i = 2$, то система работает и идет обслуживание заявок; 2) $i = 1$, то система отключена и накапливаются заявки; 3) $i = 0$, система отключена и не поступают заявки. Вторым индексом показывает: при $i = 2$, количество заявок сидящих в очереди; при $i = 1$, количество заявок ждущих включения системы, чтобы начать обслуживаться; при $i = 0$, количество отключений до того момента пока не появится хотя бы одна заявка.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

Пусть $\{P_{ik}\}$ — стационарная вероятность нахождения системы в состоянии (i, k) . Обозначим через $P_{i\bullet} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{in}$, при $i = 0, 1, 2$. Составим диаграмму переходов состояний для нашей задачи:

Диаграмма позволяет нам наглядно описать переходы системы из одного состояния в другое. Считая, что система находится в состоянии равновесия и с помощью построенной диаграммы, составим уравнения баланса:

I=2:

$$\begin{aligned}
 P_{21}(\lambda + \mu) &= P_{22}\mu + P_{11}\alpha \\
 P_{22}(\lambda + \mu) &= P_{23}\mu + P_{12}\alpha + P_{21}\lambda \\
 P_{23}(\lambda + \mu) &= P_{24}\mu + P_{13}\alpha + P_{22}\lambda \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{2n}(\lambda + \mu) &= P_{2(n+1)}\mu + P_{1n}\alpha + P_{2(n-1)}\lambda \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

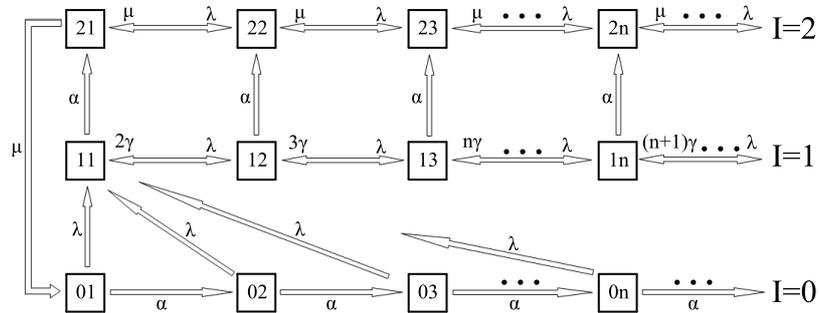


Рис. 1. Диаграмма переходов системы

I=1:

$$\begin{aligned}
 P_{11}(\lambda + \alpha) &= \lambda P_{0\bullet} + P_{12}2\gamma \\
 P_{12}(\lambda + \alpha + 2\gamma) &= P_{11}\lambda + P_{13}3\gamma \\
 P_{13}(\lambda + \alpha + 3\gamma) &= P_{12}\lambda + P_{14}4\gamma \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{1n}(\lambda + \alpha + n\gamma) &= P_{1(n-1)}\lambda + P_{1(n+1)}(n+1)\gamma \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

I=0:

$$\begin{aligned}
 P_{01}(\lambda + \alpha) &= P_{21}\mu \\
 P_{02}(\lambda + \alpha) &= P_{01}\alpha \\
 P_{03}(\lambda + \alpha) &= P_{02}\alpha \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{0n}(\lambda + \alpha) &= P_{0(n-1)}\alpha \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Введем производящие функции:

$$G_i(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{in}z^n$$

Средняя длина очередей в системе в состояниях при $i = 1, 2$:

$$G'_i(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_{in} = L_i,$$

а $G'_0(1)$ – среднее количество отключений линии до начала очередного периода занятости.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Проведя некоторые преобразования с известными нам уравнениями баланса (1)-(3), мы найдем производящие функции стационарного распределения $\{P_{ik}\}$ для каждой $i = 0, 1, 2$:

$$G_0(z) = \frac{\mu z P_{21}}{(\alpha(1-z) + \lambda)}$$

$$G_1(z) = \left(\int_0^z \left(P_{11} + \frac{\lambda P_{0\bullet}}{\gamma} \right) K_1(z) - \frac{\lambda P_{0\bullet}}{\gamma} K_2(z) \right) e^{\frac{\lambda}{\gamma} z (1-z)},$$

где $K_1(z) := \int_0^z (1-t)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{-\frac{\lambda}{\gamma} t} dt$, $K_2(z) := \int_0^z (1-t)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} e^{-\frac{\lambda}{\gamma} t} dt$.

$$G_2(z) = \frac{\alpha G_1(z) - \alpha P_{1\bullet}}{\lambda(1-z) + \mu \left(1 - \frac{1}{z} \right)}$$

Среднее количество отключений при $i = 0$:

$$L_0 = \frac{\lambda + \alpha}{\lambda} \cdot P_{0\bullet},$$

а средняя длина очереди для линий $i = 1, 2$ будет выглядеть так:

$$L_1 = \frac{\lambda(P_{0\bullet} + P_{1\bullet}) + \gamma P_{11}}{\gamma + \alpha},$$

$$L_2 = \frac{\alpha G_1''(1)(-\lambda + \mu) + 2\alpha\mu G_1'(1)}{2(-\lambda + \mu)^2},$$

где $G_1''(1) = \frac{2\lambda}{1 + \gamma + \alpha} \cdot \frac{\lambda(P_{0\bullet} + P_{1\bullet}) + \gamma P_{11}}{\gamma + \alpha}$, а $G_1'(1) = L_1$. Обозначим через

$b := \frac{K_2(1)}{K_1(1)} - 1 > 0$, тогда:

$$P_{11} = \frac{\lambda}{\gamma} P_{0\bullet} b,$$

$$P_{21} = \frac{\alpha}{\mu} P_{1\bullet},$$

$$P_{0\bullet} = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{\alpha(1+b) + \lambda}{\alpha + \lambda} \right)^{-1},$$

$$P_{1\bullet} = 1 - P_{0\bullet} - P_{2\bullet},$$

$$P_{2\bullet} = 1 - \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{\alpha(1+b) + \lambda}{\alpha + \lambda} \right)^{-1}.$$

Формула для $P_{1\bullet}$ вытекает из условия

$$P_{0\bullet} + P_{1\bullet} + P_{2\bullet} = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клейнрок Л. *Теория массового обслуживания*. М. Машиностроение, 1976. – 214 с.
 [2] Robert V.Cooper *Introduction to Queueing theory*. North-Holland, 1983. – 347p.

Колебания вязкоупругого стержня

Полицук Алла Владимировна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: stef56@mail.ru

В данной работе для задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка специального вида, описывающего динамику многих вязкоупругих систем, найдено явное представление для решения. Это решение выражается через собственные элементы и собственные значения главного оператора.

В гильбертовом пространстве H рассматривается задача Коши вида:

$$u'' + Au - \alpha \int_0^t e^{-b(t-s)} A u ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (1)$$

где A — оператор с дискретным спектром, $\alpha, b > 0, 1 - \alpha/b > 0$.

Эта задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus H \oplus H$:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi + F(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (2)$$

где оператор \mathcal{A} имеет вид :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \beta^{1/2}\alpha^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & \gamma^{1/2}\beta^{-1/2} \\ -I & 0 & 0 \\ -\gamma^{1/2}\beta^{-1/2} & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{1/2}\alpha^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\xi = (w; v; v_1)^\tau \in \mathcal{H} \mid w \in \mathcal{D}(A^{-1/2}), v + \gamma^{1/2}\beta^{-1/2} v_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})\},$$

$$\xi = (w; v; v_1)^\tau, \quad \xi^0 = (u^1; \beta^{1/2}\alpha^{1/2}u^0; 0)^\tau, \quad F(t) := (f(t) - b^{-1}e^{-bt}\alpha Au_0; 0; 0)^\tau.$$

Относительно оператора A имеет место лемма.

Лемма 1. *Оператор A является максимальным диссипативным.*

Основываясь на этой лемме и общей теореме о разрешимости (см. [3]) для задач вида (2) формулируется следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\xi^0 \in \mathcal{D}(A)$, $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$, тогда решение задачи (2) существует и единственно.*

Далее изучаются спектральные свойства оператора A . Доказывается, что спектр оператора A — дискретный, состоит из трёх серий собственных значений, а система собственных элементов является полной в \mathcal{H} . Далее, решение $\xi(t)$ задачи (2) представляется в виде ряда по системе собственных элементов оператора A . Из этого представления находятся формулы для решения исходной задачи Коши (1). Это решение имеет вид:

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

$$C(t)v := \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{p=1}^3 \left\{ \frac{e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\beta g'_k(\lambda_k^{(p)}) (\lambda_k^{(p)})^2} + \frac{1 - e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k \lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})} \right\} \left(\frac{\alpha}{b} e^{-bt} \right) \right] (v, u_k)_H u_k,$$

$$S(t)v := \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \sum_{p=1}^3 \left\{ \frac{e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k \lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})} \right\} \right] (v, u_k)_H u_k,$$

где $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных элементов и собственных значений оператора A ,

$$g_k(\lambda) = \left(1 - \frac{\alpha}{b}\right) \frac{1}{\alpha} + \lambda \lambda_k^{-1} - \frac{\alpha}{b(b-\lambda)},$$

$\lambda_k^{(p)}$ ($k \in \mathbb{N}, p = 1, 2, 3$) — решения уравнений $g_k(\lambda) = 0$, ($k \in \mathbb{N}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильюшин А.А. *Основы математической теории термовязкоупругости*. — М.: Наука, 1970. — 283 с.
- [2] Козин В.М. *Прикладные задачи динамики ледяного покрова*. — М.: «Академия Естественных наук», 2008. — 356 с.
- [3] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

Применение компьютерных технологий на уроках стереометрии

Прудникова Наталья Владимировна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: prudnikova91@mail.ru

Работа посвящена обзору современных компьютерных технологий, которые могут быть использованы учителями математики на уроках по стереометрии.

Совершенствование мира вокруг нас влечет за собой совершенствование образования. Обучение в наши дни практически невозможно без использования современных технологий. В частности, это касается и уроков математики, причем в большей степени при объяснении тем по стереометрии. Геометрия дает необходимые каждому человеку пространственные представления, знакомит с разнообразными пространственными формами и законами их восприятия.

Особенностью решения задач на построение в стереометрии является то, что здесь нет чертежных инструментов, которые позволяют изобразить пространственные фигуры. Нам приходится иметь дело не с самими объектами, а лишь с их проекциями на плоскости. Преобразование трехмерных тел в их двумерные проекции и решение соответствующих задач требует от учащихся больших усилий, чем при решении планиметрических задач.

Программа по стереометрии предполагает более быстрый темп прохождения материала, чем в планиметрии. При этом времени на решение каждой отдельной задачи требуется гораздо больше, соответственно значительное место занимает самостоятельная работа школьников. Поэтому необходимо тщательно подбирать задания и включать только самые необходимые.

Одна из основных задач стереометрии — научить школьников изображать объемные объекты на плоскости и строить их сечения. Однако во время преподавания в средней школе можно столкнуться с тем, что учащиеся не только не могут построить сечение многогранника, но даже мысленно представить это. Для преодоления этой сложности необходима наглядная демонстрация решения задачи.

Для наглядного представления требуемого построения широко используются информационные компьютерные технологии (далее ИКТ). А поскольку многие школы, даже сельские, уже обеспечены мультимедийными досками и проекторами, то знакомство учащихся с определенной темой при помощи презентаций не должно составить особых трудностей, но будет зависеть

от того, насколько хорошо учитель знаком с компьютерными технологиями. Для демонстрации материала удобно использовать программное обеспечение Microsoft Office PowerPoint, OpenOffice Impress либо любую программу для создания презентаций. А для построения моделей можно использовать специальные программные средства, например: «Живая геометрия», GeoGebra, Winggeom, которые являются бесплатными.

«Живая геометрия» — это набор инструментов, который предоставляет все необходимые средства для построения чертежей и их исследования; программа позволяет «оживлять» чертежи, плавно изменяя положение исходных точек. GeoGebra — динамическая геометрическая система, в которой можно делать построения с помощью точек, векторов, отрезков, прямых, а также задавая их функционально. Winggeom является геометрической программой и предназначена для создания точных, аккуратных, перемещающихся чертежей (2D-моделирование), трехмерных моделей (3D-моделирование) и моделей неевклидовой геометрии (сферической и гиперболической).

Также при изучении задач по стереометрии можно воспользоваться электронным учебником-справочником «Стереометрия. 10-11 класс». Издание состоит из «Учебника» и встроенного трехмерного редактора чертежей «Стереоконструктор». В свою очередь, «Учебник» включает в себя: «Теорию», в которой изложены основные сведения по стереометрии в объеме курса геометрии 10-11 классов средней школы, дополнительные теоремы, формулы и примеры для углубленного изучения каждой темы, а также более 3000 трехмерных интерактивных иллюстраций как к основному, так и к дополнительному учебному материалу; «Задачник», в котором содержится подбор типовых задач, ориентирован на подготовку к выпускным экзаменам в школе и к вступительным экзаменам по математике в ВУЗы. Каждая задача снабжена ссылками на необходимый для ее решения теоретический материал. Но использование данного справочника затрудняется тем, что его нет в свободном доступе, он является платным (примерно 450 гривен), выпущен в России и не адаптирован под программу, утвержденную МОН Украины.

Из программного обеспечения, созданного в Украине, соответствующего учебной программе и являющимся бесплатным, стоит отметить программно-методический пакет GRAN, разработанный Национальным педагогическим университетом им. М. П. Драгоманова (Киев). Пакет состоит из программ GRAN, GRAN-2D, GRAN-3D и обеспечивает поддержку изучения математики (планиметрии, стереометрии, тригонометрии, алгебры и начала анализа, начала теории вероятностей и математической статистики), а также отдельных разделов физики в школе.

На основании рассмотренных в данной статье примеров ИКТ можно с уверенностью утверждать, что применение компьютера и различных специальных программных средств на занятиях в средней школе позволит оптимизировать учебный процесс, повысить его эффективность, будет способствовать развитию интереса учащихся к изучению математики, а также в значительной мере облегчит работу учителя. Использование презентаций и специальных программ на уроке значительно экономит время, благодаря чему можно изложить больший объем информации, который будет легче усваиваться школьниками. Но выбор программного обеспечения значительно обширен, и поэтому требуются дополнительные исследования полезности применения в учебном процессе тех или иных программных комплексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жалдак М.І., Вітюк О.В. *Комп'ютер на уроках геометрії. Посібник для вчителів.* – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, – 2000.
 [2] Смирнова И.М. *Педагогика геометрии.* – М: Прометей, – 2004.

Роль теоремы Фробениуса в конструкции вещественной алгебры кватернионов \mathbb{H}

Савчин Татьяна Богдановна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА АЛГЕБРА И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 401-М)
 e-mail: sav-chin@mail.ru

1. АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ

Рассмотрим один из способов конструкции вещественной алгебры с делением, которая являлась бы естественным расширением алгебры комплексных чисел. Для этого на векторном пространстве \mathbb{R}^4 выберем базис $1, i, j, k$ и зададим на нем операцию умножения следующим образом: 1 — нейтральный элемент относительно умножения, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Далее распространим эту операцию на остальные элементы алгебры в соответствии с дистрибутивным законом умножения относительно сложения и свойством операции умножения на скаляр в вещественной алгебре:

$$pq = (p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot i + p_2 \cdot j + p_3 \cdot k)(q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k) =$$

$$= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i + \\ + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)k.$$

В результате мы получили вещественную некоммутативную алгебру с единицей 1. Отображение $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$, для всякого $z \in \mathbb{C}$, $z = p_0 + p_1i$, определяемое равенством

$$\varphi(z) := (p_0, p_1, 0, 0) \in \mathbb{H},$$

является вложением вещественной алгебры комплексных чисел в вещественную алгебру кватернионов.

Покажем, что построенная алгебра является алгеброй с делением. Для этого дополнительно введем операцию сопряжения: сопряженным к кватерниону $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ называют кватернион $\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$. При этом $q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \geq 0$, $q\bar{q} = 0 \Leftrightarrow q = 0$, что позволяет ввести норму кватерниона q : $\|q\| := q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$. Тогда очевидно, что любой ненулевой элемент обратим, так как

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = 1.$$

Таким образом, мы действительно построили вещественную ассоциативную (но не коммутативную!) алгебру с делением, которая является расширением алгебры комплексных чисел. Эту алгебру называют алгеброй кватернионов и обозначают \mathbb{H} .

Далее мы рассмотрим два вопроса:

1. можно ли было построить расширение алгебры комплексных чисел так, чтобы получить *коммутативную* ассоциативную алгебру с делением?

2. существуют ли другие ассоциативные алгебры с делением, являющиеся расширением алгебры комплексных чисел?

2. АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ НАД \mathbb{R} И \mathbb{C}

Предложение 1. *Рассмотрим общие положения конструкции алгебры над полем. Пусть \mathbb{F} – поле, A – ассоциативная \mathbb{F} -алгебра, $\dim[A : \mathbb{F}] = n$.*

Любое поле \mathbb{F} можно рассматривать как алгебру над \mathbb{F} , определяя умножение на скаляр как обычную операцию умножения элементов поля. Причем, это ассоциативная и коммутативная алгебра с делением размерности 1. Заметим также, что можно говорить о каноническом вложении алгебры \mathbb{F} в \mathbb{F} -алгебру A : $\alpha \in \mathbb{F} \mapsto \alpha \cdot 1 \in A$. Таким образом, элементы поля \mathbb{F} можно рассматривать как элементы алгебры A , а само поле \mathbb{F} как подалгебру в A . Следовательно, поле \mathbb{F} является алгеброй с делением над \mathbb{F} . Существуют

ли другие ассоциативные и коммутативные алгебры с делением над \mathbb{F} ? Ответ на этот вопрос для алгебры \mathbb{R} дает теорема Фробениуса. Предварительно сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Множество $A' = \{u \in A \mid u^2 \in \mathbb{R}, \quad u^2 \leq 0\}$ — линейное подпространство в A .

Лемма 2. $A = \mathbb{R} \dot{+} A'$.

Теорема 1. (Фробениуса) Над полем \mathbb{R} существует три конечномерные ассоциативные алгебры с делением: \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{H} .

Доказательство 4. Пусть A — ассоциативная \mathbb{R} -алгебра с делением, $\dim[A : \mathbb{R}] < \infty$.

1) Если $A = \mathbb{R}$, то утверждение доказано.

2) Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Согласно лемме $A = \mathbb{R} \dot{+} A'$, при этом $A' \neq 0$. Следовательно, существует $i \in A' : \quad i^2 = -1$.

2.1. Пусть $A' = \alpha i \mid \alpha \in \mathbb{R}$, т.е. $A' = \mathbb{R}i$. Тогда $A = \{\alpha_1 + \alpha_2 i \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, т.е. $A \cong \mathbb{C}$.

2.2. Пусть $A' \neq \mathbb{R}i$. В линейном подпространстве A' можно ввести билинейную форму $(u, v) := u^2 + v^2 - (u+v)^2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, $(u, v) = -uv - vu$ — вещественная билинейная форма в A' . Причем, $(u, u) = -2u^2 \geq 0$, и $(u, u) = -2u^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Следовательно, (u, v) — это скалярное произведение в A' .

Если $A' \neq \mathbb{R}i$, то существует $j \in A' : \quad j^2 = -1, \quad (j, i) = 0$. Это означает, что $ij + ji = 0, \quad ij = -ji$.

Обозначим через $k := ij$. В этом случае $k^2 = ijij = -iijj = -1$, $ki = iji = -iij = j$, $ik = -j$, т.е. $ki = -ik$, откуда следует, что $(k, i) = 0$. Кроме того, так как $jk = -kj = i$, то $(k, j) = 0$. Следовательно, векторы i, j, k образуют ортогональную систему в A' .

2.2.1. Если $A' = \{\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \mid \alpha_t \in \mathbb{R}\}$, то $A = \{\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \mid \alpha_t \in \mathbb{R}\}$, т.е. $A \cong \mathbb{H}$.

2.2.2. Если $A' \neq \mathbb{R}i \dot{+} \mathbb{R}j \dot{+} \mathbb{R}k$, то существует элемент $l \in A' : l \perp i, j, k$. Тогда с одной стороны, $(l, k) = -lk - kl = 0$, и $lk = -kl$. А с другой стороны, $lk = l(ij) = (li)j = -(il)j = -i(lj) = i(jl) = (ij)l = kl$. Откуда следует равенство $lk = 0$, что противоречит определению алгебры с делением.

Таким образом, поля \mathbb{R} и \mathbb{C} являются единственными конечномерными вещественными ассоциативными и коммутативными алгебрами с делением. А алгебра кватернионов \mathbb{H} является единственной конечномерной вещественной ассоциативной, но некоммутативной алгеброй с делением.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАТЕРНИОНОВ НАД ПОЛЕМ

Еще один важный аспект использования теоремы Фробениуса для алгебры кватернионов заключается в описании множества подполей в этой алгебре.

Пусть \mathbb{F} — поле в \mathbb{H} , являющееся расширением поля \mathbb{R} . Тогда мы можем рассматривать поле \mathbb{F} как \mathbb{R} -алгебру, причем, $\dim[\mathbb{F} : \mathbb{R}] > 1$. Так как \mathbb{F} есть коммутативная и ассоциативная алгебра с делением, то из теоремы Фробениуса следует, что $\dim[\mathbb{F} : \mathbb{R}] = 2$, $\mathbb{F} \simeq \mathbb{C}$.

Следовательно, всякое поле в \mathbb{H} однозначно определяется принадлежностью к нему некоторого не вещественного кватерниона. Пусть $q \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$. Запишем этот кватернион в векторной форме: $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$. Тогда $\vec{q} := q_1i + q_2j + q_3k = q - q_0 \in \mathbb{F}$. Пусть $f := \frac{1}{|\vec{q}|}\vec{q}$ — нормированная векторная часть кватерниона $q \in \mathbb{F}$. Заметим, что $f^2 = -1$, $\bar{f} = -f$. Кроме того, кватернионы с нулевой вещественной частью (чисто мнимые кватернионы) можно отождествлять с трехмерными векторами. В частности, $\vec{q} \cdot \vec{p} = -(\vec{q}, \vec{p}) + [\vec{q}, \vec{p}]$.

Векторы $1, f$ линейно независимы над \mathbb{R} , и, следовательно, образуют базис \mathbb{R} -алгебры \mathbb{F} . Достроим этот базис до базиса в \mathbb{H} следующим образом. Выберем чисто мнимый нормированный кватернион ε так, чтобы $(\varepsilon, f) = 0$. Тогда $(f\varepsilon)^2 = -1$, и $f\varepsilon = [f, \varepsilon] \perp f, \varepsilon$. Следовательно, $f, \varepsilon, f\varepsilon$ — ортонормированная система в \mathbb{R}^3 , и $1, f, \varepsilon, f\varepsilon$ — базис в \mathbb{H} .

Тогда для любого кватерниона $q \in \mathbb{H}$ имеет место разложение

$$q = q_0 + q_1f + q_2\varepsilon + q_3f\varepsilon = (q_0 + q_1f) + (q_2 + q_3f)\varepsilon = u_1 + u_2\varepsilon, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{F}.$$

Такое разложение называют представлением кватерниона относительно поля \mathbb{F} . Это представление позволяет свести многие задачи над телом кватернионов к задачам над соответствующим полем.

Таким образом, мы показали, как общая теория алгебраических структур отвечает на важные вопросы, связанные с конструкцией конкретных алгебр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В.И. *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов*. М., — 2002. — 40 с.
- [2] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. Изд-во "Наука" М., — 1973. — 320 с.
- [3] Конвей Дж., Смит Д. *О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях*. Пер. с англ. С.М. Львовского.-М., — 2009. — 184 с.

Неравенство треугольника в математике

Смоленская Евгения Сергеевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 504)

e-mail: 4smolenskaya4@mail.ru

1. Классическое неравенство треугольника

Неравенство треугольника — один из важнейших геометрических фактов. Являясь одним из свойств расстояния, данное неравенство помогает в решении непростых геометрических и текстовых задач.

Неравенство треугольника в геометрии, функциональном анализе, а также смежных дисциплинах — одно из интуитивных свойств расстояния. Формулировка неравенства треугольника хорошо известна: **Длина любой стороны треугольника всегда не превосходит сумму длин двух его других сторон.**

Неравенство треугольника применяется во многих задачах. Его используют как в элементарной геометрии, так и для решения олимпиадных задач, также неравенство треугольника применяют и в высшей математике. Рассмотрим пример, который иллюстрирует школьные задачи, в которых применяется неравенство треугольника.

Пример 1. *Длина стороны AC треугольника ABC равна $3,8$, длина стороны AB — $0,6$. Известно, что длина стороны BC — целое число. Какова это длина?*

Решение: Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}$$

Подставляя известное, получаем:

$$\begin{cases} 0,6 < 3,8 + BC \\ 3,8 < 0,6 + BC \\ BC < 0,6 + 3,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC > -3,2 \\ BC > 3,2 \\ BC < 4,4 \end{cases}$$

Так как BC — целое число, то $BC = 4$.

2. Решение олимпиадных задач

Неравенство треугольника часто используют при решении школьных олимпиадных задач. Рассмотрим примеры таких задач.

Пример 2. В некоторой стране расположены 4 города: A, B, C, D . Два самолета одновременно вылетели из города A . Маршрут первого самолета: $A - B - D - C - A - D - B - C - A$, а маршрут второго: $A - B - C - D - A - B - C - D - A - B - C - D - A$. Какой из самолетов раньше закончит свой маршрут, если их скорости одинаковы?

Решение: Рассмотрим разность между расстояниями, которое пролетели самолеты. Через P и Q обозначены длины маршрутов первого и второго самолета соответственно.

$$\begin{aligned} P - Q &= (AB + BD + DC + CA + AD + DB + BC + CA) - (AB + \\ &+ BC + CD + DA + AB + BC + CD + DA + AB + BC + CD + DA) = \\ &= 2(BD + CA - AB - BC - CD - DA). \end{aligned}$$

Легко видеть, что независимо от расположения точек A, B, C, D на плоскости выражение $BD + CA - AB - BC - CD - DA$ будет неположительным. Действительно, пусть точки A, B, C, D создают на плоскости четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD . Тогда используя последовательно неравенства треугольника для ABC, BCD, CDA, DAB , имеем:

$$AB + BC > AC; BC + CD > BD; CD + DA > CA; DA + AB > DB.$$

Отсюда:

$$2(AB + BC + CD + DA) > 2(BD + CA); \quad AB + BC + CD + DA > BD + CA.$$

Аналогичный вывод можно сделать, рассмотрев случай, когда точки A, B, C, D создают на плоскости четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AB и CD .

Следовательно, первый самолет прилетит раньше, поскольку его маршрут короче маршрута второго.

Пример 3. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему нужно дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в другой заданной точке. Как ему сделать это, пройдя по самому короткому пути?

Решение: Обозначим точку, в которой грибник выходит из леса, через A , а точку, в которой он должен войти в лес, через B . Отразим точку A симметрично относительно прямой-шоссе и получим точку A' . Тогда из любого пути AKB (K — это точка, в которой грибник выходит на шоссе) можно, отразив симметрично относительно шоссе его участок AK , получить равный ему по длине путь $A'KB$, длина которого по неравенству треугольника не меньше $A'B$.

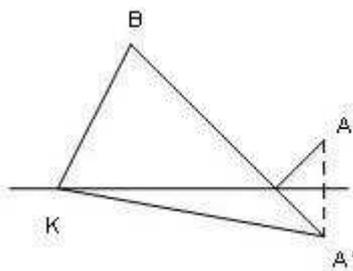


Рис. 1

Следовательно, искомая точка K , в которой грибник должен подойти к шоссе — это точка пересечения $A'B$ и шоссе.

3. Неравенство треугольника в высшей математике

В высшей математике неравенство треугольника встречается достаточно часто. В частности, оно является обязательным свойством для нормы и метрики:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad x, y, z \in X,$$

где ρ — определенная на X метрика.

Однако, не для всех математических объектов, выполняется неравенство треугольника.

Например, убывающая перестановка измеримых функций $f^* = \inf\{\tau \in (0, \infty) : n_f(\tau) \leq t\}$, где $n_f(\tau)$ — функция распределения функции f . Следующий пример показывает, что функция f^* в общем случае не удовлетворяет неравенству треугольника

Пример 4. Рассмотрим функции

$$f_1(t) = \begin{cases} 5, & \text{если } 0 \leq t \leq 2, \\ 6, & \text{если } 2 < t \leq 4, \\ 9, & \text{если } 4 < t \leq 6, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq 2, \\ 8, & \text{если } 2 < t \leq 4, \\ 3, & \text{если } 4 < t \leq 6. \end{cases}$$

Убывающие перестановки этих функций имеют вид:

$$f_1^*(t) = \begin{cases} 9, & \text{если } 0 \leq t < 2, \\ 6, & \text{если } 2 \leq t < 4, \\ 5, & \text{если } 4 \leq t < 6, \end{cases}$$

$$f_2^*(t) = \begin{cases} 8, & \text{если } 0 \leq t < 2, \\ 3, & \text{если } 2 \leq t < 4, \\ 1, & \text{если } 4 \leq t < 6. \end{cases}$$

С другой стороны

$$(f_1 + f_2)(t) = \begin{cases} 6, & \text{если } 0 \leq t \leq 2, \\ 14, & \text{если } 2 < t \leq 4, \\ 12, & \text{если } 4 < t \leq 6, \end{cases}$$

$$(f_1 + f_2)^*(t) = \begin{cases} 14, & \text{если } 0 \leq t < 2, \\ 12, & \text{если } 2 \leq t < 4, \\ 6, & \text{если } 4 \leq t < 6. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(f_1 + f_2)^*(2) = 12 > f_1^*(2) + f_2^*(2) = 6 + 3 = 9.$$

Однако, для функции Харди-Литтлвуда $f^{**} = \frac{1}{t} \int_0^t f^* d\mu$, неравенство треугольника выполняется:

$$(f_1 + f_2)^{**}(t) \leq f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t).$$

Более того, операция f^{**} удовлетворяет неравенству треугольника для бесконечного числа слагаемых:

$$\left(\sum f_k \right)^{**}(\tau) \leq \sum f_k^{**}(\tau).$$

Полученный факт позволяет при помощи операции $**$ по одним симметричным пространствам строить другие.

Таким образом, неравенство треугольника является одновременно интуитивно понятным, даже очевидным, но весьма часто становится мощным инструментом при решении серьезных математических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. *Ленинградские математические кружки*: Пособие для внеклассной работы. – Киров: Изд-во АСА, – 1994 – С. 272.
- [2] Погорелов А.В. *Геометрия*: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, – 1995 – С. 383.
- [3] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов*. – Главная редакция физико-математической литературы. – М.: Наука, – 1978 – С. 400.

Система $M/M/1$ с отключением прибора

Турчик Павел Владимирович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404М)
 e-mail: Yska-study@yandex.ru

Рассмотрим систему массового обслуживания $M/M/1$ с отключением прибора, где первая буква M в этих обозначениях соответствует тому, что входящий поток Пуассоновский, λ – его интенсивность. Вторая буква M означает, что обслуживание экспоненциально распределено, μ – интенсивность обслуживания, 1 – одна линия обслуживания. Предполагается, что линия отключается закончив обслуживание заявки, если в очереди более нет заявок. Тем временем, пока система находится в отключенном состоянии, поток прибытия клиентов остается. Интенсивности поступления заявок во включенную и отключенную систему одинаковые. При этом, время отключения – случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром α , то есть α – интенсивность включения системы. Если после включения система обнаружит, что заявок нет, она вновь отключается. Таким образом, отключений до начала следующего обслуживания заявок может быть несколько (назовем циклом общее количество отключений до появления очередной заявки). Требуется найти стационарные характеристики этой системы. Составим диаграмму переходов состояний для нашей задачи.

1. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Пусть P_{jn} - стационарные вероятности того, что система находится в состоянии jn , $j = 0, 1, 2$; $n = 1, 2, 3, \dots$

Считая, что система находится в состоянии равновесия, с помощью построенной диаграммы составим уравнения баланса "по стрелочкам":

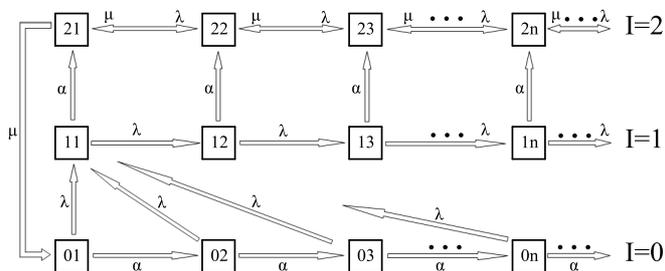


Рис. 1. Диаграмма переходов системы

I=2:

$$\begin{aligned}
 P_{21}(\lambda + \mu) &= P_{22}\mu + P_{11}\alpha \\
 P_{22}(\lambda + \mu) &= P_{23}\mu + P_{12}\alpha + P_{21}\lambda \\
 P_{23}(\lambda + \mu) &= P_{24}\mu + P_{13}\alpha + P_{22}\lambda \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{2n}(\lambda + \mu) &= P_{2(n+1)}\mu + P_{1n}\alpha + P_{2(n-1)}\lambda \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

I=1:

$$\begin{aligned}
 P_{11}(\lambda + \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{0n}\lambda \\
 P_{12}(\lambda + \alpha) &= P_{11}\lambda \\
 P_{13}(\lambda + \alpha) &= P_{12}\lambda \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{1n}(\lambda + \alpha) &= P_{1(n-1)}\lambda \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

I=0:

$$\begin{aligned}
 P_{01}(\lambda + \alpha) &= P_{21}\mu \\
 P_{02}(\lambda + \alpha) &= P_{01}\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{03}(\lambda + \alpha) &= P_{02}\alpha & (3) \\
\text{.....} & \\
P_{0n}(\lambda + \alpha) &= P_{0(n-1)}\alpha \\
\text{.....} &
\end{aligned}$$

Эти уравнения необходимы, чтобы определить стационарные вероятности перехода системы из одного состояния в другое.

Введем производящие функции:

$$G_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{jn} z^n, \quad j = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Обозначим

$$P_{j\bullet} := \sum_{n=1}^{\infty} P_{jn} = G_j(1). \quad (5)$$

Отметим, что

$$P_{0\bullet} + P_{1\bullet} + P_{2\bullet} = 1. \quad (6)$$

Среднее количество заявок в системе (во включенном ($I = 2$) или отключенном ($I = 1$) состоянии) и среднее количество отключений системы ($I = 0$) за один цикл

$$G'_j(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{jn} = L_j. \quad (7)$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведя некоторые преобразования с известными нам уравнениями баланса, найдем производящие функции:

$$G_2(z) = \frac{\lambda\alpha(\mu - \lambda)(z - 1)}{\mu(\alpha + \lambda(1 - z)) \left(\alpha(1 - z) + \mu \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right)} \quad (8)$$

$$G_1(z) = \frac{\lambda\alpha(\mu - \lambda)z}{\mu(\alpha + \lambda)(\alpha + \lambda(1 - z))} \quad (9)$$

$$G_0(z) = \frac{\lambda\alpha(\mu - \lambda)z}{\mu(\alpha + \lambda)(\alpha(1 - z) + \lambda)} \quad (10)$$

Как следствие, получаем:

$$P_{2\bullet} = \frac{\lambda}{\mu} \quad (11)$$

$$P_{1\bullet} = \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{\mu(\alpha + \lambda)} \quad (12)$$

$$P_{0\bullet} = \frac{\alpha(\mu - \lambda)}{\mu(\alpha + \lambda)} \quad (13)$$

Средняя длина очереди во включенном и отключенном состоянии, и среднее количество отключений системы за один цикл:

$$L_2 = \frac{\lambda(\lambda(\mu - \lambda) + \alpha\mu)}{\mu\alpha(\mu - \lambda)} \quad (14)$$

$$L_1 = \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{\mu\alpha} \quad (15)$$

$$L_0 = \frac{\alpha(\mu - \lambda)}{\mu\lambda} \quad (16)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания*. М. Рудн, – 1995. – 529 с.
 [2] Клейнрок Л. *Теория массового обслуживания*. М. Машиностроение, 1979. – 432 с.

Интеллект-карты на уроках математики

Харак Валентина Анатольевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 304)

e-mail: kh.valent@gmail.com

В статье рассматривается метод интеллект-карт и его применение на уроках математики. Предложены свои варианты использования интеллект-карт, а также даны рекомендации по их применению.

Для нашего времени характерно, что получая всё больше и больше информации, ученик понимает и запоминает её всё хуже и хуже. Поэтому учитель должен вводить в практику новые методы обучения, которые позволят развивать память и внимание школьников, креативное и критическое мышление, а также сделать процессы обучения интереснее, занимательнее и плодотворнее.

В данной статье речь пойдет об одном из таких методов. А именно, об удивительном изобретении всемирно известного английского писателя и лектора по вопросам эффективного мышления Тони Бьюзена – интеллект-картах (от англ. Mind maps). Интеллект-карты – это технология представления необходимой информации в максимально наглядном, понятном и структурированном виде.

В основе технологии использования интеллект-карт лежит очень важный принцип – использование возможностей левого и правого полушарий одновременно, что позволяет видеть целостную картину, способствует ассоциативному мышлению.

Цели использования интеллект-карт могут быть самые разнообразные, например, запоминание сложного материала, подготовка и проведение презентаций, принятие решений, планирование. Технология интеллект-карт применима в любой сфере нашей жизни, где требуется развивать и совершенствовать свои интеллектуальные способности: в обучении, в профессиональной деятельности, при решении проблем и т.д.

Рассмотрим теперь основные правила составления интеллект-карт. Главную тему (идею), на которой будет сфокусировано внимание, помещаем в центре листа. Чем больше формат листа, тем лучше. На ветвях, расходящихся от центральной темы, записываем ключевые слова, наиболее характерные, яркие, запоминающиеся. Ветки должны быть ассоциативными, ведь, как известно, ассоциации очень способствуют запоминанию. Стрелками соединяем различные понятия на ветках. Везде, где возможно, добавляем рисунки, символы и другую графику, которая ассоциируется с ключевыми словами. Используем максимальное количество цветов. Можно выполнять карту от руки, но лучше выполнить на компьютере. К сожалению, специальное программное обеспечение по составлению карт [3], [4] стоит достаточно дорого, а бесплатное [5], [6] не позволяет создавать качественные карты.

Автор метода Тони Бьюзен в своих книгах [1], [2] подчеркивает, что строгих правил создания интеллект-карт нет, как нет и неправильных карт: вырабатывая свой стиль, менять можно все, лишь бы мышление становилось продуктивнее – для этого интеллект-карты и были придуманы.

А как же использовать метод интеллект-карт на уроках математики? Я предлагаю следующие варианты (к каждому пункту приведен один из примеров):

- При объяснении нового материала. Учитель может в ходе занятия дополнять интеллект-карту новыми понятиями, что поможет схематично представлять учащимся ход мыслительного процесса учителя, а также структуру занятия.
- При проверке усвоения нового материала. Школьникам после занятия могут быть предложены черно-белые копии, содержащие лишь остов интеллект-карты, рассмотренной на занятии, и требуется заполнить их по памяти и раскрасить (на уроке, либо дома).
- При решении определенного типа задач. Примером могут служить задачи по геометрии. Имея перед глазами интеллект-карту с основными понятиями по нужной теме, ученик легко сможет оперировать всеми фактами при решении задач.
- При подготовке к тематическому оцениванию. Ученики вместе с учителем могут составлять интеллект-карты, тем самым закрепляя и повторяя, полученные в ходе изучения темы знания.
- При подготовке нестандартных уроков. В этом случае, интеллект-карты могут применяться по-разному: от простейших задач на дополнение карт понятиями до самостоятельного составления их учениками.
- При подготовке к экзаменам и внешнему независимому тестированию. Полезным будет самостоятельное составление интеллект-карт, тем самым ученик обеспечит себе всесторонний охват материала и легкость усвоения предлагаемой информации.

Метод интеллект-карт повышает мотивацию к обучению, качество знаний, все виды памяти, конкурентоспособность, позволяет учителю выявить причины затруднения учащихся, корректировать их знания. Создание интеллект-карт – интересный и необычный вид деятельности. Он стимулирует творческие способности учащихся, помогает найти нестандартные пути решения задач. Ещё одним плюсом такого занятия является организация групповой работы.

На мой взгляд, метод интеллект-карт имеет большие перспективы в будущем, так как обладает рядом преимуществ перед линейной формой представления информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бьюзен Т. *Научите себя думать!*/пер. с англ. – 2-е изд. – Мн.: Попурри, 2004 – С. 200.
 [2] Бьюзен Т. *Супермышление*/пер. с англ. – 2-е изд. – Мн.: Попурри, 2003 – С. 322.
 [3] <http://www.conceptdraw.com/> – программа ConceptDraw MINDMAP 7.
 [4] <http://www.mindjet.com/> – программа MindManager PRO 6.0.

[5] <http://www.xmind.net/> – программа XMind.

[6] <http://www.cayra.en.softonic.com/> – программа Cayra 0.9.5.

Исключение уравнения Якоби в вариационных задачах: соболевский случай

Цыганкова Анастасия Владимировна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: tsygankova_a_v@mail.ru

Метод исключения уравнения и условия Якоби в многомерных экстремальных вариационных задачах, разработанный недавно в гладком случае, перенесен на случай пространств Соболева.

Классическая схема исследования на локальный экстремум одномерного вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \mapsto \text{extr} \quad (y \in C^1[a; b])$$

предполагает решение уравнения Эйлера–Лагранжа и проверку для найденной экстремали усиленного условия Лежандра и условия Якоби отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби.

В многочисленных работах исследовались условия, позволяющие исключить уравнение Якоби из схемы исследования. Как правило, это дополнительные условия на функцию эксцесса Вейерштрасса. Недавно в работах И. В. Орлова [1]–[2] были получены достаточные условия, содержащие только оценку длины промежутка. Показано, что в одном из двух теоретически возможных случаев, определяемых формой интегранта на экстремали, усиленное условие Лежандра является достаточным условием экстремума без каких-либо дополнительных ограничений, во втором же возможном случае возникает дополнительное ограничение на длину промежутка. В нашей работе [3]–[4] этот метод распространен на многомерный случай в C^1 . Целью данной работы является перенос этих результатов на многомерный случай в пространствах Соболева $W^{1,p}$. Мы рассматриваем вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y) dx \quad (y \in W^{1,p}(D), p \in \mathbb{N}), \quad (1)$$

где D —компактная область в \mathbb{R}^n с липшицевой границей. Многомерное уравнение Якоби имеет следующий вид

$$-\operatorname{div}_x \left[\nabla_z^2 f(x, y, \nabla y) \cdot \nabla U \right] + \left[-\operatorname{div}_x (\nabla_z f_y(x, y, \nabla y)) + f_{yz}(x, y, \nabla y) \right] \cdot U = 0, \\ (U|_{\partial D} = 0).$$

Перенос условия Якоби на многомерный случай оказался трудной задачей. Эта задача была окончательно решена только в 60-х–70-х годах XX века усилиями ряда выдающихся математиков. При этом, в отличие от одномерного случая, многомерное условие Якоби приняло неалгоритмичную форму, делающую его практическое применение крайне затруднительным. Поэтому вопрос о возможности исключения условия Якоби в многомерном случае ещё более актуален.

Приведем необходимую информацию о компактных экстремумах вариационных функционалов в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$.

В пространстве Соболева $W^{1,2}(D) = H^1(D)$, в силу известной теоремы И. В. Скрышника, вариационные функционалы редко имеют неабсолютные локальные экстремумы. В работах И. В. Орлова и Е. В. Божонков введено и изучено общее понятие компактного экстремума. Теория K -экстремумов сохраняет основные свойства теории локальных экстремумов и может быть распространена на случай вариационных функционалов в $W^{1,p}[a; b]$. Недавно в работах Е. М. Кузьменко (см., напр. [5]) построено обобщение теории на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Скажем, что функционал $\Phi(y)$ имеет компактный минимум (K -минимум) в точке $y_0 \in W^{1,p}(D)$, если для каждого абсолютно выпуклого (а.в.) компакта $C \subset E$ сужение f на $(y_0 + \operatorname{span} C)$ имеет локальный минимум в y_0 по отношению к норме $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C .

Скажем, что $\Phi(y)$ K -непрерывен (K -дифференцируем и т.д.) в точке y_0 , если каждое сужение Φ на $(y_0 + \operatorname{span} C)$, непрерывно (дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке y_0 относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Определение 2. Скажем, что интегрант f вариационного функционала $\Phi(y)$ является K -псевдополиномом порядка p , если f допускает представление вида

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p R_k(x, y, z)(z)^k, \quad (2)$$

коэффициенты R_k которого — зависящие от x, y, z , борелевские k -формы в \mathbb{R}^n , удовлетворяющие условию доминантности по x, y смешанной ограниченности (см. напр. [6]). В этом случае примем обозначение: $f \in K_p(z)$. Скажем, что $f \in WK_p(z)$, если коэффициенты R_k в представлении (2) можно выбрать доминантно по x, y смешанно непрерывными, ($R_k \in W_K(z)$). Скажем, что $f \in W^n K_p(z)$, если возможно представление вида (2), для всех коэффициентов R_k которого джеты n -го порядка по y, z ($R_k, \nabla_{yz} R_k, \dots, \nabla_{yz}^n R_k$) принадлежат классу $W_K(z)$.

Следующее обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского служит для поиска K -экстремума функционала (1) в пространстве $W^{1,p}(D)$ аналогом классического необходимого условия локального экстремума вариационного функционала в $C^1(D)$.

Теорема 1. Пусть $f \in W^1 K_p(z)$. Предположим также, что:

- (i) функционал (1) имеет K -экстремум в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$;
- (ii) $\nabla_z f(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.

Тогда, при граничном условии $y|_{\partial D} = y_0$, выполнено обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского:

$$L(f)(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y) \right) \stackrel{n.б.}{=} 0 \quad (x \in D). \quad (3)$$

Мы будем опираться на достаточное условие K -экстремума вариационного функционала, полученное в [7].

Теорема 2. Пусть $f \in W^2 K_p(z)$, $y(\cdot)$ — K -экстремаль функционала (1), $\nabla_z f(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$. Если при всех $x \in D$ выполнены условия:

- 1) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(x, y, \nabla y) > 0$; 2) $(\nabla_z^2 f)(x, y, \nabla y) \gg 0$;
- 3) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \nabla_z \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (\nabla_z^2 f)^{-1} \cdot \left(\nabla_z \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)^T \right)(x, y, \nabla y) > 0$;
- 4) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (\nabla_z^2 f) - \left(\nabla_z \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)^T \cdot \nabla_z \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)(x, y, \nabla y) \gg 0$,

то вариационный функционал (1) имеет строгий K -минимум в точке $y(\cdot)$.

Введем следующие обозначения

$$Q(x) := f_{y^2}(x, 0, 0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f_{z_j y}(x, 0, 0) \right); \quad q := \min_{x \in D} Q(x);$$

$$R(x) := \nabla_z^2 f(x, 0, 0) \gg 0; \quad s = \min_{x \in D} Q(x);$$

$$r := \min_{x \in D} \max\{\gamma^2 > 0 \mid R(x)(z^2) \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2 (\forall z \in \mathbb{R}_z^n)\} > 0.$$

Обозначим также через \hat{D} – минимальный координатный прямоугольник в \mathbb{R}^n , содержащий область D . Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3. Пусть вариационный функционал (1) удовлетворяет в нуле обобщенному уравнению Эйлера–Остроградского (3) при граничном условии $y|_{\partial D} = 0$, $f \in W^2 K_p(z)$, $\nabla_z f(x, 0, 0) \in W^{1,1}(D)$. Тогда, в предыдущих обозначениях, имеем:

- 1) при $r > 0$, $q > 0$, $\Phi(y)$ достигает строгого K -минимума в нуле (без каких либо ограничений на меру \hat{D});
- 2) при $r > 0$, $q < 0$, $s > 0$, и при ограничении на меру \hat{D} :

$$\text{mes}_n(\hat{D}) < n^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}} \right)^n,$$

$\Phi(y)$ также достигает строгого K -минимума в нуле.

Автор выражает признательность проф. И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. V. Orlov *Elimination of Jacobi equation in extremal variational problems*, Methods of Functional Analysis and Topology, Kyiv: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 2011, Vol. 17, no. 4, 341–349.
- [2] I. V. Orlov *Inverse extremal problem for variational functionals*, Eurasian Mathematical Journal, 2011, Vol. 1, no. 4, 95–115.
- [3] И. В. Орлов, А. В. Цыганкова *Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах*, Донецк, Труды ИПММ НАН Украины, 2013. (В печати)
- [4] А. В. Цыганкова *Исключение уравнения Якоби в экстремальных вариационных задачах*, Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Серия "Физико-математические науки", Том 25 (64) № 2 (2012), 161–175.
- [5] Е. М. Кузьменко *Компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных*, Динамические системы, 2012.
- [6] J. F. Rosenblueth, G. S. Licea *A direct sufficiency proof for a weak minimum in optimal control*, Appl. Math. Sci. 4 (2010), no. 6, 253–269.
- [7] Е. В. Божонок, Е. М. Кузьменко *Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью*. (В печати).

Об одной задаче теории бесконечных цепных дробей

Шкаденкова Антонина Владимировна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

e-mail: a_shkadenkova@mail.ru

Работа посвящена изучению некоторых свойств графика функции $l(D)$, где l - длина периода разложения в бесконечную цепную дробь числа \sqrt{D} . Построены и исследованы графики указанной функции в окрестности точных квадратов в пределах $[1...3000]$. На основании изучения поведения функции $l(D)$ в окрестности точных квадратов были получены формулы для вычисления $l(D)$ чисел вида $\sqrt{h^2 \pm 1}$, $\sqrt{h^2 \pm 2}$, $\sqrt{h^2 + 4}$, где $h \in \mathbb{N}$ и сформулирована гипотеза о поведении графика функции $l(D)$ в конкретных точках.

Рассмотрим некоторые аспекты ещё нерешенной задачи теории цепных дробей: как вычислить длину периода числа \sqrt{D} , располагая только значением D . Данная проблема рассматривается, например, в работах [1], [2].

Пусть D — неквадратное натуральное число. Рассмотрим разложение в бесконечную цепную дробь чисел вида \sqrt{D} , где D будет меняться в пределах от 1 до 3000. Обозначим через $l(D)$ -длину периода соответствующей цепной дроби.

При помощи прикладного пакета Mathematica получены разложение чисел вида \sqrt{D} и подсчитаны длины периодов бесконечной цепной дроби в диапазоне от 1 до 3000. По данным вычислениям построены графики двух типов (для наглядности соседние точки на графике соединены отрезками):

1. график поведения длины периода цепной дроби $l(D)$ в окрестности точных квадратов;

2. график частоты повторений значения функции $l(D)$ между двумя соседними точными квадратами.

Примеры графиков указаны ниже.

На рисунках 1 и 2 показаны графики первого типа между двумя соседними точными квадратами, а именно 324 - 361 и 484 - 529 соответственно.

На рисунках 3 и 4 показаны графики второго типа в таких же пределах, как и на рисунках 1 и 2.

На основании изучения полученных графиков были замечены общие закономерности, которые потом подтвердились при доказательстве следующего предложения.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

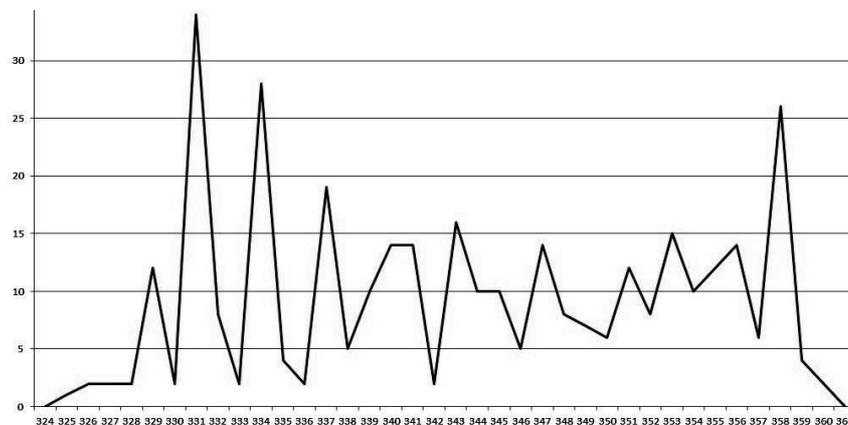


Рис. 1

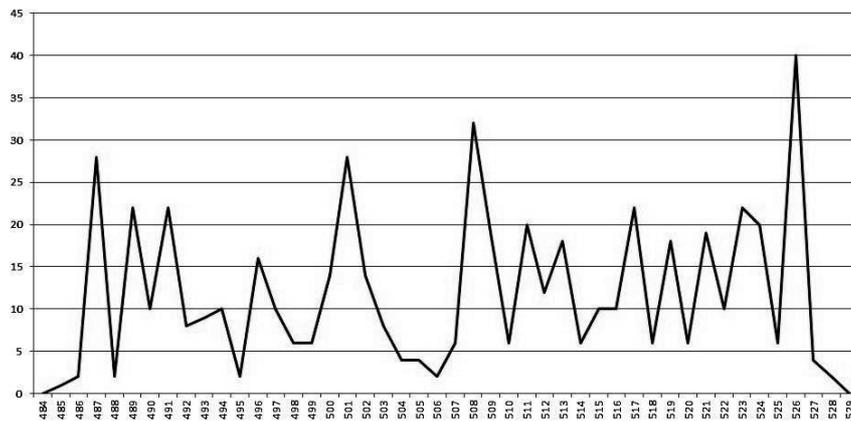


Рис. 2

1. Если $D = h^2 + 1$, $h \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{D} = [h, \overline{2h}]$ и $l(D) = 1$;
2. Если $D = h^2 - 1$, $h \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{D} = [h - 1, \overline{1, 2h - 1}]$ и $l(D) = 2$;
3. Если $D = h^2 + 2$, $h \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{D} = [h, \overline{h, 2h}]$ и $l(D) = 2$;
4. Если $D = h^2 - 2$, $h \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{D} = [h - 1, \overline{1, h - 2, 1, 2h - 2}]$ и $l(D) = 4$;
5. Если $D = h^2 + 4$, $h \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{D} = [2n, \overline{n, 4n}]$ и $l(D) = 2$ (при $h = 2n$);
 $\sqrt{D} = [2n + 1, \overline{n, 1, 1, n, 4n + 2}]$ и $l(D) = 5$ (при $h = 2n + 1$).

Эти формулы верны для всех чисел в диапазоне от 1 до 3000.

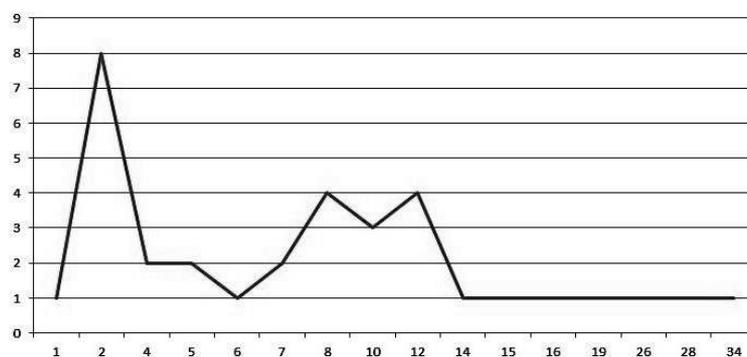


Рис. 3

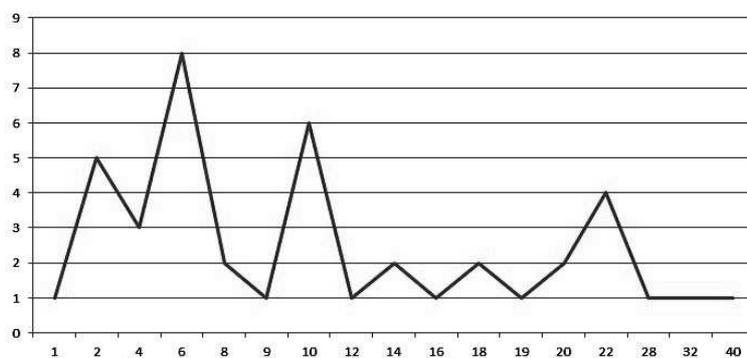


Рис. 4

Получив все разложения и построив графики можно предложить следующую гипотезу: число D вида $3n + 1$, где $n \in \mathbb{N}$, при разложении в бесконечную цепную дробь \sqrt{D} имеет наибольшую длину периода между двумя соседними точными квадратами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Голубева Е.П. *О длине периода квадратичной иррациональности*. – Матем. сборник, 123(165):1. – 1984 – с.120–129.
- [2] Голубева Е.П. *Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь*. – Зап. научн. сем. ЛОМИ, 196.– 1991 – с.5–30.

Секция ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Проблема параметризации сплайновых кривых и поверхностей при неравномерном расположении узлов интерполяции

Жабина Анна Геннадиевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: nura_jag@mail.ru

Для решения практических задач моделирования кривых в пространстве или поверхностей необходимо иметь возможность решать такие задачи интерполяции, когда интерполирующая кривая имеет участки с вертикальной касательной. В этом случае не обойтись без параметрического сплайна. Только такой подход позволяет построить объект с такого вида геометрией [1]. Целью работы является исследования влияния на параметрический сплайн длины параметризации, что существенно для случая, когда сплайн проводится через точки неравномерно расположенные в пространстве (то есть, когда длины хорд между рядом стоящими точками сильно отличаются).

Сплайн-интерполяция есть специальный вид многоинтервальной интерполяции, при котором интерполирующий полином обеспечивает не только равенство функции $f(x)$ значениям ее в узлах интерполяции, но и непрерывность заданного числа первых производных на границах частичных интервалов[2]. В общем случае сплайн задаётся глобальным способом, т.е. с использованием всех узлов при любом их расположении. Рассмотрим задание кубического сплайна локальным способом, который реализуется сравнительно просто и требует существенно меньше памяти компьютера, чем при глобальном способе задания.

Используем параметрический подход, применяя методы построения кривых с использованием параметрических сплайнов в трехмерном случае.

Сначала рассмотрим стандартную ситуацию, когда строится обычный кубический сплайн интерполирующий точки (x_i, y_i) , $i=\overline{1, n}$. Тогда известно, что на каждом i -ом отрезке строится функция

$$S_i(x, s_{i-1}, s_i) = \frac{1}{6h_i}(s_{i-1}(x_i - x)^3 + s_i(x - x_{i-1})^3) +$$

$$+ (x - x_{i-1})\left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i s_i}{6}\right) + (x_i - x)\left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i s_{i-1}}{6}\right) \quad (1)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$; s_{i-1}, s_i - константы, которые определяются в дальнейшем из стандартных условий[2]. Известно, что в этом случае задача определения констант s_i сводится к системе

$$h_i s_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})s_i + h_{i+1} s_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \quad (2)$$

Пусть теперь интерполируемое множество точек расположено в R^3 : $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)})$, и поставим задачу построить пространственную кривую, проходящую через заданные точки. Тогда, если эти точки расположены произвольно, то единственный способ решить поставленную задачу состоит в следующем:

Рассмотреть на каждом i -ом участке параметрические функции

$$x^{(k)} = S_i(u, S_{i-1}^{(k)}, S_i^{(k)}), \text{ где } k=1,2,3$$

При этом S_i имеет ту же структуру, что и в формуле (1).

Но тогда проблема заключается в выборе параметра u . Стандартным подходом для параметризации является изменение на каждом отрезке параметра u на отрезке $[0,1]$. Такой подход называется равномерной параметризацией. В этом случае система (2) упрощается и приобретает следующий вид

$$s_{i-1} + 4s_i + s_{i+1} = 6(x_{i+1}^{(k)} - 2x_i^{(k)} + x_{i-1}^{(k)}) \quad (3)$$

Условий (3) можно записать ровно столько, сколько имеется внутренних точек, т.е. если существует $(n + 1)$ точка, то получим $(n - 1)$ таких условий, а определить нужно $(n + 1)$ константу s_i , значит, для получения единственного решения следует дополнить систему (3) какими-либо двумя условиями. В данной ситуации лучше всего использовать, такой классический способ: в нулевой и n -ой точках массива задается значение вектора градиента. Это позволяет определить s_0, s_n , таким образом в системе с трехдиагональной матрицей (3) получим столько же уравнений сколько неизвестных.

Для случая, когда точки расположены в плоскости равномерно (длины хорд близки по величине) подход дает приемлемый результат.

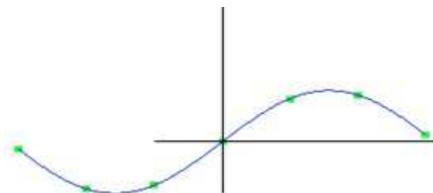


Рис.1

Однако, ситуация становится неблагоприятной для такого подхода при неравномерном расположении точек. В данном случае рекомендуют использовать для параметризации такой подход, который "чувствует" эту неравномерность. В этом случае в качестве длины параметра используют длину хорды между точками

$$u_{i+1} = u_i + d_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (4)$$

где

$$d_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1}^{(1)} - x_i^{(1)})^2 + (x_{i+1}^{(2)} - x_i^{(2)})^2 + 2(x_{i+1}^{(3)} - x_i^{(3)})^2} \quad (5)$$

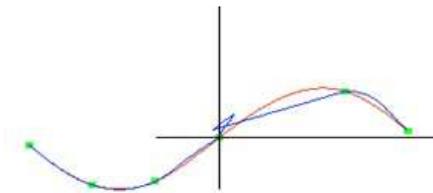


Рис.2

На рисунке 2 показаны различные параметрические кривые, построенные двумя вышеизложенными способами.

Процедуры для демонстрации пространственной кривой были реализованы с помощью средств библиотеки OpenGL [3]. С ее помощью можно строить пространственные кривые следующим образом:

```

Gl.glBegin(Gl.GL_LINE_STRIP);
for (int ax = 0; ax < count_spline; ax++)
{
    Gl.glColor3f(0f, 0.2f, 1f);
    Gl.glVertex3d(ResultGeometricSpline2[ax, 0], ResultGeometricSpline2[ax, 1], ResultGeometricSpline2[ax, 2]);
}
Gl.glEnd();

```

Вывод

Проделанная работа показала, что длина параметризации существенно влияет на геометрию параметрического сплайна. Целью дальнейших исследований может являться рассмотрение влияния длины параметризации на параметрическую поверхность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фокс А., Пратт М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и в производстве*. – М.: Изд-во Мир, – 1982 – С. 304.
- [2] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. – М.: Наука, – 1989 – С. 432.
- [3] Рэнди Дж. Рост. *OpenGL. Трёхмерная графика и язык программирования шейдеров*. – М.: Изд-во Питер, – 2005 – С. 432.

Влияние знака кривизны на поведение параметрических сплайновых кривых

Клещев Антон Юрьевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: anton.nk.nlk@gmail.com

Исследуется классический подход к построению составного параметрического сплайна, предложенный Фоксом и Праттом. При его практической реализации возникают нежелательные геометрические эффекты и проблемы с численной реализацией. Предлагаемая модификация позволяет решить эти проблемы. Улучшение удалось достигнуть за счет использования "знака" кривизны и проведенного параметрического анализа. Получено условие, соблюдение которого обеспечивает достаточные условия устойчивого счёта.

ВВЕДЕНИЕ

Не вызывает сомнений актуальность решения задач построения различных сечений объектов, их проекций или полностью поверхностей с использованием машинной графики. Все эти задачи сводятся к проблеме аналитического описания и графического представления кривых и поверхностей. Целью работы является исследование возможностей применения для построения составного параметрического сплайна класса гладкости C^2 методики, предложенной А. Фоксом и М. Праттом, связанное с внесением поправок в этот классический подход. Дело в том, что при его применении в варианте, изложенном в [1]

возникают такие нежелательные геометрические эффекты как, например, изломы или петли при определенных расположениях интерполируемых точек. Такие эффекты крайне нежелательны, хотя бы с точки зрения эстетических требований.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть кривая задана параметрическим представлением $r = \vec{r}(u)$; $u \in [0, 1]$. Рассмотрим конструирование составных кривых на основе параметрически заданных сегментов. Пусть имеется 2 порции кривых, построенных некоторым методом: $\vec{r}_1(u)$ и $\vec{r}_2(u)$; $u \in [0, 1]$. Используя стандартные для кубических сплайнов условия гладкости и непрерывности [1], получим:

$$\ddot{\vec{r}}_2(0) = \lambda^2 \ddot{\vec{r}}_1(1) + \mu \dot{\vec{r}}_1(1), \quad (1)$$

где λ – коэффициент, показывающий отношение модулей касательных векторов в точке соединения сегментов, а μ – некая произвольная константа. Заметим, что параметр μ не имеет явного геометрического смысла, то есть ему может быть присвоено любое значение.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Однако практическое применение формулы (1) при построении составного параметрического сплайна показывает, что геометрически приемлемые результаты в этом случае получаются только, если переход от одной порции к другой осуществляется так, что обе находятся по одну сторону от касательной в точке соединения. Иначе возникают участки с резким изменением касательного вектора и даже петли, что вряд ли можно считать приемлемым для практического применения. Чтобы решить эту проблему, например для плоских кривых целесообразно отнести кривизне знак, считая ее в одних случаях положительной, в других – отрицательной. При этом пользуются следующим соображением. Касательный вектор кривой при движении вдоль кривой в направлении возрастающих t поворачивается. *В зависимости от направления вращения касательного вектора кривизну считают положительной или отрицательной.* Если определить этим условием знак кривизны плоской кривой, то для нее получается формула:

$$k = \delta \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \delta = \pm 1 \quad (2)$$

Пусть, например, порция параметрической кривой задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \bar{r}(u) = & \bar{r}(0)(1 - 3u^2 + 2u^3) + \bar{r}(1)(3u^2 - 2u^3) + \\ & + \dot{\bar{r}}(0)(u - 2u^2 + u^3) + \dot{\bar{r}}(1)(-u^2 + u^3) \end{aligned} \quad (3)$$

Условие непрерывности кривизны (1) будем теперь использовать в таком виде:

$$\ddot{\bar{r}}_2(0) = \delta \lambda^2 \ddot{\bar{r}}_1(1) + \mu \dot{\bar{r}}_1(1) \quad (4)$$

где r_1 и r_2 - два соседних сегмента. Особую роль играет коэффициент $\delta = \pm 1$. Если два сегмента соединены так, что они оба находятся по одну сторону от касательной в точке соединения, то нужно положить $\delta = 1$, а если по разные стороны, то $\delta = -1$. Определим значения $\ddot{\bar{r}}_2(0)$, $\dot{\bar{r}}_1(1)$, $\dot{\bar{r}}_1(1)$.

Подставим $\dot{\bar{r}}(u)$ и $\ddot{\bar{r}}(u)$ в уравнение (4):

$$\dot{\bar{r}}_2(1) + 2\dot{\bar{r}}_2(0)\left(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda\right) + \delta\lambda^2\dot{\bar{r}}_1(0) = 3\dot{\bar{r}}_2(1) - 3\dot{\bar{r}}_2(0)(1 - \delta\lambda^2) - 3\delta\lambda^2\dot{\bar{r}}_1(0) \quad (5)$$

В частном случае при $\mu = 0$, $\lambda = 1$ (модули касательных векторов обеих порций в точке соединения равны), получим уравнение для определения значений касательных векторов:

$$\dot{\bar{r}}_2(1) + 2\dot{\bar{r}}_2(0)(\delta + 1) + \delta\dot{\bar{r}}_1(0) = 3\dot{\bar{r}}_2(1) - 3\dot{\bar{r}}_2(0)(1 - \delta) - 3\delta\dot{\bar{r}}_1(0) \quad (6)$$

Рассмотрим случай формирования составной кривой из нескольких сегментов по общей формуле (5). Пусть известно множество образующих точек и производные на первой и последней из них. Поставим задачу найти производные в остальных точках. Учитывая, что уравнения (5) можно записать во всех точках соединения порций задача сводится к решению системы [3]: $A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i$, $i=1..n$ коэффициенты которой при $A_1 = C_n = 0$ образуют трёхдиагональную матрицу. Однако следует сразу отметить, что для случая $\mu = 0$, $\lambda = 1$ (6), все диагональные элементы B_i при $\delta = -1$ равны нулю, а следовательно в таком важном случае не подходит методика, предложенная в [1] для построения сплайна. Далее будет показано, как можно используя наличие параметра μ в (5), воспользоваться стандартным методом прогонки. Обозначим \bar{t}_i - все касательные векторы, а r_i - данные точки, через которые должна пройти сплайновая кривая. Тогда на основании (5), можно

записать:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\left(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda\right)\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \\ = 3(\bar{r}_2 - \bar{r}_1(1 - \delta\lambda^2) - \delta\lambda^2\bar{r}_0) - \delta\lambda^2\bar{t}_0 \\ \delta\lambda^2\bar{t}_{i-1} + 2\left(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda\right)\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1} = \\ = 3(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i(1 - \delta\lambda^2) - \delta\lambda^2\bar{r}_{i-1}) \\ \delta\lambda^2\bar{t}_{n-3} + 2\left(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda\right)\bar{t}_{n-2} = \\ = 3(\bar{r}_{n-1} - \bar{r}_{n-2}(1 - \delta\lambda^2) - \delta\lambda^2\bar{r}_{n-3}) - \bar{t}_{n-1} \end{array} \right. \quad i = 2..n-3 \quad (7)$$

Известно, что метод прогонки устойчив при выполнении условия диагонального преобладания матрицы: $|B_i| \geq |A_i| + |C_i|$ [3]

В контексте системы (7):

$$\left| 2\left(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda\right) \right| \geq |\delta\lambda^2| + 1 \quad (8)$$

Решим это неравенство. В результате получим систему неравенств, определяющую μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \geq 2|\delta\lambda^2| - 4\delta\lambda^2 + 2 - 4\lambda \\ \mu \leq -2|\delta\lambda^2| - 4\delta\lambda^2 - 2 - 4\lambda \end{array} \right.$$

Определим теперь границы μ , например, при :

$$\lambda = 1, \delta = 1 : \left\{ \begin{array}{l} \mu \geq -4 \\ \mu \leq -12 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \lambda = 1, \delta = -1 : \left\{ \begin{array}{l} \mu \geq 4 \\ \mu \leq -4 \end{array} \right.$$

Следовательно, теперь можно использовать стандартные формулы прогонки, но только если подбирать значения μ , используя (8). Стоит отметить, что условие (8) является достаточным условием, и для хорошо обусловленных систем прогонка может быть достаточно устойчивой даже без его соблюдения [3]. Однако при этом стоит иметь в виду, что это условие также используется в качестве защиты от деления на ноль в формулах прогонки, поэтому при его несоблюдении даже для хорошо обусловленных систем может привести в некоторых случаях к неустойчивости. Примеры сплайнов для $\lambda = 1, \delta = 1$ и для $\lambda = 1, \delta = -1$ при различных μ можно найти в [4].

Выводы

Показано, что внесение небольших изменений в условия непрерывности кривизны позволяет ликвидировать такие нежелательные геометрические эффекты как, например, изломы или петли. Перспективой дальнейших исследований является проведение аналогичных исследований для параметрических пространственных кривых и поверхностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фокс А., Пратт М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве.* – М.: Мир, 1982.
- [2] Погорелов А. В. *Дифференциальная геометрия (6-е издание).* – М.: Наука, 1974.
- [3] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – М.: Наука, 1989.
- [4] Карпенко В.А., Клещев А.Ю. *Влияние знака кривизны на поведение параметрических сплайновых кривых.* – Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 90. – К.: КНУБА, 2012. - с. 132-138.

Разработка приложений для мобильных устройств на базе iOS

Корытцев Александр Сергеевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500П)

e-mail: sanio91@ya.ru

В работе рассматривается реализация дизайнерского инструмента для создания макетов приложений для iPhone. Данное решение реализовано на платформе iPad. Основные требования к приложению: создание, конфигурация и расположение элементов графического интерфейса на виртуальном экране iPhone

Для реализации поставленных требований был использован язык Objective-C в среде разработки Xcode с использованием фреймворка CocoaTouch. Данный фреймворк содержит все необходимые инструменты для разработки приложений для платформы iOS, в том числе и реализацию графического интерфейса.

Экран приложения разбит на 3 части

- (1) Каталог и конфигуратор компонентов интерфейса
- (2) Экран iPhone
- (3) Коллекция существующих на экране iPhone элементов

1. КАТАЛОГ КОМПОНЕНТОВ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНТЕРФЕЙСА. СОЗДАНИЕ КОМПОНЕНТОВ

Так как iPhone и iPad основаны на одной платформе, каталог элементов интерфейса импортировать не пришлось. Все стандартные компоненты интерфейса были расположены в одной таблице. При долгом нажатии на одном из них, создается его копия и появляется возможность разместить эту копию на виртуальном экране iPhone. Несмотря на то, что стандартная реализация

компонентов не поддерживает копирование (протокол `NSCopying`), существует реализация кодирования в бинарные данные (протокол `NSCoding`), с помощью которой и осуществлялось копирование путем создания закодированной копии компонента а затем раскодирования этой копии.

1.1. Конфигурация компонентов пользовательского интерфейса. Виды элементов графического интерфейса – это классы. Изменяя определенные сущности в объектах этих классов, изменяется внешний вид элемента. Существует иерархия классов графических элементов, для каждого класса был реализован свой конфигуратор, который меняет сущности объектов данного класса в зависимости от настроек пользователя. Для вывода всех возможных параметров отображения, группируются конфигураторы всех классов, от которых наследуется класс выделенного графического элемента. Например, если необходимо настроить отображение кнопки (`UIButton`), то необходимо предоставить доступ к сущностям из классов `UIControl` и `UIView`, от которых по цепочке наследуется `UIButton`.

2. ВИРТУАЛЬНЫЙ ЭКРАН IPHONE

Дает представление о том, как дизайн будет выглядеть на реальном iPhone. На виртуальном экране возможно менять расположение элементов и удалять их. Для точной подгонки элементов интерфейса, минимальный шаг смещения выставлен в 4 пикселя. Таким образом, расстояние между элементами всегда кратно 4, и от пользователя не требуется высокой точности расположения компонентов, они выравниваются по сетке. Все элементы сохраняют интерактивность с пользователем (кнопки нажимаются, переключатели переключаются, слайдеры двигаются), в отличии от существующих инструментов создания дизайна iOS приложений, в которых все элементы статичны.

3. КОЛЛЕКЦИЯ СУЩЕСТВУЮЩИХ НА ЭКРАНЕ IPHONE ЭЛЕМЕНТОВ

Существует для быстрого доступа ко всем созданным элементам на экране iPhone для редактирования. Так же имеется возможность менять порядок отображения элементов, таким образом можно решать, который из элементов будет на переднем плане, а который частично или полностью перекрываться другими элементами.

4. ВЫВОД

Таким образом данное решение удовлетворяет всем поставленным требованиям и не имеет аналогов среди существующих решений. С помощью данного

приложения возможно создавать точный дизайн, который будет выглядеть на настоящем iPhone точно так же, как и на виртуальном.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Apple Developer <http://developer.apple.com/>. –
- [2] Wikipedia <http://ru.wikipedia.org/>. –

Разработка геоинформационной системы для мобильных устройств: математические модели, алгоритмы и программное обеспечение

Курочкин Александр Александрович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)
e-mail: kurochkin91@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день, в силу широко распространенных мобильных устройств, стала актуальна проблема создания геоинформационных систем (ГИС). В ходе разработки ГИС для Дании на мобильной платформе iOS был выявлен набор задач на концептуальном и техническом уровне.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимо систематизировать основные проблемы при реализации ГИС для мобильных устройств. А так же описать наиболее популярные решения и критерии их выбора. В основе ГИС лежат решения следующих базовых задач:

- (1) реализация карты;
- (2) определение текущего местоположения;
- (3) создание структуры данных ГИС.

РЕАЛИЗАЦИЯ КАРТЫ

Для реализации карты нужен механизм отображения, который будет практичный, максимально оптимизированный и актуальный.

Существует 2 типа электронных карт: растровая и векторная. Растровые карты представляют собой набор растровых изображений. Эти изображения

группируются по уровням масштабирования. Для каждой группы соответствует своя координатная сетка, в которой координаты каждого фрагмента карты (тайла) соответствует покрываемому квадрату реальной местности. Векторные карты представляют собой множество объектов с набором координат и параметров. По этим данным уже происходит прорисовка объекта.

Оба типа карт имеют свои преимущества и недостатки. Например растровые карты менее затратные при рендеринге, при этом объем такой карты достаточно большой. Объем векторной карты значительно меньше чем растровой, но механизмы прорисовки объектов более сложный и затратный. Таким образом выбор типа используемой карты зависит от поставленной цели системы и ресурсов мобильного устройства.

В зависимости от конечной задачи, данные на карте должны быть актуальными. Для этого решается задача обновления карты. В случае стабильного доступа к интернету может быть использован внешний источник карты, который хранит карту на сервере. Иначе, карта хранится локально на устройстве. Карта должна быть удобна в применении. Для этого используются встроенные возможности мобильных устройств: прокрутка (scrolling) и масштабирование (scaling).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕКУЩЕГО МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ

Для определение текущего местоположения можно использовать встроенные технологии GPS (определение местоположения путём измерения моментов времени приема синхронизированного сигнала от навигационных спутников до потребителя.) или A-GPS (определение местоположения посредством измерения моментов времени приема синхронизированного сигнала от ближайших вышек сотовой сети).

СОЗДАНИЕ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ГИС

Данная задача является основой и напрямую зависит от цели ГИС. Как правило конечная структура системы определятся решением следующих подзадач:

- (1) разработка бизнес логики;
- (2) создание концептуальных схем данных.
- (3) разработка архитектуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках исследования ГИС для мобильных устройств было создано приложение-путеводитель по Дании для iPhone на языке программирования objective-C. Данное приложение включает в себя растровую карту с двумя режимами работы (online/offline) и базу данных мест и событий, которые могут быть потенциально интересны туристу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров И. *Космическая радионавигационная система НАВСТАР (рус.) // Зарубежное военное обозрение.* – М., 1995. - № 5. - С. 52-63. - ISSN 0134-921X.
- [2] Козловский Е. *Искусство позиционирования // Вокруг света.* – М., 2006. - № 12 (2795). - С. 204-280.
- [3] Шебшаевич В. С., Дмитриев П. П., Иванцев Н. В. и др. *Сетевые спутниковые радионавигационные системы / под ред. В. С. Шебшаевича. - 2-е изд., перераб. и доп..* – М.: Радио и связь, 1993. - 408 с. - ISBN 5-256-00174-4
- [4] Громаков Ю. А., Северин А. В., Шевцов В. А. *Технологии определения местоположения в GSM и UMTS.* – М.: Эко Трендз, 2005. - Р. 99. - 144 р. - ISBN 5-88405-076-3
- [5] Tile usage policy [Электронный ресурс]: *описание структуры растровой карты / некоммерческий веб-картографический проект.* – статья - 2013.-, - режим доступа: [http : //wiki.openstreetmap.org/wiki/Tile _usage_policy](http://wiki.openstreetmap.org/wiki/Tile_usage_policy).

Табличный процессор как средство визуализации тестовых примеров по численным методам

Леem Регина Эдуардовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: regina_risha@mail.ru

Современный учебный процесс связан с большим количеством информации и постоянно развивающимися компьютерными технологиями. Поэтому использование электронного учебного пособия является актуальным в процессе изучения практически всех дисциплин высшей школы, не говоря уже о тех, которые непосредственно используют КТ.

Преимущества электронных средств обучения состоят в том, что они могут быть использованы для самостоятельного изучения учебного материала, а также, при дистанционном обучении.

Цель данной работы состоит в формировании электронного учебного пособия, состоящего из нескольких частей. Первая часть состоит из теоретического материала, составляющего основу предмета "Численные методы". Вторая часть демонстрирует выполнение лабораторных работ на типовых примерах при помощи программного обеспечения. В третьей части содержится небольшая тестовая система, предназначенная для быстрой проверки текущих знаний.

Использование табличного процессора Microsoft Excel позволяет достаточно глубоко вникнуть в детали решения задач. Мы уверены, что использование более сложного ПО, например, Maple, Wolfram Mathematica, сопряжено с требованием наличия лицензии, поэтому использование Microsoft Office является более предпочтительным в ситуации повсеместного перехода на лицензионное ПО. Заметим так же, что табличные процессоры типа Microsoft Excel содержатся и в бесплатно распространяемых офисных пакетах под Linux.

В целом было обработано 12 лабораторных работ, для которых создана реализация с единым интерфейсом.

Ниже в качестве примера приводится лабораторная работа по теме "Решение нелинейных уравнений".

В данной лабораторной работе приводится решение нелинейного уравнения $\cos(x) = x$. Сначала исследуется графический способ проверки наличия по крайней мере одного действительного корня на определенном отрезке. Точка пересечения графиков является корнем данного уравнения.

Из графического анализа видно, что корень уравнения находится на отрезке $[0, \pi/4]$ (см. рис. 1).

Далее приводится способ анализа для случаев, когда отрезок, на котором находится корень уравнения, не является очевидным (см. рис. 2).

Метод дихотомии (деления пополам)

Пусть найдены такие точки a и b , что $f(a) * f(b) < 0$. Найдем середину отрезка $c = (a + b)/2$ и вычислим $f(c)$. Если $f(c) = 0$, то процесс нахождения корня закончен; если же $f(c) \neq 0$, то из двух половин отрезка выберем ту, для которой выполняется условие, что определит нам новые a, b . Затем новый отрезок делим пополам и т.д. Деление продолжаем до тех пор, пока или не выполнится $f(c) = 0$, или длина отрезка не станет меньше заданной точности. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с точностью $\varepsilon/2$ [2].

В табличном процессоре процесс решения с помощью данного метода представлен в виде таблицы с отображением всех итераций (см. рис. 3).

Метод Ньютона (касательных и линеаризации)

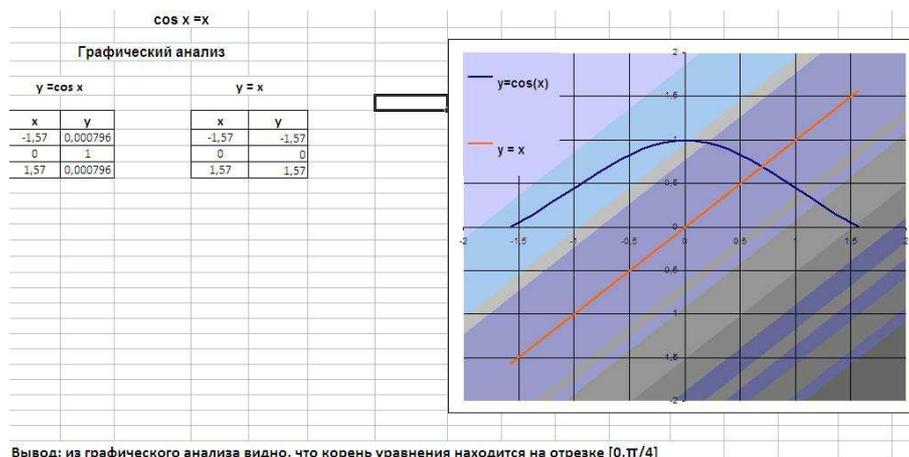


Рис. 1. Графический анализ

Условие наличия корня на отрезке $[a, b]$: $f(a) \cdot f(b) < 0$

h = 0,785					
i	ai	bi	f(ai)	f(bi)	f(ai) * f(bi)
1	-3,14	-2,355	2,14	1,64874	3,528302
2	-2,355	-1,57	1,64874	1,5708	2,589832
3	-1,57	-0,785	1,5708	1,49239	2,344238
4	-0,785	0	1,49239	1	1,492388
5	0	0,785	1	-0,07761	-0,077612

Рис. 2

Если x_k есть некоторое приближение к корню X , а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то приближенное значение корня определяется с помощью итерационного процесса:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k) \quad k = 0, 1, \dots$$

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика $y = f(x)$ касательной к нему. В качестве x_0 выбирается тот из концов $[a, b]$, в котором знаки $y = f(x_0)$ и $y = f''(x_0)$ совпадают. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия $|f(x_k)| < \varepsilon$ (ε - заданная точность) [1].

В табличном процессоре процесс решения с помощью данного метода также представлен в виде таблицы отображающей все итерации (см. рис. 4).

Метод дихотомии									
$\epsilon = 0,01$					Проверка окончания		Выбор половины отрезка		
i	a _i	b _i	c _i	f(c _i)	b _i -a _i	f(a _i)	f(b _i)	f(a _i)*f(c _i)	f(c _i)*f(b _i)
1	0	0,785	0,3925	0,531456	0,785	1	-0,078	0,53146	-0,041
2	0,3925	0,785	0,58875	0,242885	0,3925	0,5315	-0,078	0,12908	-0,019
3	0,5882	0,785	0,68661	0,086783	0,196772	0,2437	-0,078	0,02115	-0,007
4	0,6866	0,785	0,73581	0,005482	0,098386	0,0868	-0,078	0,00048	-4E-04
5	0,7358	0,785	0,7604	-0,03585	0,049193	0,0055	-0,078	-0,0002	0,0028
6	0,7358	0,7604035	0,74811	-0,01513	0,024596	0,0055	-0,036	-8E-05	0,0005
7	0,7358	0,7481053	0,74196	-0,00481	0,012298	0,0055	-0,015	-3E-05	7E-05
8	0,7358	0,7419561	0,73888	0,000341	0,006149				

Вывод: корнем данного уравнения является середина отрезка $[a_8, b_8] = 0,73888$

Рис. 3

Метод Ньютона						
a	b	f(a)	f'(a)	f(b)	f'(b)	
0	0,785	1	-1	-0,0776	-0,707388	

$\epsilon = 0,001$				Проверка окончания	
i	x _i	f(x _i)	f'(x _i)	f(x _i)	
1	0,785	-0,0776117	-1,7068	0,077612	
2	0,7395	-0,0007423	-1,6739	0,000742	

Вывод: корнем данного уравнения является значение $x_2 = 0,73953$. Данный метод демонстрирует быструю сходимость

Рис. 4

р	Метод Дихотомии	Метод Ньютона
2	0,450762	0,45113
3	0,31584	0,317546
4	0,242246	0,243243
5	0,193184	0,196562
10	0,101191	0,99597
20	0,052129	0,049953

Вывод: При увеличении параметра p значение корня уравнения стремится к 0

Рис. 5

Далее приведена таблица с корнями уравнения $\cos(x) = px$ при различных значениях параметра p , как при использовании метода дихотомии, так и метода Ньютона (см. рис. 5).

Выводы. Использование в учебном процессе этого методического пособия показало, что оно действительно делает учебный процесс более доступным для большинства студентов. Поэтому считаем необходимым продолжить эту методическую работу, а также перенести эти методики на другие учебные предметы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. – М.: Изд-во "Высшая школа". – 1977.
- [2] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. – М.: Изд-во "Высшая школа". – 1986.
- [3] *Разработка электронного пособия*. – www.razrabotkaelektronnogoposobia.com

Использование приложений Java для учебно-методического пособия по численным методам

Подаревская Ксения Михайловна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (401 ГРУППА)

e-mail: ks.podarok@gmail.com

Если провести анализ тех учебных пособий, которые сейчас в изобилии присутствуют на специальных учебных сайтах, не трудно заметить, что большинство из них используют современные Java-технологии. В частности это могут быть небольшие приложения (апплеты), которые запускаются гиперссылкой с веб-страниц. Целью работы является модернизация существующего учебного пособия по численным методам в указанном направлении. Считаем, что такая модернизация позволит сделать это пособие более наглядным и будет более успешно применяться в учебном процессе.

В настоящее время в системе образования актуально применение компьютерных технологий, что делает обучение более интересным и привлекательным для учащихся. К таким технологиям можно отнести электронные учебники и пособия. Под электронным учебником понимается тематически завершённый, детально структурированный автором учебный материал, который через интернет или другими способами поставляется обучаемому [1]. Они обладают рядом преимуществ, главное из которых - это наглядность, так как

учебник содержит массу мультимедийных возможностей. Также к преимуществам относятся: возможность хранения большого объема информации, удобство редактирования и пользования, доступность, мобильность и др.

Электронный учебник должен содержать весь необходимый для самостоятельного обучения материал, в том числе блок практических и тестовых задания для контроля полученных знаний по заданной теме. Кроме того, в отличие от печатного учебника, электронный учебник должен обладать следующими качествами [2]:

- более детальной структуризацией содержания курса;
- разбивкой курса на небольшие блоки (страницы);
- интерактивностью - возможность изменения представления материала в зависимости от действий обучаемого, а также возможность изменения траектории обучения;
- удобной для пользователя системой навигации, позволяющей ему легко перемещаться по курсу;
- развитой гипертекстовой структурой теоретического материала в понятийной части курса (ссылки на определения), а также в логической структурой изложения (последовательность, взаимосвязь частей);
- наличием разнообразного иллюстративного материала - рисунков, картинок, графики, фото, аудио- и видео фрагментов, анимации и других мультимедиа приложений;
- наличием глоссария (автономные справочные материалы) и ссылками на глоссарий, разрабатываемые для данного курса, отдельных его модулей;
- наличием подсистемы различных практических и контрольных мероприятий для закрепления знаний, самоконтроля, контроля и оценки полученных знаний, встроенных в электронный учебник (тесты, упражнения, творческие, индивидуальные и групповые задания и др.);
- развитой системой ссылок (гиперссылок) в текстовом материале на различные электронные текстовые и графические образовательные материалы: литературные и научные источники, электронные библиотеки, словари, справочники и другие образовательные и научные ресурсы, размещенные в сети интернет.

Нам показались более привлекательными следующие примеры: <http://dvo.sut.ru/libr/sotciolo/volod/index.htm>, <http://txtb.ru/>, <http://www.zzak.ru/>.

В связи с существующими тенденциями было решено изменить существующее учебно-методическое пособие по численным методам, которое на сегодняшний день представляет собой 12 лабораторных работ, к которым прикладываются разобранные методические примеры, выполненные с использованием табличного процессора.

Не умаляя достоинства проделанной ранее работы, следует отметить, что требуется модернизация этого пособия. Поэтому было предложено использовать запускающиеся прямо с гиперссылки апплеты для тех же самых тестовых примеров.

Покажем это на конкретном примере. Рассмотрим третье задание из первой лабораторной: устойчивость и неустойчивость алгоритмов.

Пусть требуется вычислить интегралы:

$$E_k = \int_0^1 x^k \cdot e^{x-1} dx, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

интегрируя по частям:

$$\int_0^1 x^k \cdot e^{x-1} dx = x^k \cdot e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 k \cdot x^{k-1} \cdot e^{x-1} dx,$$

получаем следующую рекуррентную формулу

$$E_k = 1 - k \cdot E_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad E_1 = e^{-1}. \quad (2)$$

Задание. Составить программу вычисления E_k по формуле (2), положив $E_1 = e^{-1} + \varepsilon$ (параметр ε моделирует ошибку в задании начального условия). Вычислить $E_k, k = 1, \dots, 20$ для $\varepsilon = 0; 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}$.

Оценить результаты, принимая во внимание возможный знак и величину E_k (может ли E_k быть отрицательным, больше единицы по модулю?). Как влияет величина ε на результат вычислений по формуле (2)? Показать, что вычисляемое значение на k -ом шаге имеет вид: $E_k = E_k + k! \cdot \varepsilon$, т.е. погрешность начального значения за k шагов увеличилась в $k!$ раз!

Далее будет ссылка с текстом: "Посмотреть пример выполнения задания на Java". Нажав на нее, перейдем на страницу с выполненным заданием с помощью Java (Рис. 1).

Итак, алгоритм (2) неустойчив к погрешности исходных данных.

Приведём пример устойчивого алгоритма решения поставленной задачи. Запишем формулу (2) в виде:

$$E_k = (1 - E_k)/k, \quad k = m, m-1, \dots, 1; \quad (3)$$

k	eps=0.0	eps=1.0E-7	eps=1.0E-6	eps=1.0E-5
1	0.36787944117144233	0.36787954117144234	0.3678804411714423	0.36788944117144234
2	0.26424111765711533	0.2642409176571153	0.2642391176571154	0.2642211176571153
3	0.207276647028654	0.2072724702865402	0.20728264702865384	0.20733664702865406
4	0.17089341188538398	0.17089101188538391	0.17086941188538463	0.17065341188538374
5	0.14553294057308008	0.14554494057308043	0.14565294057307687	0.14673294057308128
6	0.1268023565615195	0.12673035656151743	0.12608235656153877	0.1196023565615123
7	0.11238350406936348	0.11288750406937798	0.11742350406922863	0.1627835040694139
8	0.10093196744509214	0.0968999674449762	0.06061196744617092	-0.3022680325553111
9	0.09161229299417073	0.12790029299521422	0.4544922929844617	3.7204122929978
10	0.0838770700582927	-0.27900292995214215	-3.544922929844617	-36.204122929978
11	0.07735222935878028	4.069032229473564	39.99415222829079	399.245352229758
12	0.07177324769463667	-47.828386753682764	-478.92982673948944	-4789.944226757096
13	0.06694777996972334	622.7690277978759	6227.087747613363	62270.27494784225
14	0.06273108042387321	-8717.766389170261	-87178.22846668708	-871782.8492697915
15	0.059033793641901866	130767.49583755393	1307674.4269988062	1.3076743739046872E7
16	0.05545930172957014	-2092278.9334008629	-2.09227898319809E7	-2.0922789882474995E8
17	0.05719187059730757	3.556874286781467E7	3.5568742814367527E8	3.556874281020749E9
18	-0.029453670751536265	-6.40237370620664E8	-6.40237370586155E9	-6.402373705737348E10
19	1.559619744279189	1.2164510042792616E10	1.2164510040713695E11	1.2164510040910962E12
20	-30.19239488558378	-2.4329020085485233E11	-2.432902008141739E12	-2.432902008182092E13

Вывод:

Пример показал, что даже при малых изменениях начальных условий приводит к появлению большой погрешности. Например, для $\text{eps}=1\text{e-}5$ свой результата произошел уже при $k=7$. В дальнейшем k увеличивается с уменьшением eps . Но даже для $\text{eps}=0$ при $k=17$ наблюдается такое же явление. То есть данный алгоритм неустойчив к погрешности исходных данных.

Рис. 1. Апплет с выполнением первой части задания.

и положим $E_m = 0$ (исследуйте поведение E_k (1) при $k \rightarrow \infty$).

Задание. Вычислите значения E_k , пользуясь формулой (3), при $E_m = 0, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$ для $m = 30$. Сравните полученные значения с вычисленными по алгоритму (2).

Посмотреть пример выполнения задания на Java (Рис. 2).

Комментарий: для проверки устойчивости вычислительного алгоритма необходимо сделать пробные пуски программы с малыми вариациями параметра, относительно которого проверяется устойчивость. Если малые изменения параметра не меняют существенно результат, то есть основания утверждать, что алгоритм устойчив. В этом случае попробуйте доказать теоретически, если возможно, устойчивость алгоритма. Если алгоритм неустойчив, необходимо выяснить, что является причиной неустойчивости – метод решения или математическая формулировка задачи, – и внести соответствующие изменения либо в метод решения, либо в формулировку задачи.

k	0.0	0.01	0.1	1.0
30	0.0	0.01	0.1	1.0
29	0.0333333333333333	0.033	0.0300000000000000	0.0
28	0.0333333333333333	0.033344827586206896	0.033448275862068964	0.034482758620689655
27	0.034523809523809526	0.03452339901477832	0.034519704433497535	0.034482758620689655
26	0.03575837742504409	0.035758392629082286	0.03575852946542602	0.035759897828863345
25	0.03708621625288292	0.03708621566811222	0.03708621040517592	0.03708615777581295
24	0.03851655134988469	0.03851655137327551	0.03851655158379296	0.03851655368896748
23	0.040061810360421474	0.04006181035944686	0.04006181035067529	0.04006181026295969
22	0.04173644302780776	0.04173644302785014	0.04173644302823151	0.041736443032045226
21	0.04355743440782692	0.043557434407824995	0.043557434407807655	0.04355743440763431
20	0.04554488407581777	0.04554488407581786	0.04554488407581868	0.04554488407582694
19	0.04772275579620911	0.047722755796209104	0.04772275579620906	0.04772275579620865
18	0.050119854958094255	0.050119854958094255	0.050119854958094255	0.05011985495809428
17	0.05277111916899477	0.05277111916899477	0.05277111916899477	0.05277111916899477
16	0.0557193459312356	0.0557193459312356	0.0557193459312356	0.0557193459312356
15	0.059017540879297774	0.059017540879297774	0.059017540879297774	0.059017540879297774
14	0.06273216394138015	0.06273216394138015	0.06273216394138015	0.06273216394138015
13	0.0669477025756157	0.0669477025756157	0.0669477025756157	0.0669477025756157
12	0.07177325364802957	0.07177325364802957	0.07177325364802957	0.07177325364802957
11	0.0773522288626642	0.0773522288626642	0.0773522288626642	0.0773522288626642
10	0.08387707010339417	0.08387707010339417	0.08387707010339417	0.08387707010339417
9	0.09161229298966059	0.09161229298966059	0.09161229298966059	0.09161229298966059
8	0.10093196744559327	0.10093196744559327	0.10093196744559327	0.10093196744559327
7	0.11238350406930084	0.11238350406930084	0.11238350406930084	0.11238350406930084
6	0.12680235656152844	0.12680235656152844	0.12680235656152844	0.12680235656152844
5	0.1455329405730786	0.1455329405730786	0.1455329405730786	0.1455329405730786
4	0.17089341188538426	0.17089341188538426	0.17089341188538426	0.17089341188538426
3	0.20727664702865395	0.20727664702865395	0.20727664702865395	0.20727664702865395
2	0.26424111765711533	0.26424111765711533	0.26424111765711533	0.26424111765711533
1	0.36787944117144233	0.36787944117144233	0.36787944117144233	0.36787944117144233

Вывод:

В этом случае алгоритм устойчив к погрешности исходных данных, так как даже задание начальной погрешности ерз не вуалируется в ходе вычислений, и получаем ожидаемое значение для k=1 равное 1/e.

Рис. 2. Апплет с выполнением второй части задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Беляев М.И. *Из опыта создания электронных учебников // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: информатизация образования.* – Москва, 2009. - № 1. С. 15-24.
- [2] Беляев М.И. *Особенности и проблемы разработки учебных материалов для электронных учебно-методических комплексов дисциплин // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: информатизация образования.* – Москва, 2011. - № 2. с. 102-106

Технологии защиты данных и анонимизации в сети Интернет

Попович Егор Александрович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

e-mail: yegor@g.if.ua

Соккрытие данных являлось одной из важных задач со времен изобретения языка. Для этого изобретались различные приспособления, другие языки, алгоритмы шифрования. С появлением компьютера и увеличением вычислительных мощностей алгоритмы модифицировались, многие старые алгоритмы оказались ненадежными. Вскоре были разработаны асимметричные алгоритмы с публичными и приватными ключами, позволяющие обмениваться публичными ключами по незащищенным каналам связи. С появлением сети интернет шифрование данных стало необходимостью. Из-за особенности структуры сети интернет возможен перехват пакетов внутри подсети. Также возможна подмена адресов серверов злоумышленниками.

Существующие технологии защиты данных в сети интернет возможно разделить на два типа, по принципу действия:

1. Создание защищенной сети поверх сети Интернет
2. Шифрованный протокол для обмена данных внутри сети Интернет

Каждый из данных типов имеет свои преимущества и недостатки. При использовании первого типа можно воспользоваться незащищенным программным обеспечением, так как защита данных возложена на ПО виртуальной сети. В то время как шифрованные протоколы требуют модифицированного ПО, в котором присутствует их поддержка. Также возможно использование обоих типов одновременно.

1. ТЕХНОЛОГИИ ЗАЩИТЫ ДАННЫХ В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

Данные технологии предназначены только для защиты передаваемых данных от подмены и чтения посторонними.

Secure Socket Layer - криптографический протокол, который обеспечивает установление безопасного соединения между клиентом и сервером. Протокол обеспечивает конфиденциальность обмена данными между клиентом и сервером, использующими TCP/IP, причём для шифрования используется асимметричный алгоритм с открытым ключом.

Transport Layer Security - криптографический протокол, обеспечивающий защищённую передачу данных между узлами в сети Интернет. Основан

на последней ревизии протокола SSL. В протокол были внесены дополнительные шаги по установке соединения, также дополнительные шифрования для управляющих команд, позволяющие более надежно определять подмену сервера.

IP Security - набор протоколов для обеспечения защиты данных, передаваемых по межсетевому протоколу IP, позволяет осуществлять подтверждение подлинности и/или шифрование IP-пакетов. IPsec также включает в себя протоколы для защищённого обмена ключами в сети Интернет. В основном, применяется для организации vpn-соединений. Протоколы IPsec, в отличие от других хорошо известных протоколов SSL и TLS, работают на сетевом уровне (уровень 3 модели OSI). Это делает IPsec более гибким, так что он может использоваться для защиты любых протоколов, базирующихся на TCP и UDP. Протокол является "надстройкой" над IP-протоколом, и обрабатывает сформированные IP-пакеты. IPsec может обеспечивать целостность и/или конфиденциальность данных передаваемых по сети.

2. ТЕХНОЛОГИИ АНОНИМИЗАЦИИ В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

Данные технологии созданные только для анонимизации и не защищают передаваемые данные.

Proxy - служба (комплекс программ) в компьютерных сетях, позволяющая клиентам выполнять косвенные запросы к другим сетевым службам. Прокси-сервер позволяет защищать клиентский компьютер от некоторых сетевых атак и помогает сохранять анонимность клиента.

3. ВИРТУАЛЬНЫЕ СЕТИ

Данный тип технологий способен обеспечить как защиту так и анонимизацию. Многие из них используют приведенные выше технологии защиты данных как свою часть.

OpenVPN, PPTP, L2TP/IPsec - набор технологий виртуальных частных сетей. Виртуальные сети эмулируют стек протоколов TCP/IP, что позволяет пользоваться приложениями, не поддерживающими протоколы защиты данных. Для обеспечения безопасности используются асинхронные алгоритмы шифрования. Также данная технология позволяет скрыть реальный IP адрес и воспользоваться адресом VPN сервера.

The Onion Router - реализации второго поколения так называемой «луковой маршрутизации». С помощью Tor пользователи могут сохранять анонимность при посещении веб-сайтов, публикации материалов, отправке сообщений и при работе с другими приложениями, использующими протокол TCP. Технология Tor обеспечивает защиту от механизмов анализа трафика. Tor оперирует сетевыми уровнями onion-маршрутизаторов, позволяя обеспечивать анонимные исходящие соединения и анонимные скрытые службы.

Invisible Internet Project - открытое программное обеспечение, созданное для организации сверхстойчивой анонимной, оверлейной, зашифрованной сети. Сеть I2P схожа по своей структуре с традиционным Интернетом и отличается лишь невозможностью цензуры благодаря использованию механизмов шифрования и анонимизации. В I2P сети нет никаких центральных серверов и нет привычных DNS-серверов, также сеть абсолютно не зависит от внешних DNS, что приводит к невозможности уничтожения, блокирования и фильтрации сети, которая будет существовать и функционировать, пока на планете останутся хотя бы два компьютера в сети. Каждый новый участник, принимающий входящие подключения от других маршрутизаторов, увеличивает надёжность, анонимность и скорость всей сети в целом. Сеть изначально была спроектирована с учётом предположения, что все промежуточные узлы являются скомпрометированными или попросту злонамеренными (принадлежащими злоумышленнику и собирающими проходящую через них информацию), поэтому для противодействия был введён ряд активных мер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Dierks, E. Rescorla *The Transport Layer Security (TLS) Protocol, Version 1.2*. – RTFM Inc, – 2008.
- [2] Andre Baccard *The Computer Privacy Handbook: A Practical Guide to E-Mail Encryption, Data Protection and PGP Privacy Software*. – Atlanta, GA : U.S.A. – 1995.
- [3] Иванов М. А. *Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях* – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, – 2001.
- [4] Столлингс В. *Основы защиты сетей. Приложения и стандарты* – М.: «Вильямс», – 2002.

Численный метод исследования спектра операторов, возникающих в некоторых задачах квантовой механики

Шаповалова Ирина Александровна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 401-П)

e-mail: mzroom26@gmail.com

Для любой науки большое значение имеет разработка новых теорий. Однако иногда необходимой является проверка на конкретных примерах тех эффектов, которые были получены теоретически. Очевидно, что сделать это можно только с использованием численного эксперимента. Если он грамотно поставлен, то полученные данные могут или опровергнуть теорию, или же дать уверенность в том, что по крайней мере в нескольких случаях результаты верны.

Поэтому в данной работе с помощью численных расчетов проверены полученные ранее предположения теоретического плана о свойствах операторов, которые возникают в задачах квантовой механики.

Квантовым графом называют метрический граф, оснащенный дифференциальным оператором, действующим вдоль ребер, с некоторыми граничными условиями в вершинах [1]. Будем рассматривать граф с n минимальными циклами. Дадим более формальное определение квантового графа.

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — граф, где V — семейство вершин, а E — множество ребер. Причем E состоит из вещественных интервалов $\Delta_k = [x_{2k-1}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, n}$, $V = \{V_i\}_{i=1}^m$ представляет собой разбиение множества концов этих интервалов. Линейная мера Лебега, индуцированная на ребра E , определяет Гильбертово пространство и пространство Соболева, состоящее из функций, непрерывных на графе Γ [3].

На графе Γ зададим оператор A_{min} , который на каждом ребре Δ_k действует как оператор двукратного дифференцирования, который в дальнейшем будем называть оператором Лапласа.

$$A_{min} = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

Рассмотрим квантовый граф с n минимальными циклами. Для простоты вычислений примем n за 1. Пусть задано два набора вещественных чисел $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ и $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ и семейство X отрезков вещественной прямой $\Delta_k = [x_{2k-1}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, 4}$. Причем линейная мера Лебега на \mathbb{R} индуцирует на

X гильбертово пространство

$$L_2(X) = \bigoplus_{k=1}^{3n+1} L_2(\Delta_k).$$

Рассмотрим на этом пространстве семейство операторов

$$A_{\alpha,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

Область определения $dom(A_{\alpha,\beta})$ задается функциями из пространства Соболева, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$(I) f(x_1) + \alpha_0 \partial_n f(x_1) = 0; f(x_8) + \beta_0 \partial_n f(x_8) = 0;$$

$$(II) f(x_3) = f(x_4) = f(x_5) = f(x_6);$$

$$(III) f(x_2) + \alpha_1 f(x_3) = 0; f(x_7) + \beta_1 f(x_6) = 0;$$

$$(IV) \sum_{m=3}^6 \partial_n f(x_m) = \alpha_1 \partial_n f(x_2) + \beta_1 \partial_n f(x_7).$$

В данном контексте $\partial_n f(x_k)$ обозначает нормальную производную функции f в точке x_k :

$$\partial_n f(x_k) = \begin{cases} f'(x_k), & \text{если } x_k \text{ — левый конец интервала;} \\ -f'(x_k), & \text{если } x_k \text{ — правый конец интервала.} \end{cases}$$

Поставим в соответствие квантовому графу Γ данное семейство операторов. Компоненты связности Γ отражают граничные условия непрерывности. Разобьем множество $\{x_i\}_{i=1}^8$ на классы, которые будут соответствовать вершинам графа Γ :

$$V_1 = \{x_1\}, V_2 = \{x_2\}, V_3 = \{x_3, x_5\}, V_4 = \{x_4, x_6\}, V_5 = \{x_7\}, V_6 = \{x_8\}.$$

Ребрами графа Γ будут соответствующие отрезки вещественной прямой длины $l_k = x_{2k} - x_{2k-1}$, $k = \overline{1,4}$.

Теперь можно более компактно записать граничные условия (I) — (IV):

$$(I) f(V_1) + \alpha_0 \partial_n f(V_1) = 0; f(V_6) + \beta_0 \partial_n f(V_6) = 0;$$

$$(II) f \text{ непрерывна в } V_3; f \text{ непрерывна в } V_4; f(V_3) = f(V_4);$$

$$(III) f(V_2) + \alpha_1 f(V_3) = 0; f(V_5) + \beta_1 f(V_4) = 0;$$

$$(IV) \partial_n f(V_3) + \partial_n f(V_4) = \alpha_1 \partial_n f(V_2) + \beta_1 \partial_n f(V_5),$$

$$\text{где } \partial_n f(V_k) = \sum_{x_i \in V_k} \partial_n f(x_i).$$

Для данного семейства операторов $A_{\alpha,\beta}$ построим простой симметрический оператор A_{min} так, чтобы каждый оператор данного семейства являлся его собственным расширением. Область определения оператора A_{min} зададим функциями из пространства Соболева, для которых имеют место равенства:

$$(a) f(V_k) = 0, k = \overline{1,4}$$

$$(b)\partial_n f(V_k) = 0, k = \overline{1, 4}$$

Известно, что оператор A_{min} имеет точечный спектр. При этом доказано, что если длины отрезков l_2 и l_3 рационально несоизмеримы, то

$$\sigma_p(A_{min}) = 0.$$

В данном случае это говорит о том, что оператор A_{min} не содержит приводящего пространства, на котором индуцируется самосопряженный оператор, то есть оператор A_{min} является простым [2].

Выберем граничную тройку $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, соответствующую оператору A_{min}^* такую, что относительно нее все операторы $A_{\alpha, \beta}$ являются почти разрешимыми

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$$

$$\Gamma_0 f = (\partial_n f(V_1), \partial_n f(V_2), f(V_3), \partial_n f(V_4), \partial_n f(V_5), \partial_n f(V_6))^T,$$

$$\Gamma_1 f = (-f(V_1), -f(V_2), \partial_n f(V_3), -f(V_4), -f(V_5), -f(V_6))^T.$$

Для такого выбора граничной тройки выполняется $\mathfrak{D}(A_{\alpha, \beta}) = \ker(\Gamma_1 - B_{\alpha, \beta}\Gamma_0)$, где матрица $B_{\alpha, \beta}$ имеет вид

$$B_{\alpha, \beta} = \text{diag}\{\alpha_0, B_1, \beta_0\},$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & -1 & \beta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Функция Вейля-Титчмарша $M(\alpha)$ для данной граничной тройки $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ имеет блочно-диагональный вид

$$M(\lambda) = \text{diag}\{M_1(\lambda), N_1(\lambda), M_2(\lambda)\},$$

где

$$M_1(\lambda) = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \cot \mu l_1 & \csc \mu l_1 \\ \csc \mu l_1 & \cot \mu l_1 \end{pmatrix}$$

$$N_1(\lambda) = \frac{1}{\mu \sin \mu(l_2 + l_3)} \begin{pmatrix} 2\mu^2(1 - \cos \mu(l_2 + l_3)) & -\mu(\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3) \\ -\mu(\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3) & \sin \mu l_2 \sin \mu l_3 \end{pmatrix}$$

$$M_2(\lambda) = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \cot \mu l_4 & \csc \mu l_4 \\ \csc \mu l_4 & \cot \mu l_4 \end{pmatrix}$$

Сформулируем без доказательства утверждение. Пусть A — простой замкнутый симметрический оператор, и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* . Если $\lambda \in \rho(A_\infty)$, то выполняется

$$\lambda \in \sigma(A_{\alpha, \beta}) \Leftrightarrow \det(B_{\alpha, \beta} - M(\lambda)) = 0 [2].$$

Если $\sigma(A_{\alpha, \beta}) = \sigma(A_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}})$, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1), \beta = (\beta_0, \beta_1)$, то либо $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_1, \beta_0 = \tilde{\beta}_1$, либо $\alpha_0 = \tilde{\beta}_0, \beta_0 = \tilde{\alpha}_0$. Вопрос о соотношении нелокальных параметров (α_1, β_1) и $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ остается открытым. Поэтому была поставлена задача численными методами выяснить, зависит ли спектр соответствующих операторов от выбора этих параметров.

Численные результаты показали следующее: если $\alpha_1 = \pm \tilde{\alpha}_1, \beta_1 = \pm \tilde{\beta}_1$ или $\alpha_1 = \pm \tilde{\beta}_1, \beta_1 = \pm \tilde{\alpha}_1$, то спектры операторов совпадают. В остальных случаях согласно расчетам получаются различные результаты для собственных значений операторов $A_{\alpha, \beta}$ и $A_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$. В дальнейшем планируется рассмотреть дополнительные соотношения для нелокальных параметров и их влияние на спектр операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ruedenberg K., Scherr C. W. Free-electron network model for conjugated systems, I. Theory // J. Chem. Phys. 21(1953), 1565 — 1581.
- [2] Карпенко И.И., Кандагура А.Н. Конструкция граничных троек для квантового графа с нелокальными граничными условиями // Ученые записки ТНУ, Том 25 (64) № 2 (2012), с.56 — 71.
- [3] Kuchment P. Quantum graphs: an introduction and a brief survey // arXiv:0802.3442v1 [math-ph] 23 Feb 2008.

Секция ИНФОРМАТИКИ

Метрические алгоритмы классификации в задачах оптимизации с прецедентной начальной информацией*Бадудина Елена Сергеевна*ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 401-И)

e-mail: badudina@gmail.com

Задача оптимизации в общем виде выглядит следующим образом:

$$\text{extr } f(x)/x \in \Omega \subseteq X,$$

где $f : X \rightarrow Y$ — целевая функция, оптимальный (близкий к оптимальному) аргумент x^* которой требуется отыскать в ходе решения задачи, X — множество объектов, Y — множество значений (ответов) и Ω — множество (область) допустимых решений (ОДР), из которого выбирается оптимальное решение x^* .

В реальных практических задачах, имея дело с моделированием нестационарных и плохо определенных процессов, проблематичным представляется формализация задачи. Существуют различные методы поиска решения задачи оптимизации, они классифицируются в зависимости от целевой функции и допустимой области, что подразумевает их определенность. Если в оптимизационной задаче функции f и/или область допустимых решений Ω заданы не полностью, то говорят о задаче оптимизации с неполными данными $I(f, \Omega)$. Открытым остается вопрос поиска решения слабоопределенной задачи оптимизации с неполными данными. В этом случае, если начальная информация представлена набором прецедентов, могут быть применены метрические алгоритмы классификации. Метрическими будем называть методы обучения, основанные на анализе сходства объектов, даже если функция расстояния не удовлетворяет всем аксиомам метрики. Данные алгоритмы основаны на гипотезе компактности, предполагающей, что схожие (по некоторой метрике) объекты расположены внутри одного класса, а объекты далекие по метрике в разных.

В зависимости от определенности целевой функции и задания ограниченной допустимой области, существуют различные типы задач оптимизации с неполными данными, которые подробно рассматриваются в работе В. И. Донского [1]. Далее будут рассматриваться задачи двух типов:

- (1) Целевая функция f задана точно, а множество Ω задано частично перечислением точек из двух конечных множеств $W1$ и $W2$, для которых заведомо известно, что $W1 \subset \Omega$ и $W2 \subset X \setminus \Omega$; $I(f, \Omega) = \{f, W1, W2\}$.
- (2) Задачи с заданной системой ограничений, но с частичной заданной целевой функцией. Информация о целевой функции представляет собой набор прецедентов $\{(x_i, f_i = f(x_i))_{i=1}^{\ell}\}$, который обозначим f_{Δ} ; $I(f, \Omega) = \{f_{\Delta}, \Omega\}$.

Исходными данными задачи первого типа является выборка состоящая из «положительных» и «отрицательных» объектов, то есть тех, которые входят в допустимую область и тех, которые находятся за ее пределами (вторых обычно гораздо меньше). Исходя из этих данных необходимо восстановить область допустимых решений, то есть столкнуться с задачей классификации. Для этого, используя метрические алгоритмы классификации, необходимо найти границу между классами «положительных» и «отрицательных» объектов. Поскольку решается задача оптимизации, при восстановлении допустимой области в весовых функциях алгоритмов классификации будет учитываться отдаленность объектов выборки от целевой функции.

Обобщенный метрический классификатор можно записать в виде:

$$a(u; X^{\ell}) = \arg \max_{y \in Y} \Gamma_y(u, X^{\ell})$$

$$\Gamma_y(u, X^{\ell}) = \sum_{i=1}^{\ell} [y_u^{(i)} = y] \omega(i, u)$$

$$\omega(i, u) = \begin{cases} 1, & f(u) = f(x_i); \\ \frac{1}{|f(u) - f(x_i)|}, & f(u) \neq f(x_i); \end{cases}$$

где u — классифицируемый объект, $y_u^{(i)}$ — метка класса i -го соседа объекта u , $\Gamma_y(u, X^{\ell})$ — суммарный вес ближайших к u обучающих объектов из X^{ℓ} , $\omega(i, u)$ — весовая функция, оценивающая степень важности i -го соседа для классификации объекта u , $f(u)$ — значение целевой функции на объекте u .

При решении задачи второго типа имеется ОДР, представленная системой ограничений, и целевая функция, которая определена только частично. Целевая функция задана как набор объектов, на которых известно ее значение, и для восстановления неизвестной ее части необходимо перейти к задаче регрессии.

Но в реальной жизни приходится сталкиваться с задачами, в исходной модели которых не определены полностью ни допустимая область, ни целевая функция. Таким образом, актуальной становится проблема построения схем

решения оптимизационных задач с прецедентной начальной информацией, в которых процессы восстановления целевой функции и области допустимых решений выполняются совместно друг с другом, «обмениваясь» между собой необходимой информацией. При построении таких схем важно учитывать, что решается именно задача оптимизации, а не две различные задачи обучения [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Донской В.И. *Дискретные модели принятия решений при неполной информации на основе синтетического подхода*; дис. доктора физ.-мат. наук : 05.13.17 / Донской Владимир Иосифович. — Симферополь, 1993. — 267с.
- [2] Воронцов К.В. *Математические методы обучения по прецедентам. Курс лекций по машинному обучению*, [Электронный ресурс] / К.В.Воронцов. — 2011. — 141с. Режим доступа к курсу: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf>
- [3] Анафиев А.С. *Подход к решению задач оптимизации с прецедентной начальной информацией* // Таврический вестник информатики и математики. — Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. — 12с.

Методы сетевого планирования и управления

Болдырев Денис Олегович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: Arc3111@gmail.com

Методы сетевого планирования и управления широко используются в задачах календарного планирования масштабных проектов. До появления сетевых методов календарное планирование программ осуществлялось в небольшом объеме, в основном с использованием линейного графика Гантта, задававшего сроки начала и окончания каждой операции на горизонтальной шкале времени. Идея Гантта состояла в том, что главным ресурсом планирования является время, а основой принятия управленческих решений – сравнение запланированного и фактического состояния работ.

СПУ – это сочетание как расчетных методов, так и организационных мероприятий и контрольных приемов. Основано СПУ на графическом изображении комплекса работ, т.е. работы в их логической и временной последовательности представляются графической моделью – *сетевым графиком*, который является первым этапом построения сетевой модели этого комплекса или проекта работ.

Среди способов представления исходных данных для построения модели различают:

- (1) *табличный способ*, который представляет перечень всех работ, указание их длительности и предшествующих им работ в виде таблицы.
- (2) *матричный способ* описания сетевой модели задается в виде отношения между событиями (S_i, S_j) , которое равно 1, если между этими событиями есть работа (либо реальная, либо фиктивная) и 0 – в противном случае.
- (3) *диаграмма Ганта*, состоящие из нескольких временных осей, на которых откладывают длительность каждой работы с учетом предшествования.

Главными элементами *сетевой модели* являются работы и события:

- *работа (процесс)* – это материальное или логическое действие, имеющее некоторую длительность выполнения; различают такие работы как *действие* (реально выполняемая работа), *ожидание* (завершение работы без участия исполнителей), *зависимость* (логическая взаимосвязь, следование);
- *событие* – это момент завершения некоторого этапа или результат выполнения одной или нескольких работ; событие не имеет протяженности во времени; событие считается свершившимся, если завершены все предшествующие ему работы; среди событий выделяют два особенных – *исходное* и *завершающее*.

В сетевой модели роль вершин графа могут играть события, определяющие начало и окончание отдельных работ, а дуги в этом случае будут соответствовать работам. Такую сетевую модель принято называть *сетевой моделью с работами на дугах* (Activities on Arrows, AoA).

В то же время, возможно, что в сетевой модели роль вершин графа играют работы, а дуги отображают соответствие между окончанием одной работы и началом другой. Такую сетевую модель принято называть *сетевой моделью с работами в узлах* (Activities on Nodes, AoN).

Преимущество сетевых графиков и временных диаграмм перед табличной и матричной формами представления состоит в их наглядности. Однако это преимущество исчезает, как только увеличиваются размеры сетевой модели. Для реальных задач сетевого моделирования, в которых речь идет о тысячах работ и событий, вычерчивание сетевых графиков и диаграмм теряет всякий смысл.

Преимущество табличной и матричной формы перед графическими представлениями состоит в том, что с их помощью удобно осуществлять анализ параметров сетевых моделей; в этих формах применимы алгоритмические процедуры анализа, выполнение которых не требует наглядного отображения модели на плоскости.

Метод оценки и пересмотра планов (PERT) представляет собой разновидность анализа по методу критического пути с более критичной оценкой продолжительности каждого этапа проекта. Этот метод используется, когда для операции сложно задать и определить точную длительность.

При использовании этого метода необходимо оценить *наименьшую* возможную продолжительность выполнения каждой работы, *наиболее вероятную* продолжительность и *наибольшую* продолжительность на тот случай, если продолжительность выполнения работы будет больше ожидаемой. Метод PERT допускает неопределенность продолжительности операций и анализирует влияние этой неопределенности на продолжительность работ по проекту в целом. Он позволяет определять вероятности окончания проекта в заданные периоды времени и к заданным срокам.

Вместо одной детерминированной величины продолжительности для работ проекта задаются три оценки длительности: оптимистическая (работа не может быть выполнена быстрее, чем за t_a); пессимистическая (работа не может быть выполнена медленнее, чем за t_b); наиболее вероятная t_n ;

Затем вероятностная сетевая модель превращается в детерминированную путем замены трех оценок продолжительностей каждой из работ одной величиной, называемой ожидаемой продолжительностью $t_{\text{ожид}}$ и рассчитываемой как средневзвешенное арифметическое трех экспертных оценок длительностей данной работы: $t_{\text{ожид}} = (t_a + t_b + t_n)/6$

Первоначально PERT-анализ был известен под названием PERT/Time (PERT-анализ для определения времени реализации проекта).

Позднее в методику были внесены дополнения к логической сети, а именно, функции ресурсной оценки. Так в 1962 году появилась PERT/Cost-методика (PERT-анализ с целью стоимостного прогнозирования). Это позволяет точно знать, что требуется делать в каждый момент времени и кто именно должен это делать, а также какова вероятность своевременного завершения отдельных операций.

Метод PERT для вычисления длительности проекта имеет существенный недостаток. Там принимается предположение, что критический путь проекта

остаётся одинаковым при любых возможных условиях. Однако в определенных обстоятельствах может произойти передвижка критического пути с одного набора операций на другой, в итоге вычисляемая для постоянного критического пути дата завершения проекта окажется неверной.

Microsoft Project разработан в помощь менеджеру проекта в составлении планов, распределении ресурсов по задачам, отслеживании прогресса и анализе объёмов работ. Microsoft Project создаёт расписания критического пути. Расписания могут быть составлены с учётом используемых ресурсов. Цепочка визуализируется в диаграмме Гантта.

Рассмотрим пример разработки проекта от постановки задачи до оценки временных затрат, вначале на основе построения сетевого графика и нахождения критического пути методом динамического программирования, а затем с использованием средств MS Project.

Постановка задачи.

Необходимо разработать сайт невысокой сложности, который состоит из нескольких страниц описывающих компанию-производителя, каталог товаров, форму обратной связи. Помимо этого, сайт должен в себя включать версии для стационарных компьютеров и мобильных устройств.

ТАБЛИЦА 1. Табличное представление начальных данных.

Работа	Время выполнения	Предшествующие работы
Продумывание идей	3 дня	-
Создание дизайн-макета	5 дней	Продумывание идей
Вёрстка шаблонов(HTML + CSS)	5 дней	Создание дизайн-макета
Проектирование базы данных	2 дня	Продумывание идей
Программирование	12 дней	Проектирование базы данных
Вёрстка шаблонов XSL	7 дней	Вёрстка шаблонов(HTML + CSS)
Наполнение сайта	15 дней	Программирование, Вёрстка шаблонов XSL
Раскрутка	10 дней	Наполнение сайта

Решение методом критического пути

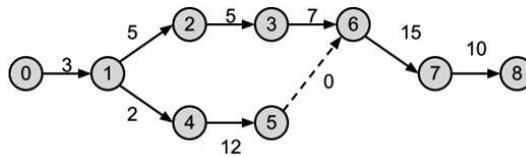


Рис. 1. Сетевой график

1. Построение сетевого графика

2. Расчет временных параметров событий и работ

Ранее время наступления событий:

$$T_p(0) = 0; T_p(1) = 3; T_p(2) = 8; T_p(3) = 8 + 5 = 13; T_p(4) = 5;$$

$$T_p(6) = \max\{T_p(3) + 7, T_p(5) + 0\} = 20;$$

$$T_p(7) = T_p(6) + 15 = 35; T_p(8) = 35 + 10 = 45;$$

Позднее время наступления событий:

$$T_n(8) = T_n(8) = 45; T_n(7) = T_n(8) - 0 = 35; T_n(6) = T_n(7) - 15 = 20;$$

$$T_n(5) = T_n(6) - 0 = 20; T_n(4) = T_n(5) - 12 = 8; T_n(3) = T_n(6) - 7 = 13$$

$$T_n(2) = T_n(3) - 5 = 8; T_n(1) = \min\{T_n(2) - 5, T_n(4) - 2\} = 3;$$

$$T_n(0) = T_n(1) - 3 = 0$$

Резервы времени событий:

$$R(0) = 0; R(1) = 0; R(2) = 0; R(3) = 0; R(4) = 3; R(5) = 3;$$

$$R(6) = 0; R(7) = 0; R(8) = 0.$$

Полные резервы времени работ:

$$r_n(0, 1) = 3 - 0 - 3 = 0; r_n(2, 3) = 13 - 8 - 5 = 0; r_n(5, 6) = 20 - 17 - 0 = 3$$

$$r_n(1, 2) = 8 - 3 - 5 = 0; r_n(3, 6) = 20 - 13 - 7 = 0; r_n(6, 7) = 35 - 20 - 15 = 0$$

$$r_n(1, 4) = 8 - 3 - 2 = 3; r_n(4, 5) = 20 - 5 - 12 = 3; r_n(7, 8) = 45 - 35 - 10 = 0$$

3. Критический путь включает события 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8

В критический путь не входят события 4 и 5, а также работы (1, 4), (4, 5) и (5, 6). Это означает, что все работы, кроме проектирования базы данных и программирования, должны быть выполнены точно по графику. Программирование и проектирование базы данных может выполняться более длительное время (до трех дней задержки).

Решение с использованием MS Project

1. В рабочем поле столбцы «Название задачи» и «Длительность» заполняются в соответствии с данными таб.1. Поля «Начало» и «Окончание» заполняются автоматически. В правой части окна отображается диаграмма Гантта.

2. Определяются зависимости между работами путем перетаскивания последующих отрезков к окончанию предыдущих.

3. Для определения критического пути на вкладке «Формат» отмечается пункт «Критические задачи» с дополнительной пометкой флажком «Временной резерв». На диаграмме Гантта критический путь выделен красным цветом. Некритические работы проекта окрашены синим. Длительность проекта 45 дней.

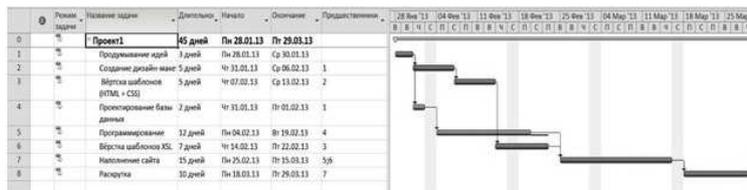


Рис. 2. Отображение результата

Как видно, MS Project дает тот же результат, что был получен ранее, но без ручных расчетов промежуточных временных параметров, что особенно ценно при анализе масштабных проектов.

Если в постановку задачи включить еще параметры использования ресурсов и оплаты, то MS Project представит сводку по ресурсам, которая позволит провести оптимизацию проекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Богданов В. *Иллюстрированный самоучитель по Microsoft Project*. [Электронный ресурс]. URL: <http://bogdanov-associates.com> (дата обращения 19.10.2012)
- [2] Голенко-Гинзбург Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками* / Д.И. Голенко-Гинзбург. Монография. – Воронеж: «Научная книга», – 2010. – С. 284.
- [3] Таха Х. *Введение в исследование операций* / Хемди А. Таха – М., СПб., К.: – 2005. – С. 578.

Модели потребительского выбора при неполной информации

Быченко Богдан Игоревич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: _badri5@rambler.ru

Одним из важных разделов математической экономики является класс моделей потребительского выбора, предполагающих поиск потребителем оптимального набора благ, который доставлял бы максимальную полезность при имеющемся бюджетном ограничении.

Такие задачи достаточно хорошо формализуются в рамках моделей нелинейного математического программирования и допускают получение оптимального решения в аналитической форме при условии полной информированности. Однако специфика целевых функций – функций полезности – такова, что далеко не всегда удастся получить количественные оценки параметров модели. Это приводит к постановке задач принятия решений при неполной информации.

В случае, когда в процессе принятия решений участвует несколько индивидов, целью которых является поиск оптимального распределения вектора полных ресурсов, возникает задача коллективного выбора решений на основе отношения коллективного предпочтения или коллективной функции полезности.

В качестве математической модели коллективного выбора рассматривается модель Стоуна:

$$\begin{cases} \{\max u(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}\} \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I; \quad (\tilde{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Здесь a_i – минимально необходимые количества благ, α_i – коэффициенты относительной полезности благ. Предполагается, что величина бюджета удовлетворяет условию $I > \sum_{i=1}^n p_i a_i$.

Минимизируя функцию Лагранжа $L(\tilde{x}, \lambda) = u(\tilde{x}) + \lambda((\tilde{p}, \tilde{x}) - I)$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\alpha_i}{(x_i - a_i)} u(\tilde{x}) + \lambda p_i = 0; (i = \overline{1, n}) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = (\tilde{p}, \tilde{x}) - I = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы позволяет найти оптимальный потребительский набор:

$$x_i^0 = a_i + \frac{\alpha_i(I - \sum_{i=1}^n p_i a_i)}{p_i \sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2)$$

Здесь предполагается, что набор коэффициентов $\{\alpha_i\}$, т.е. коэффициентов относительной полезности благ, известен.

Однако именно выбор этих параметров модели представляет определенную проблему. Потребитель может задать эти коэффициенты произвольно, исходя из собственных оценок полезности для каждого блага. Однако этот выбор будет весьма субъективным, и модель Стоуна даст формально оптимальное, но не всегда наилучшее для данного индивида решение.

Возникает вопрос, как задать набор коэффициентов относительной полезности, основываясь на имеющейся начальной информации.

Предположим, что на некотором известном множестве наборов товаров

$$D = \{\tilde{x}^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)\}_k \quad (3)$$

потребитель способен задать строгий порядок, отражающий его предпочтения:

$$\tilde{x}^1 \succ \tilde{x}^2 \succ \dots \succ \tilde{x}^k, \quad (4)$$

и таким образом задающий соответствующий порядок для значений полезности:

$$u(\tilde{x}^1) > u(\tilde{x}^2) > \dots > u(\tilde{x}^k). \quad (5)$$

В таком случае для линейной функции полезности на основе начальной информации (3) набор ее коэффициентов может быть восстановлен с помощью алгоритма линейной коррекции [3].

Нелинейная функция Стоуна является непрерывной, выпуклой и допускает путем логарифмирования линеаризацию

$$\ln(u(\tilde{x})) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - a_i),$$

сохраняющую соответствие условий (4) и (5).

К полученной функции, линейной по параметрам, также можно применить алгоритм восстановления, основанный на линейной коррекции. Полученный набор коэффициентов $\{\alpha_i\}_n$ послужит доопределением модели Стоуна и позволит найти оптимальное решение.

Большой интерес представляет также задача коллективного выбора оптимального распределения вектора ресурсов и способы ее решения с использованием коллективного отношения предпочтения и на основе коллективных функций полезности.

Рассматривается набор товаров $\Omega \in R_+^l$ ($\Omega = (\omega_1 \dots \omega_l)$), относительно которого предполагается, что он всем известен и представляет полные резервы экономики. Вектор Ω называется вектором *полных ресурсов*.

Задача состоит в *оптимальном* распределении вектора Ω между m потребителями. На i -го участника экономики приходится набор товаров $\tilde{x}^i = (x_1^i, \dots, x_l^i)$, $i=1, \dots, m$. При этом $\tilde{x}^1 + \dots + \tilde{x}^m = \Omega$.

Если на основе индивидуальных предпочтений получить некоторое коллективное отношение предпочтения, то по теореме Эрроу о невозможности [5], не удастся найти оптимальное распределение вектора полных ресурсов.

Введение коллективных функций полезности вида

$$\begin{cases} u_s^\alpha = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \\ \alpha_i \geq \forall_i, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \end{cases}$$

позволяет найти множество парето-оптимальных распределений вектора полных ресурсов. Однако вновь возникает вопрос выбора набора параметров $\{\alpha_i\}$.

Для применения процедуры линейной коррекции к задаче восстановления по некоторой начальной информации такого набора коэффициентов вводится ряд допущений: 1) индивидуальные целевые функции u_i известны; 2) в качестве начальной информации выбирается конечное подмножество допустимых распределений, где с помощью правила элементарного уравнивания определяется порядок $X_1 \succ X_2 \succ \dots \succ X_k$, которому должна соответствовать коллективная функция полезности: $u_s^\alpha(X_1) > u_s^\alpha(X_2) > \dots > u_s^\alpha(X_k)$.

Таким образом, удается и в этом случае получить необходимые начальные данные для применения алгоритма линейной коррекции для восстановления набора коэффициентов коллективной функции полезности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику / С.А.Ашманов – М.: Наука, 1984.
- [2] Донской В.И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации / В.И. Донской, А.И. Башта. – Симферополь: Таврия, 1992. – 165 с.
- [3] Руденко Л.И. О развитии подходов к принятию решений при не полной информации // Учёные записки Таврического национального университета им. В.И.Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2001. – №1. – С.93 – 95.

[4] Руденко Л.И. Моделирование в экономике при неполной информации // Культура народов Причерноморья. – 2001. – № 16, – С. 39 – 44.

[5] Экланд И. Элементы математической экономики / И. Экланд – М.: Мир, 1983. – 248 с.

Разработка игрового приложения “Пятнашки” для ОС Android

Ганиева Эвелина Акимовна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 401)

e-mail: ganieva.evelina25@mail.ru

Многие задачи, в частности игры и головоломки, могут быть представлены как задачи поиска в пространстве состояний. Эти задачи связаны с нахождением ключа поиска среди заданного множества. Для решения такого типа задач не существует единого алгоритма, который бы наилучшим образом подходил для всех случаев. Некоторые из них выполняются быстрее остальных, но для работы требуется дополнительная оперативная память. Другие выполняются быстро, но их применяют только для предварительно отсортированных массивов. В отличие от алгоритмов сортировки, в алгоритмах поиска нет проблемы устойчивости, но при их использовании возникают другие сложности [2].

Методы поиска в пространстве состояний применяются для решения следующих задач:

- комбинаторные задачи;
- задачи синтаксического анализа;
- задачи распределения;
- задачи управления;
- логические задачи и головоломки и т.д.

«Пятнашки» - популярная головоломка, придуманная в 1878 году *Ноем Чепменом*. Представляет собой набор одинаковых квадратных фишек с нанесёнными числами, заключённых в квадратную коробку. Длина стороны коробки в четыре раза больше длины стороны фишки для набора из 15 элементов (и в три раза больше для набора в 8 элементов), соответственно в коробке остаётся незаполненным одно поле. *Цель игры* — перемещая фишки по коробке, добиться упорядочивания их по номерам, сделав как можно меньше перемещений [1].

Для поиска решения данной задачи существует ряд алгоритмов. Это простые алгоритмы поиска: поиск в ширину и в глубину; алгоритмы эвристического поиска: «жадный» алгоритм и алгоритм A* [2].

Наиболее простым при программной реализации является алгоритм, использующий *манхэттенское расстояние* (подсчет количества перемещений) между кубиком и целью:

$$\rho = \text{abs}(X_{\text{к}} - X_{\text{ц}}) + \text{abs}(Y_{\text{к}} - Y_{\text{ц}})$$

Например, если кубик, помеченный единицей ($X_{\text{ц}} = 0, Y_{\text{ц}} = 0$), находится в ячейке (1, 2) коробки, расстояние для него равно:

$$\text{abs}(1 - 0) + \text{abs}(2 - 0) = 3.$$

Для игры «Пятнашки» манхэттенское расстояние всегда будет оптимальной оценкой. Действительно, переместить кубик, помеченный единицей, в верхний левый угол коробки не удастся быстрее, чем за три хода. Сумма расстояний, вычисленных для каждого из кубиков, и будет составлять эвристику вершины [3]. Опишем функцию, вычисляющую манхэттенское расстояние:

```

public int[] GetInv(){
    int st[] = new int[n*n - 1], res[] = new int[2];
    int i, k, j, s, zero = 0;
    for(i=0, k=0; i<n; i++){
        for(j=0; j<n; j++){
            if(a[i][j] != 16){
                st[k] = a[i][j];
                k++;
            }
            else{
                zero = i + j;
            }
        }
    }
    s = 1;
    k = 0;
    while(s == 1){
        i = 0;
        s = 0;
        while(i < n*n - 2){
            if(st[i] > st[i+1]){
                k++;
                s = 1;
                j = st[i];
                st[i] = st[i+1];
                st[i+1] = j;
            }
            i++;
        }
    }
    res[0] = k;
    res[1] = zero;
    return res;
}

```

Также можно показать, что ровно половину из всех возможных $16!$ начальных положений пятнашек невозможно привести к собранному виду: пусть квадратик с числом i расположен до (если считать слева направо и сверху вниз) k квадратиков с числами меньшими i . Будем считать $n_i = k$, то есть,

если после фишки с i -м числом нет чисел, меньших i , то $k = 0$. Введем число e — номер ряда пустой клетки (считая с 1). Если сумма

$$N = \sum_{i=1}^{15} n_i + e.$$

является нечётной, то решения головоломки не существует, иначе — существует [1]. Разрешимость перестановки реализуется с помощью следующей функции:

```
public boolean IfSolve()
{
    int rdt[];
    rdt = GetInv();
    if((rdt[0]+rdt[1])%2 == 0)
    {
        return true;
    }
    else
    {
        return false;
    }
}
```



Рис. 1. Скриншот игрового приложения "Пятнашки"

Для обобщённых пятнашек (с большим, чем 15, количеством фишек) задача поиска кратчайшего решения является NP -полной. Если повернуть коробку на 90 градусов, то можно перевести неразрешимые комбинации в разрешимые и наоборот [1].

В качестве программного комплекса было разработано игровое приложение «Пятнашки» в *IDE Eclipse* на языке *Java* для ОС *Android*. Скриншот приложения представлен на рис. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пятнашки [Электронный ресурс]. <http://ru.wikipedia.org/>
- [2] Люгер Дж.Ф. *Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е издание: Пер. с англ.* – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. — 864 с.
- [3] Мозговой М.В. *C++ Мастер-класс. 85 нетривиальных проектов, решений и задач.* – СПб.: Наука и техника, 2007. — 272 с.

Получение оценок релевантности web-страниц на основе анализа ссылок

Голубцов Александр Александрович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: alex.8fmi@gmail.com

Целью работы алгоритма является осуществление релевантного поиска в коллекции документов, посредством анализа ссылочной структуры. Алгоритм дает возможность упорядочить результаты поиска, в соответствии с оценкой важности информации, представленной в документе.

В отличие от документов, хранящихся в базах данных, отдельно взятых учреждений, либо пользовательских жестких дисках, контент Web-а не регламентирован. Следовательно, намеренное создание мошеннических страниц способно превратить традиционные методики информационного поиска в практически бесполезные. В этой ситуации на помощь приходят методы оценки ссылок (link analysis). Оценка ссылок стала первым и значительным усовершенствованием быстрого и точного поиска в наборе связанных друг с другом документов, таких как веб-страницы.

Существует несколько алгоритмов оценки ссылок. Наиболее известные из них - это HITS (представленный компанией IBM) и PageRank компании Google. Наибольшее распространение получил второй, кроме самой Google на

его основе работают такие поисковые системы, как Нигма [9]. Алгоритм является наиболее задокументированным и хорошо описанным, к тому же существует огромное количество развернутых описаний сторонних разработчиков, использующих его принципы работы.

Свой алгоритм компания Google представила в 1998 году на конференции World Wide Web (WWW98) [2]. Он получил название PageRank.

Идея, положенная в основу алгоритма - рассмотрение гиперссылок, ведущих с одной страницы на другую, как рекомендации или подтверждения важности/актуальности целевой страницы. Таким образом, чем больше подтверждений страницы, тем выше степень ее важности. Другими словами, если на некую страницу ссылаются другие страницы, являющиеся важными, то целевая страница так же является важной.

Алгоритм начинается с серфера, который случайным образом переходит по Интернет-страницам [2]. Он может начать с любой из заданных веб-страниц. Оттуда следуя по одной из внешних ссылок, он передвигается на следующую страницу. И так далее. Если перемещения пользователя действительно случайны, он, двигаясь по ссылочной структуре, посетит определенные страницы, тем самым повысив их важность.

Однако существуют некоторые проблемы:

- (1) В Интернете существуют страницы, не указывающие ни на какие другие страницы. Так называемые, висячие узлы (*dangling nodes*) [3].
- (2) Серфер может перейти с одной страницы на другую, не следуя ссылочной структуре (например посредством введения прямого URL-адреса в адресную строку браузера).

Для разрешения этих проблем вводится понятие случайного скачка [2], означающее что как только пользователь окажется в висячем узле - он сможет перейти в любой другой узел графа, и дополнительный параметр, определяющий вероятность совершения этого скачка. Будем называть его *alpha*.

Взаимосвязи между веб-страницами можно представить в виде направленного графа [4]. Узлами графа представлены веб-страницы, ребрами - гиперссылки, их связывающие. Опираясь на этот граф может быть построена матрица гиперссылок (*hyperlink matrix*) H размерностью $n \times n$, где n - количество страниц в индексе. Каждая строка матрицы H формируется как результат подсчета количества всех внешних ссылок N_i , имеющихся на странице P_i и присваивание элементу в столбце j значения $\frac{1}{N_i}$, если на странице P_i есть внешняя ссылка на страницу P_j , или значения 0 в обратном случае.

Следует отметить некоторые свойства матрицы H :

- (1) Все значения матрицы меньше либо равны 1. Существует связь между переходами в рассматриваемом графе и теорией вероятности перехода матриц, так же известной как теория цепей Маркова [6]. По сути это цепь Маркова, с матрицей переходов H , где каждая web-страница представляет собой одно из состояний цепи [7].
- (2) Матрица является разреженной (большинство ее значений - нули). Это следствие того факта, что веб-старница содержит ссылки лишь на небольшое относительно количества всех веб-страниц в сети Интернет число других страниц.
- (3) Каждая строка матрицы H является вектором PageRank соответствующей страницы.

На этом этапе необходимо учесть скачки, описанные выше. Для этого матрица H преобразуется в, так называемую, матрицу G (Google). Формально это преобразование можно показать так [4]:

$$G[i][j] = \alpha \cdot H[i][j] + DG[i][j] + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{n}$$

где DG - матрица висячих узлов (dangling nodes), i и j - индексы строк и столбцов соответственно ($i \in [0, n - 1], j \in [0, n - 1]$);

Матрица DG соответствует матрице H , где каждый элемент равен 0, если он содержит хотя бы одну внешнюю ссылку и 1 в обратном случае.

Параметр α принимает значения из промежутка $[0; 1]$. По мере приближения значения параметра к 0, значения PageRank приближаются к $\frac{1}{n}$. Именно это значение ожидает получить серфер, не следующий ссылочной структуре, а выбирающий страницы для посещения случайным образом. Соответственно при значениях α близких к 1, значения вектора PageRank будут сходиться к вектору PageRank, который соответствует серферу, точно следующему ссылочной структуре.

Таким образом очень важен подбор правильного значения параметра α . В поисковой системе Google используется значение, равное 0,85 [1]. В общем случае значения из промежутка $[0.7; 0.9]$, зависящие от числа документов в индексе, обеспечивают хороший баланс между следованием структуре и случайным выбором.

Вектор PageRank вычисляется по следующей итеративной формуле:

$$p(k + 1) = p(k) \times G, p(0) = \frac{1}{n}$$

Вычисления происходят посредством степенного метода с заданным критерием сходимости [5]. Важно выбрать достаточно малый критерий сходимости. Он также зависит от числа документов в индексе. Так, например, в сети Интернет около 10^{10} страниц, для осуществления поиска по всем страницам критерий сходимости должен иметь значение порядка 10^{-10} . Величина критерия сходимости – это минимальная разность между двумя последовательными векторами p , при достижении которой алгоритм заканчивает свою работу [5]. Полученные оценки PageRank можно комбинировать с результатами работы поисковых систем. Например, систем, основанных на алгоритме TF/IDF [8].

Алгоритм PageRank был рассмотрен, как универсальное средство борьбы с мошенническими интернет-страницами и спамом. Он предоставляет возможность отсеять потенциально вредоносные страницы на этапе поиска.

В работе алгоритм используется как фильтр для страниц, специальным образом составленным для поисковых машин и не несущих в себе никакой полезной информации. Поскольку количество ссылок на спам-страницы крайне мало, по сравнению с количеством полезных ссылок, такие страницы получают наименьшую оценку, тем самым опускаясь на нижние позиции в списке результатов поиска. А введя некоторое ограничение на минимальную оценку релевантности можно и вовсе исключить нежелательные, а возможно и вредоносные, страницы. Также следует заметить, что имеет смысл применять описанный алгоритм только при большом количестве документов в индексе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M.Richardson, A.Prakash, E.Brill. *Beyond PageRank: Machine Learning for Static Ranking*. – 2006.
- [2] Haralambos Marmanis, Dmitry Babenko. *Algorithms of the Intelligent Web*. – Manning, – 2009.
- [3] Amy N. Langville, Carl D. Meyer. *Google's PageRank and Beyond. Issues in Large-Scale Implementation of PageRank // Dangling nodes*. – Princeton University Press – 2012.
- [4] Chris Ridings, Jill Whalen, Александр Садовский. *Растолкованный PageRank, или Все, что вы всегда хотели знать о PageRank*. – [http : //polusspb.ru/article/a – 44.html](http://polusspb.ru/article/a-44.html) – 2009.
- [5] *Power iteration (12 фев. 2013)*. – Wikipedia, The Free Encyclopedia – [http : //en.wikipedia.org/wiki/Power_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Power_method)
- [6] В.В. Афанасьев. *Тория вероятностей в вопросах и задачах // Цени Маркова*. – ЯГПУ, Центр информационных технологий обучения, – 2006.
- [7] *Развитие PageRank (2 фев. 2011)*. – [http : //saitcreate.ru/pagerank/](http://saitcreate.ru/pagerank/)
- [8] *TF-IDF (25 дек. 2012)*. – Wikipedia, The Free Encyclopedia – [http : //ru.wikipedia.org/wiki/TF – IDF](http://ru.wikipedia.org/wiki/TF-IDF)

[9] *Нигма.РФ – Интеллектуальная поисковая система.* – <http://www.nigma.ru/>

Построение приближения поверхности на основе прямолинейных скелетов

Гуцул Максим Васильевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500–И)

e-mail: maximgutsul@gmail.com

В статье рассматривается задание скелетным представлением геометрических фигур, использование его в задаче построения приближения поверхности, проводится сравнение с другими методами представления трехмерных поверхностей.

В геометрии, прямолинейным скелетом называют метод представления плоских выпуклых многоугольников (полигонов) топологическим скелетом. В некотором смысле, прямолинейный скелет похож на срединную ось, но отличается тем, что скелет состоит из отрезков прямых линий, в то время как срединная ось полигона может включать в себя параболические кривые. Прямолинейный скелет представляет собой альтернативную срединной оси кусочнолинейную конструкцию. Он также имеет несколько приложений, например: в архитектуре (для построения крыш), для снятия геодезической информации, в медицине (томография), декомпозиции многоугольников (применение в системах компьютерного зрения), автоматизированного производства (например, построение офсетных многоугольников (offset polygons) в AutoCad)[1].

Так как прямолинейный скелет нельзя построить пользуясь известными методами, вроде инкрементального алгоритма, были разработаны принципиально другие алгоритмы для его вычисления, которые симулируют процесс сжатия многоугольника (shrinking process).

Самый первый алгоритм вычисления прямолинейного скелета был разработан Айхольцером и Оренхамме [1]. Он вычисляет скелет простого многоугольника с n вершинами за $O(n^2 \log n)$ времени. Позже они расширили этот алгоритм до обработки многоугольников с дырами и плоских прямолинейных графов. Эппштейн (Eppstein) и Эрикссон (Erickson) получили первый субквадратичный алгоритм, который вычисляет скелет за $O(n^{8/5+\epsilon})$ времени в худшем случае, также они представили алгоритм, зависящий от количества невыпуклых вершин в многоугольнике, временная сложность которого порядка $O(n^{1+\epsilon} + n^{8/11+\epsilon} \cdot r^{9/11+\epsilon})$, где r — число невыпуклых вершин многоугольника.

Наконец, Ченг и Виньерон разработали вероятностный алгоритм для вычисления скелета простых невырожденных многоугольников за $O(n \cdot \log^2 n + r\sqrt{r} \cdot \log r)$ времени, и многоугольников с дырами (за $O(n\sqrt{h} \cdot \log^2 n + r\sqrt{r} \cdot \log r)$ времени, где h — число дыр, n — число вершин многоугольника, среди которых r невыпуклых) [8].

Основная идея построения прямолинейных скелетов заключается в следующем. Пусть P — простой многоугольник на плоскости, имеющий n сторон. Введем некоторые определения:

Определение 1: Вершину v многоугольника P будем называть выпуклой (convex), если внутренний угол многоугольника при ней меньше π , соответственно невыпуклой (reflex), если внутренний угол больше π .

Определение 2: Ребро многоугольника P называется выпуклым (convex), если оно инцидентно только выпуклым вершинам, иначе ребро — невыпуклое (reflex).

Будем считать, что граница многоугольника ориентирована против часовой стрелки, так, что его внутренность всегда лежит слева от граничных ребер. Прямолинейный скелет многоугольника P определяется процессом распространения линейного фронта (linear wavefront propagation process).

Рассмотрим процесс распространения линейного фронта и события подробнее. Представим, что граница многоугольника P движется внутрь, причем скорости всех ребер постоянны и равны, а ребра движутся, оставаясь параллельными самим себе. Каждая вершина многоугольника будет двигаться по биссектрисе при ее внутреннем угле. Движение продолжается до тех пор, пока структура нашего многоугольника не изменится топологически. Этот момент называют событием (event). В каждый момент времени границу сжатого многоугольника(-ов) называют линейным фронтом (linear wavefront).

Есть несколько типов событий: [9]

1. *Событие ребра (Edge event).* Ребро стягивается в точку и его соседи становятся смежными. Различают:

a) *Разрушение выпуклого ребра (Convex edge annihilation)* — если разрушенное ребро было выпуклым.

b) *Разрушение невыпуклого ребра (Reflex edge annihilation)* — если разрушенное ребро было невыпуклым. В этом случае из линейного фронта исчезнет невыпуклая вершина.

2. *Событие деления (Split event).* Невыпуклая вершина линейного фронта сталкивается с ребром, таким образом, деля его на части. Процесс сжатия происходит до полного исчезновения линейного фронта.

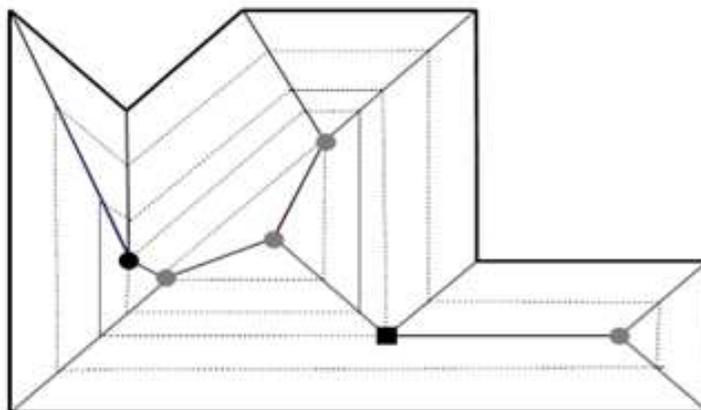


Рис. 1. Прямолинейный скелет для невыпуклого многоугольника. Черным кружком помечено событие уничтожения невыпуклого ребра, серыми кружками – событие уничтожения выпуклого ребра, черный квадрат – событие расщепления. Пунктиром показан линейный фронт в разные моменты времени

3. *Столкновение вершин (Vertex Event)*. Несколько невыпуклых вершин, (и ничего кроме) сталкиваются. Столкновение вершин может добавить в линейный фронт невыпуклую вершину, хотя общее число невыпуклых вершин в нем после этого события уменьшится. Кстати, любые незначительные изменения многоугольника с целью убрать подобное событие часто приводят к радикальному изменению структуры скелета. Процесс сжатия происходит до тех пор, пока линейный фронт не исчезнет.

Во многих приложениях существует ряд задач, где требуется построение трёхмерной поверхности и её представления, например, компьютерная томография. Вообще говоря, существует два метода описания замкнутых объектов: [3]

1) *Граничное представление*: 3D-объект описывается как набор поверхностей, которые отделяют внутренности объекта от внешнего окружения. (например: полигональные грани и сплайновые патчи)

2) *Представление разбиением пространства*: Используется для описания внутренних свойств, путем разделения областей пространства, в которых находится объект. Такой метод представления используется для разделения областей пространства, содержащих объект, в набор маленьких, не пересекающихся, смежных, замкнутых объектов (обычно получаются кубы).

Эти способы описания эффективны для замкнутых объектов, т.к. в этом случае экономится время на обработку (рендеринг).

Представления поверхности, образованные полигональной сеткой, называются *каркасными*.

На основе каркасной структуры реалистичный рендер может быть произведен шейдинговыми паттернами вокруг полигональных поверхностей. В итоге, криволинейная поверхность получается с помощью множества полигонов. Такой подход значительно упрощает рендеринг (например, преобразование 3D-сцены в двумерную с меньшей потерей информации, вроде высоты, глубины и т. п.). Сейчас объекты получаются из стандартных графических объектов (полигональных поверхностей). Каждый графический объект нуждается в каком-либо методе для его описания, например, может быть описан полигональной сеткой, уравнением и т.д. [4].

Одним из наиболее интересных примеров применения прямолинейных скелетов является построение приближения поверхности по ее сечениям. В этом случае берутся два близлежащих сечения, аппроксимируются многоугольниками, накладываются друг на друга (верхний проецируется на нижний) и определяется их симметрическая разность. Для многоугольников, составляющих симметрическую разность, строятся прямолинейные скелеты, и производится триангуляция граней, прилегающих к скелетам. Затем учитывается высота сечений и получается кольцо. Процесс повторяется для всех пар близлежащих сечений, пока не будет построена вся поверхность. Во многих отраслях существует ряд задач, где требуется построение трехмерной поверхности и её представления, например, компьютерная томография, проектирование крыш [1].

Другим методом построения поверхности является крылатое представление, предложенное Брюсом Баумгартом в 1975 году [7], которое явно представляет вершины, грани и ребра сетки. Такое представление широко используется в программах для моделирования, предоставляя высокую гибкость в динамическом изменении геометрии сетки. С помощью такого представления могут быть выполнены операции разрыва и объединения. Однако недостатком являются высокие требования памяти, необходимой для хранения и увеличенная сложность из-за содержания множества индексов [6].

На основании проведенного исследования было выяснено, что использование скелетного представления для построения приближения поверхности уменьшает расходование вычислительных ресурсов и снижает использование оперативной памяти компьютера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aichholzer, O., Alberts, D., Aurenhammer, F. and Gartner, B. *A novel type of skeleton for polygons*. – J. Univ. Comput. Sci. v1. 752-761, – 1995.
- [2] L. Calabi and W. E. Hartnett. *Shape recognition, prairie fires, convex deficiencies and skeletons*. – Amer. Math. Monthly 76:336-342, – 1968.
- [3] Garhi M. *Curves and Surfaces*. – New Delhi, – 2011.
- [4] G. Barequet, M.T. Goodrich, A. Levi-Steiner, and D. Steiner *Contour interpolation by straight skeletons*. – Graphical Models (GM), vol. 66 (4), 245-260, – 2004.
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Straight_skeleton.
- [6] http://ru.wikipedia.org/wiki/Полигональная_сетка.
- [7] Bruce Baumgart. *Winged-Edge Polyhedron Representation for Computer Vision*. – National Computer Conference, May 1975
- [8] C. Siu-Wing and A. Vigneron. *Motorcycle graphs and straight skeletons*. – Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms: 156–165, 2002
- [9] D. Eppstein and J. Erickson. *Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: Applications of a data structure for finding pairwise interactions*. Discrete Comput. Geom., 22:569–592, 1999.

Отбор эталонных объектов в задаче категоризации текстов

Гуржий Илья Андреевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: 13DyyX13@gmail.com

Автоматическая категоризация текстов в последние 10 – 15 лет получила широкое распространение в сфере ИТ технологий из-за увеличения имеющихся документов в цифровом виде и возникшей потребности в их организованном хранении. Наиболее распространенным подходом к решению этой задачи являются технологии машинного обучения. Они основываются на автоматическом построении классификатора путем обучения на основе множества предварительно классифицированных документов, характеризующих категории.

Преимущество данного подхода перед традиционным, заключающимся в ручном определении классификатора экспертом, — высокая эффективность, значительное сокращение труда человека, возможность применения в различных областях.

Очевидно, что невозможно создать метод, который позволит классифицировать документы с абсолютной точностью, поскольку классификация чаще всего бывает субъективной. По этой причине всегда будет существовать научное направление совершенствования методов классификации и построения классификаторов.

В имеющихся публикациях, посвященных задаче классификации текстов, рассматриваются различные методы. Среди них вероятностные методы, деревья решений, регрессионные методы, поиск k ближайших соседей, искусственные нейронные сети, метод опорных векторов, энтропийный метод и тд.

Известные классификаторы, имея достаточное количество необходимых примеров в обучающей выборке, зачастую не обеспечивают требуемую точность классификации. Поэтому одним из подходов, направленных на улучшение качества их работы, является сокращение обучающей выборки [1]. Обычно объекты обучения не являются равноценными. Среди них могут находиться типичные представители классов — эталоны. Если классифицируемый объект близок к эталону, то, скорее всего, он принадлежит тому же классу. Ещё одна категория объектов — неинформативные или периферийные. Они плотно окружены другими объектами того же класса. Если их удалить из выборки, это практически не отразится на качестве классификации. Наконец, в выборку может попасть некоторое количество шумовых выбросов — объектов, находящихся «в гуще» чужого класса. Как правило, их удаление только улучшает качество классификации.

Эти соображения приводят к идее исключить из выборки шумовые и неинформативные объекты, оставив только минимальное достаточное количество эталонов. Этим достигается несколько целей одновременно — повышается качество классификации, сокращается объём хранимых данных и уменьшается время, затрачиваемое на поиск ближайших эталонов.

Идея отбора эталонов реализована в алгоритме STOLP [2]. Рассмотрим его обобщённый вариант с произвольной весовой функцией $w(i, u)$. Будем строить метрический алгоритм $a(u, \Omega)$ вида

$$a(u, X^L) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} \sum_{i=1}^l [y_{i,u} = y] w(i, u)$$

где $\Omega \subseteq X^L$ — множество эталонов.

Обозначим через $M(x_i, \Omega)$ отступ объекта x_i относительно алгоритма $a(x_i, \Omega)$. Большой отрицательный отступ свидетельствует о том, что объект x_i окружён объектами чужих классов, следовательно, является выбросом. Большой положительный отступ означает, что объект окружён объектами своего класса, то есть является либо эталонным, либо периферийным.

Алгоритм начинает с отсева выбросов. Из выборки X^L исключаются все объекты x_i с отступом $M(x_i, X^L)$, меньшим заданного порога δ , например, можно положить $\delta = 0$. Как вариант, можно исключать заданную долю объектов с наименьшими значениями отступа. Затем формируется начальное приближение — в Ω заносится по одному наиболее типичному представителю от каждого класса.

После этого начинается процесс последовательного «жадного» наращивания множества Ω . На каждом шаге к Ω присоединяется объект x_i , имеющий минимальное отрицательное значение отступа. Так продолжается до тех пор, пока число ошибок не окажется пренебрежимо малым. Если положить $l_0 = 0$, то будет построен алгоритм $a(u, \Omega)$, не допускающий ошибок на обучающих объектах, за исключением, разве что, объектов-выбросов.

В результате каждый класс будет представлен в Ω одним «центральным» эталонным объектом и массой «пограничных» объектов, на которых отступ принимал наименьшие значения в процессе итераций.

Результатом работы алгоритма STOLP является разбиение обучающих объектов на три категории: шумовые, эталонные и неинформативные. Если гипотеза компактности верна и выборка достаточно велика, то основная масса обучающих объектов окажется неинформативной и будет отброшена. Фактически, этот алгоритм выполняет сжатие исходных данных.

Другим распространённым алгоритмом поиска эталонных объектов в обучающей выборке является метод минимизации функционала полного скользящего контроля (complete cross validation, CCV [3]). Пусть $\Omega \subseteq X^L$ — произвольное подмножество объектов; $X \cup \bar{X} = X^L$, всевозможные $N = C_L^l$ разбиений полной выборки X^L на обучающую X длины l и контрольную \bar{X} длины $k = L - l$. Функционал CCV определяется как средняя по всем разбиениям частота ошибок на контрольной подвыборке:

$$Q(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{x \subseteq X^L} \frac{1}{k} \sum_{x_i \in \bar{X}} [a_{x \cup \Omega}(x_i) \neq y_i]$$

Для вычисления $Q(\Omega)$ можно воспользоваться комбинаторной формулой, которая представляет $Q(\Omega)$ в виде суммы вкладов объектов

$$Q(\Omega) = \sum_{i=1}^L T(i, \Omega)$$

При локальных изменениях множества Ω (например, при удалении из Ω одного объекта), пересчет $Q(\Omega)$ вычислительно эффективен, так как изменяются вклады только тех объектов, у которых поменялось ближайшее окружение из множества эталонов. Это позволяет эффективно отсеивать неэталонные объекты путем жадной пошаговой оптимизации

$$Q(\Omega \setminus x_i) \rightarrow \min$$

Хотя данный метод был разработан для обычного алгоритма k ближайших соседей, он может быть применён и к любому метрическому алгоритму, поскольку вид функции расстояния не влияет на оценку ССВ.

Автоматическая классификация текста, является крайне актуальной и интересной задачей в условиях постоянно растущего объема используемой информации. Принадлежность к тому или иному классу может определяться общей тематикой текста, употреблением определенных понятий, другими условиями. Классификация текста применяется в решении многих практических задач: поиске документов, навигации в больших информационных ресурсах, фильтрации спама, подборе контекстной рекламы, составлении интернет-каталогов и других. Поэтому любой метод, который в состоянии существенно повысить качество классификации заслуживает пристального внимания и глубокого изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Солодухин А.С. *Классификация текстом на основе приближенных оценок вероятностей классов*. – Воронеж: Воронежский государственный университет, – 2008.
- [2] Воронцов К.В. *Лекция по метрическим алгоритмам классификации [Электронный ресурс]*. – <http://www.ccas.ru/voron/download/MetricAlgs.pdf>, – 2008.
- [3] Воронцов К.В. *Применение монотонного классификатора ближайшего соседа в задаче категоризации текстов*. – М.:Торус Пресс, – 2012.

Влияние знака кривизны на поведение тригонометрического параметрического сплайна

Давидович Андрей Николаевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: tnu.david@gmail.com

В автоматических системах геометрического моделирования наиболее часто используются В-сплайны и неоднородные рациональные В-сплайны. Однако существуют и другие сплайны построения кривых и поверхностей, которые также заслуживают внимания. Одним из таких видов сплайнов является тригонометрический сплайн. В статье рассматривается подход к построению тригонометрического сплайна на основе метода построения параметрических сплайнов, предложенный Фоксом и Праттом. Также исследуется поведение тригонометрического сплайна при модификации метода, предложенного в [1]. На основе проведенных расчетов построено приложение, позволяющее наглядно убедиться в полученных результатах.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Целью работы является исследование возможностей построения составного тригонометрического сплайна согласно методу, предложенному в [2] и его модификации, предложенной в [1]. При его применении в варианте, изложенном в [2], возникают такие геометрические эффекты как, например, изломы или петли при определенных расположениях интерполируемых точек. Такие эффекты крайне нежелательны, поэтому используется модификация метода, изложенная в [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тригонометрический параметрический сплайн. Пусть каждый его сегмент задается в виде:

$$r(u) = a_0 + b_0u + (a_1 + b_1u)(\sin \pi u + \sin^2 \pi u), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

Концы сегмента отвечают значениям параметра $u = 0$ и $u = 1$. Для определения коэффициентов a_0 , b_0 , a_1 , b_1 воспользуемся стандартным методом, согласно [2]. В итоге получим:

$$r(u) = y_0 \left(1 - u + \frac{(1 - 2u)}{\pi} (\sin \pi u + \sin^2 \pi u) \right) +$$

$$+y_1 \left(u - \frac{(1-2u)}{\pi} (\sin \pi u + \sin^2 \pi u) \right) + y'_0 \left(\frac{(1-u)}{\pi} (\sin \pi u + \sin^2 \pi u) \right) + \\ + y'_1 \left(-\frac{u}{\pi} (\sin \pi u + \sin^2 \pi u) \right); \quad (2)$$

Теперь рассмотрим конструирование составной кривой из сегментов (2). Применим подход аналогичный построению составной кривой Фергюсона, рассмотренный в [2]. Пусть даны два сегмента $r^1(u_1)$ и $r^2(u_2)$, ($0 \leq u_1, u_2 \leq 1$). Тогда потребуем, чтобы кривая была непрерывной, имела непрерывный наклон (непрерывность вектора градиента по направлению) и кривизну в точках соединения сегментов. В результате получим, что

$$\ddot{r}^{(2)}(0) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \dot{r}^{(1)}(1) + \mu \dot{r}^{(1)}(1), \quad (3)$$

В (3) появление параметра μ обусловлено тем, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, α_1 , α_2 - модули касательных векторов в точке соединения сегментов. Так как параметр μ не имеет явного геометрического смысла, он может принимать любое значение. Эта формула, подходит для любого представления $\vec{r}(u)$.

3. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Применим подход, описанный в [1], для исследования поведения тригонометрического сплайна в точках соединения двух порций. Из формулы (3) следует, что ее практическое использование приемлемо только в случае, если переход от одной порции кривой к другой происходит так, что обе находятся по одну сторону от касательной в точке соединения. В противном случае возникают нежелательные эффекты, которые проявляются в виде петель и изломов. Для решения этой проблемы добавим в формулу кривизны параметр δ , который принимает значение +1 или -1. Этот параметр будем считать положительным или отрицательным в зависимости от вращения касательного вектора кривизны. Обоснование этого находим в дифференциальной геометрии. Кривизна кривой – это скорость поворота кривой, то есть модуль производной вектора касательной, или вторая производная в данной точке. А так как при изменении знака поворот вектора касательной уходит в противоположную сторону, то получаем, что кривая при отрицательных значениях кривизны будет менять направление. Теперь рассмотрим формулу кривизны в точке соединения двух порций (3) с использованием параметра δ :

$$\ddot{r}^{(2)}(0) = \delta \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \dot{r}^{(1)}(1) + \mu \dot{r}^{(1)}(1), \quad (4)$$

Для упрощения записи, обозначим $\gamma = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2$. Следует обратить внимание на параметр $\delta = \pm 1$. Если два сегмента соединены так, что они оба находятся по одну сторону от касательной в точке соединения, то $\delta = 1$, а если по разные стороны, то $\delta = -1$. Запишем условие (4), используя формулы, полученные на этапе приведения формулы (1) к виду (2):

$$\begin{aligned} & \delta\gamma^2 \dot{r}^{(1)}(0) + \left(\frac{\mu}{2} - (\pi - 1)(\delta\gamma^2 + 1)\right) \dot{r}^{(1)}(1) + \dot{r}^{(2)}(1) = \\ & = \delta\gamma^2 (\pi - 2) r^{(1)}(0) + (\pi - 2)(1 - \delta\gamma^2) r^{(1)}(1) + (2 - \pi) r_1^{(2)}; \end{aligned} \quad (5)$$

Если строится составная кривая, проходящая через точки r_0, r_1, \dots, r_n , причем касательные в этих точках есть t_0, t_1, \dots, t_n , то уравнение (5) дает систему вида:

$$\begin{aligned} & \delta\gamma^2 t_{i-1} + \left(\frac{\mu}{2} - (\pi - 1)(\delta\gamma^2 + 1)\right) t_i + t_{i+1} = \\ & = \delta\gamma^2 (\pi - 2) r_{i-1} + (\pi - 2)(1 - \delta\gamma^2) r_i + (2 - \pi) r_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для построения составной кривой тригонометрического сплайна необходимо знание производных во всех узловых точках. Зная производные в конечных точках, определим оставшиеся производные из системы (6). Коэффициенты данной системы образуют трехдиагональную матрицу. Для ее решения обычно применяется метод прогонки. Однако для случая $\mu = 0, \lambda = 1$, все диагональные элементы при $\delta = -1$ равны нулю, а следовательно в таком случае не подходит методика, предложенная в [2] для построения сплайна. Поэтому покажем, что использование параметра μ в ограниченном диапазоне позволяет избавиться от этой проблемы.

Метод прогонки устойчив при выполнении условия диагонального преобладания матрицы [3]: $|B_i| \geq |A_i| + |C_i|$, поэтому в контексте системы (6):

$$\left| \left(\frac{\mu}{2} - (\pi - 1)(1 + \delta\gamma^2)\right) \right| \geq |\delta\gamma^2| + 1 \quad (7)$$

Решим это неравенство относительно μ :

$$\begin{cases} \mu \geq 2 + 2|\delta\gamma^2| + 2(\pi - 1)(1 + \delta\gamma^2) \\ \mu \leq -2 - 2|\delta\gamma^2| - 2(\pi - 2)(1 + \delta\gamma^2) \end{cases}$$

Определим теперь границы μ , например для наиболее частого случая:

$$\gamma = 1, \delta = 1 : \begin{cases} \mu \geq 4\pi \\ \mu \leq -4\pi \end{cases} \quad \text{или} \quad \gamma = 1, \delta = -1 : \begin{cases} \mu \geq 4 \\ \mu \leq -4 \end{cases}$$

Следовательно, теперь можно использовать стандартные формулы прогонки, но только если подбирать значения μ , используя (7). Также данное условие предотвращает возможное деление на ноль в формулах прогонки. На

основании проведенных исследований было создано приложение, которое показывает поведение кривой при различных значениях параметров γ , δ , μ .

4. Вывод

В работе показано, что, так же как и для параметрических полиномиальных сплайнов, параметр знака кривизны позволяет изменять поведение кривой в точках соединения сегментов, а параметр μ позволяет задавать приемлемый диапазон значений, при котором возможно построение составной кривой. Условие, определяющее диапазон значений для μ для полиномиального и тригонометрического сплайна, имеет только числовое различие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карпенко В.А., Клещев А.Ю. *Влияние знака кривизны на поведение параметрических сплайновых кривых.* / Карпенко В.А., Клещев А.Ю. – Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 90. – К.: КНУБА, 2012. - с. 132-138.
- [2] Фокс А., Пратт М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве.* / Фокс А., Пратт М. Пер. с англ.- М.:Мир, 1982. – 304с., ил.
- [3] Попов Б. А. *Равномерное приближение сплайнами.* / Попов Б. А. Физико-механический институт.- Киев: Наук. Думка, 1989. – 272 с.

Real-time Web-приложения

Жуков Павел Игоревич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: cray0000@gmail.com

Современный интернет движется в направлении повсеместной интеграции - развиваются всевозможные онлайн сервисы, люди всё чаще пользуются ими в повседневной жизни. Коренные изменения в подходе к построению веб-приложений начались в середине нулевых с наступлением эры Web 2.0, которую предзнаменовало бурное развитие рынка веб-браузеров, стандартов HTML4, CSS2.1 и появление технологии подгрузки данных AJAX. Следующий скачок, который многие называют Web 3.0, происходит уже сейчас и связан с новым витком развития стандартов HTML (HTML5), CSS (CSS3) и протоколов передачи данных, таких как вебсокеты (Websocket).

Одним из главных отличий Web 3.0, или Real-time, сайта от своих предшественников является постоянный обмен данными с сервером и обновление

информации без перезагрузки страницы. Очевидно, что достигнуть такого поведения невозможно, не перенеся часть “логики” веб-приложения на сторону клиента. Этому способствовало бурное развитие javascript фреймворков, одним из которых был Backbone.js, предоставивший разработчикам удобный MVC (Model-View-Controller, Модель-Представление-Контроллер) скелет клиентской части приложения. Однако, несмотря на то, что писать бизнес-логику на JS (javascript) стало удобнее, разработка связей между Моделью и Представлением всё еще требовала значительных трудозатрат и использования дополнительных библиотек для работы с DOM - таких как jQuery.

Для решения проблемы обновления данных в Представлении из Модели были разработаны фреймворки, реализующие шаблон проектирования “UI data binding”. Принцип их работы заключается в том, чтобы позволить программисту связывать, при помощи специальных атрибутов, значения HTML элементов с переменными JS. Причем эта взаимосвязь работает в обе стороны - значения программно измененных данных мгновенно отображаются в DOM, а информация, введенная пользователем, например, в элемент типа `input[type="text"]`, записывается в указанную переменную.

Пример одной из типичных реализаций шаблона “UI data binding” из фреймворка Knockout.js:

```
<!-- View (index.html): -->
  <p>First name: <strong data-bind='text: firstName'></strong></p>
  <p>Last name: <strong data-bind='text: lastName'></strong></p>

/* Model (script.js): */
function AppModel() {
  this.firstName = "Bert";
  this.lastName = "Bertington";
}
ko.applyBindings(new AppModel());
```

Как видно из примера, значения тегов `` привязываются атрибутом `data-bind` к переменным `firstName` и `lastName` из Модели.

Ещё большую свободу действий предоставляют современные фреймворки Angular.js и Batman.js. Помимо MVC скелета и широких возможностей биндинга данных, их функционал может быть расширен посредством подключения внешних плагинов. Кроме того, они обладают встроенными инструментами для написания автоматических тестов и позволяют разрабатывать веб-приложение таким образом, что изменения вступают в силу мгновенно при сохранении исходного кода, не требуя перезагрузки браузера.

Рост возможностей JS дал толчок развитию огромного количества новых веб-сервисов с интуитивным пользовательским интерфейсом, однако разработке настоящих Real-time приложений препятствовали ограничения существующих протоколов передачи данных. Еще несколько лет назад единственным способом запросить информацию с сервера являлся AJAX (асинхронный Javascript и XML) запрос с использованием XMLHttpRequest. Недостатком такого способа является то, что такой запрос является по сути обычным обращением к серверу через протокол передачи данных HTTP со всеми вытекающими отсюда проблемами. Во-первых, каждый HTTP запрос тянет за собой большой объём сервисных данных - HTTP заголовков. Во-вторых, соединение может быть инициировано лишь клиентом, а значит релевантность обновляемых данных не является оптимальной, поскольку посылать AJAX запросы можно лишь с определенным интервалом (не менее 3 секунд), чтобы не перегрузить ими сервер.

Для преодоления ограничений HTTP был разработан новый протокол передачи данных - WebSocket, который работает поверх TCP-соединения и обеспечивает двусторонний обмен данными между клиентом и сервером. Преимущества использования данной технологии заключаются в следующем:

- связь с сервером устанавливается единожды и весь последующий процесс обмена данными происходит по уже установленному соединению;
- данные передаются в чистом виде, без необходимости в передаче дополнительной сервисной информации;
- передача данных может быть инициирована сервером, при этом время доставки данных на компьютер клиента зависит лишь от задержки сигнала, которой, при наличии хорошего интернет соединения, в большинстве случаев можно пренебречь.

Для работы с протоколом WebSocket на стороне клиента существует огромное количество библиотек на JS, обладающих схожим функционалом. Их использование в процессе разработки и в развернутом приложении не представляет труда. Однако попытавшись наладить работу вебсокетов на сервере, разработчик может столкнуться с определенными трудностями. У большинства серверных языков есть библиотеки для работы с вебсокетами, но их стабильность и производительность не всегда удовлетворяют потребностям рынка. Рассмотрим существующие варианты реализаций вебсокетов на различных языках:

PHP. Фреймворки Yii, Zend 2, Kohana, Symfony2 и т.п.:

Однопоточный язык, для каждого соединения создает отдельный процесс. Плохой выбор для работы с вебсокетами, так как имеет проблемы с производительностью, а также ограниченное количество одновременных подключений.

Ruby. Фреймворки Ruby on Rails, Sinatra: Также однопоточный язык. С вебсокетами наблюдаются те же проблемы, что и в PHP.

Python. Фреймворки Twisted и Tornado: Данные фреймворки обладают высокой производительностью и кроме того поддерживают многопоточность, однако библиотеки для работы с вебсокетами лишь начинают развиваться, не интегрированы в код самих фреймворков и работают нестабильно.

Erlang: Обладает высочайшей производительностью и отличной многопоточностью. В фреймворк Chicago Boss интегрирована поддержка вебсокетов. Однако ситуацию омрачает то, что синтаксис эрланга довольно архаичный, а разработка на нём сложна и требует хорошего опыта работы с данным языком.

Node.js. Фреймворки Express.js, Zappa.js, Meteor.js, Derby.js:

Поддерживает многопоточность и выдерживает высокие нагрузки. Существует несколько хорошо протестированных и стабильных библиотек для работы с вебсокетами, таких как Socket.IO, SockJS, Faye. Во многие фреймворки (такие как Zappa.js, Meteor.js, Derby.js) поддержка вебсокетов встроена изначально.

Подводя итоги, стоит отметить, что на данный момент полноценный Web 3.0 сайт можно создать лишь при использовании фреймворков на базе Node.js. Следует обратить особое внимание на такие проекты как Meteor.js и Derby.js,

которые изначально создавались с целью предоставить платформу для простой разработки Real-time Web-приложений. Помимо встроенного функционала для работы с вебсокетами, они предоставляют разработчику возможность писать код на JS, который будет общим для клиента и сервера; биндинг данных напрямую к серверной Модели и работа с базой данных из клиентской части. В результате становится возможным создавать нативные веб-приложения с таким уровнем юзабилити (удобство использования), который ранее был возможен лишь в сфере разработки программного обеспечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vanessa Wang *The Definitive Guide to HTML5 WebSocket*. – Apress Media, – 2013.

Методы оптимизации маршрута на карте города

Згурская Ольга Олеговна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 401-И)

e-mail: ZgurskayaOlha@gmail.com

Постановка задачи: имеется дорожная сеть города, место отправления и место назначения, необходимо выбрать оптимальный маршрут проезда из места отправления до места назначения.

При решении проблемы, для возможности применения математического аппарата, ее следует представить в виде математической модели. Задачу оптимизации маршрута можно представить в виде модели на графе.

Множество всех возможных трасс поезда по улицам города представляется в виде ориентированного графа $G = (A, W)$, где A – множество вершин, W – множество дуг. Вершинам этого графа соответствуют: перекрестки на улицах города, место отправления $s \in A$ и место назначения $f \in A$. Вершины графа – это места дорожной сети, где имеются возможности выбора дальнейшего маршрута поездки по городу. Ребрам графа соответствуют магистрали и улицы между двумя вершинами. Каждому ребру (i, j) можно сопоставить критерий выгоды маршрута $c_{ij} \geq 0$, который можно понимать как, например, расстояние между точками, время или стоимость поездки. Для заданных начальных и конечных вершин графа s и f требуется отыскать наилучший маршрут проезда (самый выгодный по времени, стоимости или пройденному пути).

Для решения данной задачи существуют различные алгоритмы. Могут использоваться и простейшие методы: полный и случайный перебор, жадные алгоритмы, метод минимального остовного дерева и т.д.[1]

Однако использование простейших методов не удобно при программировании для нахождения оптимального решения, так как общая постановка задачи нахождения кратчайших путей относится к классу NP-полных задач [1]. И при увеличении размерности мы сталкиваемся с проблемой, что данная задача не может быть решена методом перебора вариантов никакими теоретически мыслимыми компьютерами за время, меньшее нескольких миллиардов лет. Поэтому эффективные методы решения задачи – это эвристические методы.

Широкое применение получили алгоритм Дейкстры [1], алгоритм Флойда – Уоршелла [1], метод ветвей и границ [1], Алгоритм A* [2], муравьиный алгоритм [2].

Эффективность метода ветвей и границ и алгоритм Дейкстры исследовались экспериментальным путем. Разработан программный продукт, который реализован на персональном компьютере.

При проведении экспериментальных исследований для каждой размерности задачи было сгенерировано 25 задач, максимальная размерность решенной задачи 50×50 . Результаты проведенного эксперимента приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Экспериментальные данные скорости сходимости методов решения задачи оптимизации маршрута.

Размерность задачи, $n \times n$	Метод ветвей и границ		Алгоритм Дейкстры	
	Время сходимости, с	Число итераций	Время сходимости, с	Число итераций
3×3	0,08	2	0,00	1
5×5	0,11	4	0,05	2
10×10	0,71	10	0,29	7
15×15	1,93	20	0,62	10
20×20	2,62	25	0,97	14
25×25	3,47	31	1,50	16
30×30	4,24	37	1,93	19
35×35	5,10	43	2,30	23
40×40	6,33	49	2,67	25
45×45	7,16	55	3,28	29
50×50	7,95	62	4,00	33

Исходя из полученных результатов, приходим к выводу о том, что скорость сходимости алгоритма Дейкстры выше (примерно в 2,5 раза), что особенно заметно для задач большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кормен Т., Лейзерсон Ч. *Алгоритмы: построение и анализ*. – 2-е изд. – М.: ООО “И.Д. Вильямс”, – 2005. – С. 1296.
- [2] Рассел С., Норвиг П. *Искусственный интеллект: современный подход*. – М.: ООО “И.Д. Вильямс”, – 2006. – С. 1408.

Категоризация текстов с помощью монотонных алгоритмов

Карпухин Андрей Александрович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-и)

e-mail: абабаб@yandex.ru

Классификация документов - одна из задач информационного поиска, заключающаяся в отнесении документа к одной из нескольких категорий на основании содержания документа.

Классификация (категоризация) текстовых документов является одной из ключевых задач машинного обучения. Область применения данной задачи очень широка, это например:

- фильтрация спама
- составление интернет-каталогов
- подбор контекстной рекламы
- в системах документооборота
- автоматическое реферирование (составление аннотаций)
- снятие неоднозначности при автоматическом переводе текстов
- ограничение области поиска в поисковых системах
- определение кодировки и языка текста[1]

В подходе к задаче категоризации текстов основанном на машинном обучении набор правил, по которым можно отнести текст к той или иной категории, или, более обще, критерий принятия решения текстового классификатора, вычисляется автоматически из обучающих данных (другими словами, производится обучение классификатора). Обучающие данные - это некоторое количество хороших образцов документов из каждого класса. В машинном обучении

сохраняется необходимость ручной разметки (термин разметка означает процесс приписывания класса документу). Но разметка является более простой задачей, чем написание правил. Кроме того, разметка может быть произведена в обычном режиме использования системы. Например, в программе электронной почты может существовать возможность пометить письма как спам, тем самым формируя обучающее множество для классификатора - фильтра нежелательных сообщений. Таким образом, категоризация текстов, основанная на машинном обучении, является примером обучения с учителем, где в роли учителя выступает человек, задающий набор классов и размечающий обучающее множество.

Гипотеза монотонности естественно возникает в задачах категоризации текстов. Предполагается, что каждая категория имеет своё подмножество характерных ключевых слов, и чем чаще в тексте встречаются слова из этого подмножества, тем вероятнее он относится к данной категории. Объектами в задаче категоризации являются текстовые документы; признаками могут быть оценки релевантности слов (tf-idf, OkapiBM25 и другие)[2] или оценки вероятностей тем, полученные с помощью тематического моделирования[3].

Для решения задачи категоризации предлагается использовать метод ближайших соседей (kNN) и монотонный классификатор ближайшего соседа (mNN)[4], в совокупности с различными эвристиками для отбора информативных признаков. Монотонный классификатор ближайшего соседа (mNN) рассматривается не как корректирующая операция над другими алгоритмами, а как самостоятельный алгоритм классификации. При решении практических задач выборка может оказаться не монотонной. В этом случае её необходимо предварительно монотонизировать.

1. КАТЕГОРИЗАЦИЯ ТЕКСТОВ.

Обозначим через D коллекцию из L документов, C - множество категорий. Каждый документ d_i может принадлежать сразу нескольким категориям. Через c_i обозначим булев вектор длины C , j -я координата которого c_i^j равна единице в случае, если документ d_i принадлежит категории c_j . Задача категоризации текстов сводится к построению алгоритма $a : D \rightarrow \{-1, 1\}^{|C|}$, относящего документ к подмножеству категорий.

Чтобы применить алгоритм mNN к задаче категоризации, важно представить каждый текст признаками, обладающими свойством монотонности[7].

Например, в качестве признаков можно использовать оценки релевантности слов для документа (TF-IDF) и стандартную модель латентного размещения Дирихле (latent Dirichlet allocation, LDA)[8].

Использование алгоритма *k-ближайших соседей* над признаками TF-IDF является недостаточно точным по сравнению с использованием даже того же алгоритма, но в сочетании с LDA. При большой величине выборки точность LDA с kNN может превосходить точность TF-IDF с kNN в 4 раза. А если в сочетании с LDA использовать mNN, то можно добиться улучшения точности категоризации ещё до 10% (в зависимости от выборки).

Таким образом задача категоризации текстов с использованием TF-IDF и LDA для отбора признаков является выполнимой, а с применением алгоритмов kNN и mNN просто машинно реализуется. Так же в задачах, где имеется априорная информация о монотонности функции классификации по признакам: чем больше значение признака, тем чаще объекты относятся к классу 1, а не к классу 0, оправдано применение именно монотонного классификатора ближайшего соседа (mNN).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Классификация документов*[Электронный ресурс].//Википедия – 13.03.2013.
- [2] Sebastiani F. *Machine learning in automated text categorization.*// ACM Computing Surveys. – 2002. – no. 1. – С. 1-47.
- [3] Sriurai W. *Improving text categorization by using.*// Advanced Computing: An International Journal (ACIJ). – 2011. – no. 6.
- [4] Воронцов К. В. *Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания.*// ЖВМ и МФ. – 2000. –Т.40, no. 1. – С. 166-176.
- [5] Иванов М.Н., Воронцов К. В. *Применение монотонного классификатора ближайшего соседа в задаче категоризации текстов.*// ИОИ. – 2012. –no. 9. – С. 622.
- [6] Blei D. M., Ng A. Y., Jordan M. I. *Latent Dirichlet allocation.*// Journal of Machine Learning Research. – 2003. –Т. 3. – С. 993-1022.

Применение монотонных алгоритмов в задаче обучения ранжированию

Карпухин Алексей Александрович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: pacifist_@ukr.net

Введение

Обучение ранжированию - это класс задач машинного обучения с учителем, заключающихся в автоматическом подборе ранжирующей модели по

обучающей выборке, состоящей из множества списков и заданных частичных порядков на элементах внутри каждого списка. Частичный порядок обычно задаётся путём указания оценки для каждого элемента (например, "релевантен" или "не релевантен"; возможно использование и более, чем двух градаций). Цель ранжирующей модели - наилучшим образом (в некотором смысле) приблизить и обобщить способ ранжирования в обучающей выборке на новые данные.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАНЖИРОВАНИЯ

Задано множество допустимых оценок релевантности $Y = \{r_1, \dots, r_K\}$, где K - общее число рангов. На множестве рангов определено отношение порядка \succ так, что для любых двух значений релевантности можно сказать, какой элемент предпочтительнее; то есть множество рангов есть цепь. Принимается факторная модель ранжирования - каждой паре (q, d) , $q \in Q$, $d \in D_q$ ставится в соответствии вектор признаков:

$$P(q, d) = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

и значение релевантности

$$r(q, d) \in Y. \quad (2)$$

Обучающее множество записывается в виде матрицы S :

$$S = \{q, d, r(q, d)\}, q \in Q, d \in D_q. \quad (3)$$

$Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}$ - набор поисковых запросов; $D_q = \{d_{q1}, \dots, d_{qn}\}$ - набор документов для каждого запроса.

Цель: построить функцию ранжирования $A : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ так, что для нового запроса можно упорядочить документы по величине значений функции A , и полученный порядок был как можно ближе, в смысле некоторого критерия качества, к истинному.

2. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАНЖИРОВАНИЯ

Во время обучения ранжирующей модели и при её работе, каждая пара документ-запрос переводится в числовой вектор из ранжирующих признаков (также называемых ранжирующими факторами или сигналами), характеризующих свойства документа, запроса и их взаимоотношение. Для задач распознавания образов, в которых объекты представлены в виде векторов

евклидова пространства и множества значений признаков (или их часть) являются упорядоченными множествами, причем порядок на множестве ответов согласован с порядком на множестве признаков, проявляются ограничения типа монотонности. Данные идеи были формализованы член-корреспондентом РАН К. В. Рудаковым в рамках теории универсальных и локальных ограничений в алгоритмах распознавания. Будем считать, что чем выше значения признаков, тем больше оценка релевантности соответствующего документа.

Ранжирующие признаки можно разделить на три группы:

- *Запросо-независимые* или *статические* признаки - зависящие только от документа, но не от запроса. Например, PageRank или длина документа. Такие признаки обычно вычисляются на этапе индексирования документов и часто используются для построения показателя статического качества документа, используемого для повышения эффективности поисковых систем.
- Признаки, зависящие только от запроса. Например, "запрос про порно или нет".
- *Запросо-зависимые* или *динамические* признаки - зависящие и от документа, и от запроса. Например, мера TF-IDF соответствия документа запросу.

Ниже приведены некоторые примеры ранжирующих признаков, использующиеся в широко известном в данной области исследований наборе данных LETOR:

- Значения мер TF, TF-IDF, BM25, и языковой модели соответствия запросу различных зон документа (заголовка, URL, основного текста, текста ссылок);
- Длины и IDF-суммы зон документа;
- Ранги документа, полученные различными вариантами таких алгоритмов ссылочного ранжирования, как PageRank и HITS.

Существует несколько метрик, по которым оценивают и сравнивают качество работы алгоритмов ранжирования на выборке с ассессорными оценками. Часто параметры ранжирующей модели стремятся подогнать так, чтобы максимизировать значение одной из этих метрик.

Примеры метрик:

- DCG и NDCG;

- Точность @n, NDCG@n (@n означает, что значение метрики считается только по n лучшим документам выдачи);
- MAP;
- Mean reciprocal rank;
- pfound - разработка компании Яндекс.

В своей статье "Learning to Rank for Information Retrieval" и выступлениях на тематических конференциях, Тай-Ян Лью из Microsoft Research Asia проанализировал существующие на тот момент методы для решения задачи обучения ранжированию и предложил их классификацию на три подхода, в зависимости от используемого входного представления данных и функции штрафа:

Поточечный подход

В поточечном подходе (англ. *pointwise approach*) предполагается, что каждой паре запрос-документ поставлена в соответствие численная оценка. Задача обучения ранжированию сводится к построению регрессии: для каждой отдельной пары запрос-документ необходимо предсказать её оценку. В рамках этого подхода могут применяться многие алгоритмы машинного обучения для задач регрессии. Когда оценки могут принимать лишь несколько значений, также могут использоваться алгоритмы для ординальной регрессии и классификации.

Попарный подход

В попарном подходе (англ. *pairwise approach*) обучение ранжированию сводится к построению бинарного классификатора, которому на вход поступают два документа, соответствующих одному и тому же запросу, и требуется определить, какой из них лучше. Примеры алгоритмов: RankNet, FRank, RankBoost, RankSVM, IR-SVM.

Списочный подход

Списочный подход (англ. *listwise approach*) заключается в построении модели, на вход которой поступают сразу все документы, соответствующие запросу, а на выходе получается их перестановка. Подгонка параметров модели осуществляется для прямой максимизации одной из перечисленных выше метрик ранжирования. Но это часто затруднительно, так как метрики ранжирования обычно не непрерывны и недифференцируемы относительно параметров ранжирующей модели, поэтому прибегают к максимизации неких их приближений или нижних оценок.

Примеры алгоритмов: SoftRank, SVMmap, AdaRank, RankGP, ListNet, ListMLE.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Richardson M., Prakash A., Brill E. *Beyond PageRank: Machine Learning for Static Ranking*. – Proceedings of the 15th International World Wide Web Conference, – 2006– С. 709-715.
- [2] Гулин А.В., Карпович П., Расковалов Д., Сегалович И. *Оптимизация алгоритмов ранжирования методами машинного обучения..* – Яндекс на РОМИП, – 2009 – С. 163-168.
- [3] Спирин Н.В. *Монотонные корректирующие операции в задаче ранжирования.*: выпускная квалификационная работа бакалавра, специальность математические и информационные технологии: 51.16.56/ Спирин Никита Валерьевич – Москва, – 2010 – С. 41.
- [4] Воронцов К.В. *Машинное обучение* [Электронный ресурс]/Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов) – 2011 – режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php>, дата посещения 2013.03.27.

Влияние понятия “Асинхронность” на современные веб приложения

Костенко Руслан Олегович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: ruslan@oneclickdev.com

Статья - небольшой обзор технологии, которая входит в состав HTML5 и лежит в основе приложения, которое я разрабатываю для дипломной работы – «Клиент серверное приложение «Интерактивная доска»». Она будет использоваться для дистанционного обучения студентов.

Главная цель - добиться максимального удобства. Каждый пользователь должен иметь полный доступ к приложению. В любое время и без установки каких-либо других сторонних программ. Именно для этого был выбран HTML5, так как для него нужен всего лишь браузер. Но, чтобы достигнуть значительной производительности необходимо использовать «Асинхронность».

Это основной технологический стол, на котором стоит HTML5.

Приложение должно понимать асинхронность нашего мира и его веб-части в частности. Понимание приложением и заложенным в него поведением асинхронной природы всего жизненного цикла работы, есть не что иное, как адаптация под временные задержки и пространственные разрывы, если можно так выразиться. Конечно, адаптация, дополненная гибкостью учета возможностей различных устройств и программных решений, и нацеленная на улучшение доступности приложения для конечных пользователей.

Проблема асинхронности возникает в нескольких ключевых точках, о которых важно всегда помнить:

- (1) Взаимодействие с сетью
- (2) Взаимодействие с сервером.
- (3) Процессы в браузере.
- (4) Взаимодействие с пользователем.

В каждой из этих точек важно понимать, что происходит в случае нарушения взаимодействия, возникновении задержек и как эти точки влияют друг на друга.

Например, что будет с приложением, если пропадет соединение с интернетом? Очевидный ответ из вчерашнего дня: приложение не будет работать. Сегодня есть ответ получше: приложение может оставаться функциональным, но не будет получать обновления из сети и не сможет отсылать запросы на сервер. Посмотрите в сторону Application Cache из HTML5 и локальных хранилищ данных, они открывают огромное количество новых сценариев.

Что будет с приложением, если долго нет ответа от сервера? Может быть, он просто упал, а может быть, вышел timeout? Или, может быть, просто временно пропало соединение? На все эти вопросы приложение должно уметь давать ответы конкретным поведением в сложившейся ситуации. Или другой вариант: нужно поддерживать постоянное соединение с веб-сервером для регулярного обмена сообщениями. Можно использовать старый добрый AJAX и технологии на его базе, а можно посмотреть в сторону Web Sockets там, где эта технология уже поддерживается сегодня.

С помощью этого приложение можно будет «отвязать» от интернета в случае необходимости. Хранить данные в Application Cache, чтобы не перегружать браузер количеством информации. И при нормальном подключении передать данные. Так они никогда не пропадут. И влияние большой задержки запросов будет мало заметным.

Что, если вам необходимо на клиентской стороне произвести какой-то расчёт, обработку данных или, к примеру, локального файла, загруженного через File API? Все такие процессы потенциально могут привести к блокированию потока UI, что крайне нежелательно. Выходом могут стать технологии Web Workers и Web Messaging, позволяющие запускать выполнение задач на JavaScript в отдельных потоках и осуществлять взаимодействие между ними.

Это позволит разбить приложение на отдельные элементы.

То есть в приложении будет 3 основных блока: чат, доска и логика UI, которые смогу работать параллельно, каждый в своем потоке, и не ждать

завершения предыдущих операций, то есть не мешать друг другу. В тоже время они смогу тесно взаимодействовать. Это значительно ускорит работу.

Все такие вопросы усложняют решение, но в итоге выигрывает пользователь. Это стоит того.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К.Кичинский *На парусах HTML5. Как новые технологии меняют современный веб(03.03.2013)*. – <http://tiny.cc/53fdtw>

Выбор игрового движка при разработке игрового приложения для ОС Android

Кузин Анатолий Борисович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 401-И)

e-mail: shadwak@gmail.com

В работе рассматриваются наиболее популярные игровые движки, ориентированные на создание 2D игр для ОС Android, проводится их сравнительная характеристика и выбор наиболее оптимального из них.

Одним из первых и важнейших этапов в разработке любой игры является выбор *игрового движка*. Игровой движок не только упрощает процесс разработки игры, но и делает код более организованным и управляемым, позволяет работать абстрактно, и не иметь дело с низкоуровневыми представлениями вещей, где намного проще допустить ошибку. При создании 2D игр для ОС Android, существует достаточно богатый выбор движков, предоставляющих такие возможности. Многие из них распространяются под свободной лицензией и имеют открытый исходный код. Именно на таких бесплатных движках сосредоточим наше внимание. Среди них можно выделить три наиболее популярных: Cocos2d-x [1], Libgdx [2] и AndEngine [3]. Рассмотрим их более подробно.

При выборе движка для игры первым делом следует обратить внимание на используемый им *язык программирования*. Cocos2d-x написан на C++, в то время как Libgdx и AndEngine используют Java. Так как родным языком платформы Android является Java, то целесообразно использовать движки именно на данном языке программирования, это даст возможность избавиться от сложностей при использовании специфических API платформы. К тому

же, Java является языком с автоматическим управлением памятью, что значительно упрощает разработку на нём.

Важнейшую роль в выборе движка также играет *производительность*, тем более, когда речь идёт о разработке под мобильную платформу, с сильно ограниченными ресурсами. Физическая составляющая всех трёх движков представлена одной и той же системой моделирования поведения твердых тел в 2D — Vox2D, поэтому для сравнения производительности движков достаточно сравнить эффективность их графических подсистем. С этой целью для каждого движка был написан тест на прорисовку 500 спрайтов размера 64x64 пикселей, которые непрерывно перемещались, вращались и масштабировались. В роли тестового устройства выступал Amazon Kindle Fire. Критерий оценивания производительности – частота смены кадров в секунду. В итоге выяснилось, что наиболее эффективно справился с этой задачей движок Libgdx – он показал 61fps, в то время как для Cocos2d-x эта цифра составила 50fps, а для AndEngine – всего 32fps. Как видно, разница существенная, и если планируется создание достаточно сложной игры, которая потребует хорошей производительности, выбрать придётся между Libgdx и Cocos2d-x.

Главным недостатком, присущим практически всем бесплатным игровым движкам, является не полная или вовсе отсутствующая *документация*. Рассматриваемые движки не стали исключением. Если для AndEngine единственным источником информации является соответствующее сообщество разработчиков и анализ исходного кода, то движки Libgdx и Cocos2d-x имеют руководства по началу разработки и предоставляют описание основных классов. Однако, и этой информации чаще всего не достаточно при разработке сложного проекта.

Игровые движки, прежде всего, используются для сокращения времени разработки, и в связи с этим важно знать, имеет ли тот или иной движок достаточную *функциональность и набор инструментов* для скорейшей реализации вашей игры. Наиболее богатым в этом плане является проект Cocos2d-x, этот движок фактически является законченным продуктом, в то время как Libgdx и AndEngine всё ещё находятся на стадии активной разработки. Тем не менее, как в случае с Cocos2d-x, для Libgdx существует множество инструментов упрощающих разработку, такие как упаковщик текстур, редактор уровней, редактор частиц и некоторые другие. По этому параметру AndEngine сильно отстаёт от них и не может конкурировать на равных.

Если же рассматривать представленные движки с точки зрения *лёгкости в использовании*, то здесь AndEngine пробивается в лидеры, со своим простым и интеллектуально понятным API. Во многом именно благодаря этой простоте

он настолько популярен среди начинающих разработчиков игр. Libgdx же, напротив, обладает наиболее низкоуровневым API. Это может усложнить разработку, но делает его более универсальным и даёт возможность легко добавить функциональность, которая изначально не была предусмотрена движком.

Важным моментом также является то, что Cocos2d-x и Libgdx являются *мультиплатформенными* движками, и в случае необходимости, написанные с их помощью игры, могут быть портированы на другие платформы, такие как iOS, Linux, Windows. Libgdx, к тому же, благодаря особой архитектуре движка, даёт возможность запускать приложения как на персональном компьютере, так и на Android-устройстве без внесения каких-либо изменений в код программы. Эта особенность позволяет значительно сократить время, затрачиваемое на отладку кода.

Исходя из всего вышесказанного, можно сделать вывод, что если разработка игры главным образом нацелена на ОС Android, то наиболее оптимальным выбором будет движок Libgdx. Если же приоритетом является охватить как можно больше платформ, то целесообразно так же использовать Cocos2d-x. В то время как AndEngine разумно применять при разработке краткосрочных проектов, не требующих больших вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cocos2d-x. *Cross Platform Open Source 2D Game Engine*. – <http://cocos2d-x.org>
- [2] Libgdx. *Java Game Development Framework*. – <http://libgdx.badlogicgames.com>
- [3] AndEngine. *Free Android 2D OpenGL Game Engine*. – <http://andengine.org>

Построение ландшафтов

Лапченко Виталий Владимирович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: lapchenco@gmail.com

Технологии построения виртуальных ландшафтов стали особенно популярными после возникновения такого явления, как бесспорный успех игрового приложения Minecraft, созданного Маркусом Перссоном. Основной отличительной чертой этого приложения было то что, игрок находился на (практически) бесконечной поверхности и мог исследовать окружающий мир с минимальными ограничениями. В этой статье рассматриваются и сравниваются способы построения искусственного ландшафта подобного рода.

Основная задача генерации ландшафта – это построение карты высот. Карта высот представляет собой разбиение ограниченной плоскости на сегменты определённой формы и присвоение каждому сегменту параметра высоты.

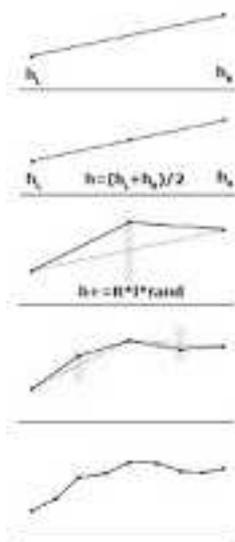


Рис. 1

Один из алгоритмов основан на построении диаграммы Вороного. Начинается всё со случайного бросания точек на карту. Затем по этим точкам строится диаграмма Вороного (и, соответственно, триангуляция Делоне), а на ней выполняется несколько итераций релаксации Ллойда, чтобы избавиться от слишком мелких полигонов. После чего случайным образом выбираются полигоны, подлежащие заполнению водой, а высота точек, принадлежащих остальным полигонам, устанавливается равной кратчайшему расстоянию до моря.

Самым распространенным и дающим одни из самых реалистичных результатов является алгоритм diamond-square (или square-diamond), расширение одномерного алгоритма midpoint displacement на двумерную плоскость.

На первом шаге выполняется алгоритм midpoint displacement (рис. 1). Как уже сказано, он работает не на двумерной плоскости, а на одномерном отрезке. Изначально любым образом задаётся высота на концах отрезка, после чего отрезок разбивается точкой посередине на два под-отрезка. Эта точка

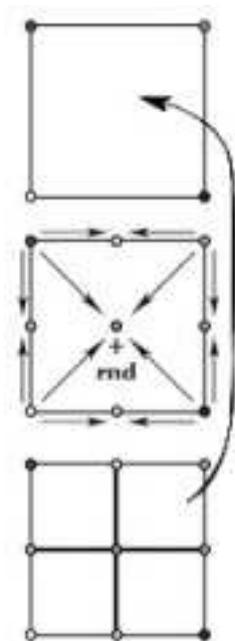


Рис. 2

смещается на случайную величину, после чего повторяется разбиение и смещение для каждого из полученных под-отрезков. И так продолжается — пока отрезки не станут длиной в один пиксель. Случайные смещения должны быть пропорциональны длинам отрезков, на которых производятся разбиения. Т.е. при разбиении отрезка длиной l — точка посередине него должна иметь высоту

$$h = \frac{h_l + h_r}{2} + \text{random}(-R * l, R * l)$$

(h_l и h_r — высоты на левом и правом конце отрезка, а константа R определяет «шероховатость» (roughness) получающейся ломаной и является главным параметром в данном алгоритме).

Обобщение этого алгоритма для двумерной карты высот заключается в следующем (рис. 2). Начнется алгоритм с присвоения случайных высот четырем углам всей карты целиком и разбиение её (для удобства предполагаем, что работаем с квадратной картой, причем её сторона является степенью двойки) на четыре равных квадрата. В каждом из них известно значение в одном из

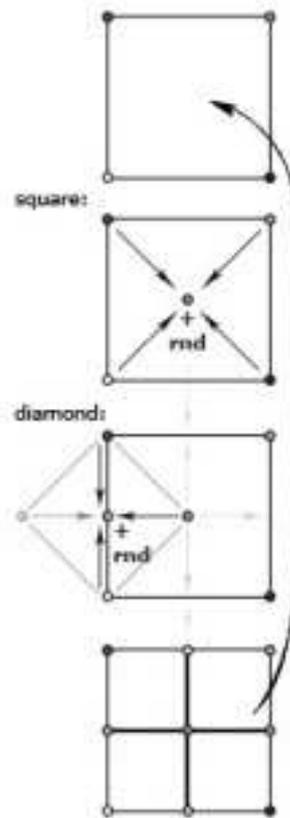


Рис. 3

углов. Остальные углы находятся при помощи интерполяции. Так же, как и в одномерном midpoint displacement — точка в центре получается усреднением высот всех 4 угловых точек, а каждая серединная точка на стороне большого квадрата — усреднением пары точек, лежащих на концах соответствующей стороны. Осталось привнести немного шума — сдвинуть случайным образом центральную точку вверх или вниз (в пределах, пропорциональных стороне квадрата) — и далее повторять рекурсивно наши действия для полученных квадратов.

Алгоритм diamond-square (рис.3) позволяющий получать фрактальные ландшафты — отличается от двумерного midpoint displacement тем, что состоит из двух шагов. Первый — т. н. «square» — точно так же определяет

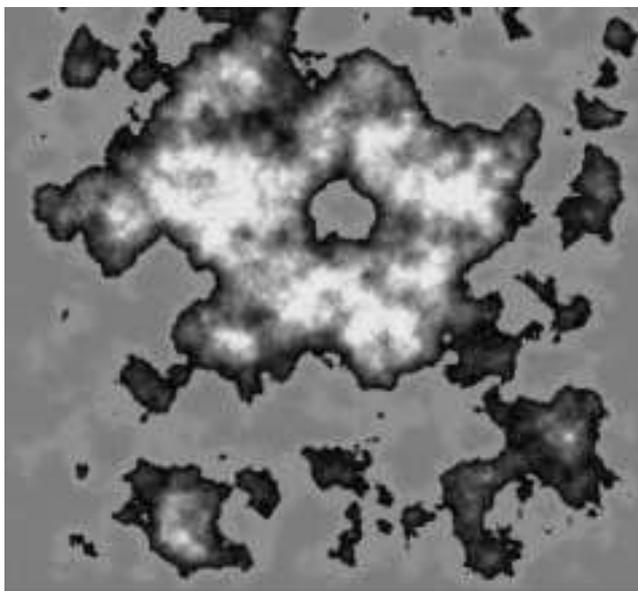


Рис. 4

центральную точку в квадрате путем усреднения угловых и добавлением собственно displacement'a — случайного отклонения. Вторым же шагом — «diamond» — призван определить высоту точек, лежащих на серединах сторон. Здесь усредняются не две точки — «сверху» и «снизу» (если говорить о точках на вертикальной стороне), но и пара точек «слева» и «справа» — то есть еще две полученных на шаге «square» центральных точки. Важно заметить, что эти две высоты, которые достались нам на предыдущем шаге, должны быть уже посчитаны — поэтому подсчет нужно вести «слоями», сначала для всех квадратов выполнить шаг «square» — затем для всех ромбов выполнить шаг «diamond» — и перейти к меньшим квадратам.

Итак, таковы основные алгоритмы построения карт высот для искусственно генерируемых ландшафтов. После генерации, наиболее реалистичные результаты дает последний из них, diamond-square (рис. 4), хотя и он не лишен некоторых недостатков. Например, создав карту, которая хорошая выглядит при сильном приближении — при просмотре целиком наблюдается множество мелких островков (а то и вовсе сплошной шум) вместо нескольких больших материков и океанов. Исправить это можно различным комбинированием

фрактальных ландшафтов разного масштаба. Их значения можно перемножать, складывать, использовать различные коэффициенты или, например, привести данные, полученные с помощью диаграммы Вороного — в общем, простор для экспериментов достаточно велик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shankel J. *Game Programming Gems. Volume 1.* – Connecticut: Engage Learning, , – 2000.
- [2] Olsen J. *Realtime Procedural Terrain Generation.* – Thesis, University of Southern Denmark – 2004.
- [3] Sestoft P. *Numeric performance in Java.* – IT University of Copenhagen Denmark, – 2010.

Применение линейных алгоритмов классификации в решении задач оптимизации с прецедентными исходными данными

Литвинов Дмитрий Сергеевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 401-И)

e-mail: dlitvinov28@gmail.com

Оптимизационные задачи широко распространены в практической деятельности человека. Они возникают повсюду, где требуется отыскать наилучшие параметры, обеспечить наименьшие затраты или наибольшую прибыль. Методы решения детерминированных задач оптимизации хорошо изучены за последнее столетие, однако, ввиду эмпирической природы реальных прикладных задач часто возникают *оптимизационные задачи с неполной начальной информацией*. В таких задачах значения целевой функции могут быть известны только на конечном множестве точек из области определения, либо же неизвестно допустимое множество, а заданы лишь некоторые его элементы. Подробнее классификация задач с неполной начальной информацией проведена в [1].

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\max f(x) \mid x \in \Omega \subseteq X, \tag{1}$$

где $f : X \rightarrow Y$ — целевая функция, для которой требуется отыскать объект $x \in X$, максимизирующий функцию, X — множество объектов, Y — множество значений функции и Ω — множество допустимых решений. Исходная информация о задаче может быть задана в виде множества $\{(x^i, y^i, \lambda^i), i = 1, \dots, n\}$, где $x^i \in X$ — объекты, $y^i \in Y$ — значения функции

на соответствующих объектах (если известны), $\lambda^i \in \{-1; +1\}$ — параметр, указывающий на принадлежность объекта x^i допустимому множеству. Задачу в такой постановке можно рассматривать как *задачу оптимизации с прецедентными исходными данными*. В работе [2] на основе таких задач выделяется класс задач совместного обучения по прецедентам.

При решении задач, представленных в прецедентной форме естественным подходом является использование алгоритмов классификации для восстановления информации о задаче. Рассмотрим один из наиболее эффективных классификаторов, метод опорных векторов (*support vector machine, SVM*), в применении к задаче совместного обучения по прецедентам. Метод опорных векторов строит оптимальную линейную (или кусочно-линейную) гиперповерхность, разделяющую классы в пространстве объектов.

Запишем классификатор SVM для задач классификации с двумя классами

$$a(x) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^h w_i K(x_i, x) - w_0\right), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — признаковое представление классифицируемого объекта, $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$, $i = 1, \dots, h$ — опорные объекты, w_i , $i = 1, \dots, h$ — параметры алгоритма, $K(u, v)$ — ядро, в общем случае — скалярное произведение в гильбертовом пространстве. Данный алгоритм строит гиперповерхность, разделяющую пространство объектов на два класса. Согласно [3] параметры w_i , получаемые для каждого из прецедентов при обучении, выделяют множество опорных объектов и оценивают значимость каждого из них, а ядро $K(u, v)$ позволяет использовать прием перехода в спрямляющее пространство, для случая линейно неразделимых классов.

Основная идея задач совместного обучения требует учитывать все компоненты задачи на каждом этапе. Применяя классификатор для восстановления допустимого множества, можно изменить эффективность этого процесса путем введения в список параметров известные значения целевой функции на обучающих объектах. Таким образом можно построить алгоритм, использующий в качестве ядра функцию $K(x_i, x; f(x))$, которая позволяет изменять положение разделяющей гиперповерхности с учетом целевой функции оптимизационной задачи (1). Представим некоторые часто используемые ядра в модифицированной форме:

1. $K(u, v; f) = f\langle u, v \rangle^d$, где d — степень полинома, описывающего разделяющую поверхность.

2. $K(u, v; f) = \tanh(1 + f\langle u, v \rangle)$

3. $K(u, v; f) = \sigma(1 + f\langle u, v \rangle)$, $\sigma(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$ — логистическая функция.

Используя указанные ядра в алгоритме (2), можно получить классификатор, реализующий идею совместного обучения.

Таким образом, рассмотрена модель для решения задач оптимизации с прецедентными исходными данными. Предложен способ модификации ядерных функций в линейных алгоритмах классификации для реализации идеи совместного обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Анафиев А. С. *Оптимизационные модели с прецедентной начальной информацией* / А.С.Анафиев, В.Ф.Блыщик. // Таврический вестник информатики и математики. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2011. – №2. – С. 51-57.
- [2] Анафиев А. С. *Подход к решению задач оптимизации с прецедентной начальной информацией* / А.С.Анафиев. // Таврический вестник информатики и математики. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. – №1. – С. 7-12.
- [3] Воронцов К. В. *Лекции по методу опорных векторов [Электронный ресурс]*. / [К. В. Воронцов] // URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/SVM.pdf> (дата обращения 21.03.13).

Методы извлечения и обработки содержимого веб-документов

Мазинов Осман Рустэмович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: omazinov@gmail.com

В работе рассмотрен пример извлечения и обработки содержимого веб-документа. Для решения задачи извлечения контента используется интерфейс DOM (объектная модель документа), позволяющий программам и скриптам получить доступ к содержимому HTML, XHTML и XML-документов, а также изменять структуру и оформление таких документов [1]. Для последующей обработки применяется векторная модель текста и латентно-семантический анализ.

1. ИЗВЛЕЧЕНИЕ СОДЕРЖИМОГО ВЕБ-РЕСУРСА

DOM (Document Object Model) это интерфейс, позволяющий динамически обращаться к содержимому, структуре и оформлению (стилю) документов. DOM не привязан к какой-либо конкретной платформе или языку [2].

Модель DOM не налагает ограничений на структуру документа. Любой документ известной структуры с помощью DOM может быть представлен в виде дерева узлов, каждый узел которого представляет собой элемент, атрибут, текстовый, графический или любой другой объект. Узлы связаны между собой отношениями "родительский-дочерний".

Для того чтобы обеспечить взаимную и обратную совместимость, специалисты международного консорциума W3C классифицировали эту модель по уровням, для каждого из которых была создана своя спецификация. Все эти спецификации объединены в общую группу, носящую название W3C DOM.

Любой информационно нагруженный веб-ресурс является проекцией многомерной структуры базы данных на одномерное пространство веб-документа. При разборе документа нужно учитывать спецификации языков разметки, а также соблюдение ресурсом рекомендаций W3C, и исходя из полученной от сервера информации, применять соответствующий парсер. В большинстве случаев строится полное DOM дерево, либо отдельные ветви для извлечения нужных фрагментов разметки, тегов, классов, идентификаторов.

В ходе работы были рассмотрены следующие средства, предоставляющие доступ к объектной модели документов: MSHTML, SgmlReader, Html Agility Pack. Было произведено их сравнение по качеству извлечения контента и простоте реализации на следующих задачах:

1. Извлечение всех файлов изображений на странице.
2. Получение содержимого фрагмента с заданным идентификатором.
3. Получение списка ссылок определенной веб-страницы.

Хорошее качество разбора документов показала .NET библиотека HTML Agility Pack, поддерживающая язык запросов XPath и XSLT-преобразование [3, 4].

2. ОБРАБОТКА КОНТЕНТА ВЕБ-ДОКУМЕНТА

Полученные фрагменты содержимого веб-ресурса могут быть использованы для дальнейшей обработки. Обработка полученных данных является довольно трудоемкой операцией, зависящей от типа данных и поставленных задач. Например, простейшей обработкой является комбинирование нужных фрагментов различных веб-ресурсов на одной странице, в удобном для пользователя виде. В качестве обработки может выступать классификация или кластеризация фрагментов текста или изображений.

Пример обработки текстовой информации. На официальном сайте международного союза КВН в разделе "Ценителю КВН" размещен архив шуток, распределенных по сезонам. Поставим задачу сбора, обработки и анализа

фрагментов текста. С помощью средств, описанных в параграфе 1, были получены 19 текстовых фрагментов с фестиваля "КиВиН-2010". Разобьем задачу обработки на следующие этапы:

1. Лингвистическая предобработка фрагментов текста

Лингвистическая предобработка текста включает в себя токенизацию, удаление стоп-символов - слов, встречающихся в каждом тексте и несущих в себе смысловой нагрузки (союзы, предлоги, частицы, местоимения и т.д.), стемминг - нахождение основы слова. Таким образом, исходный текст:

“Парадокс: если бы мы не учились в университете, мы бы не играли в КВН, а если бы мы не играли в КВН, мы бы учились в университете.”

будет преобразован в следующую строку:

“парадокс учи университет игра квн игра квн учи университет”

2. Представление фрагментов в виде векторов признаков

Главная идея векторной модели семантики (vector space model, VSM) – это представление каждого документа коллекции в качестве точки в многомерном пространстве (вектора в векторном пространстве). Близко лежащие друг к другу точки соответствуют семантически схожим документам [5].

Вес термина в документе («важность» слова для идентификации данного текста) можно определить различными способами. Для нашей задачи выбрана мера tf-idf:

$$\text{tfidf}(t, d, D) = \text{tf}(t, d) \times \text{idf}(t, D)$$

где частота слова (tf) и обратная частота документа (idf) вычисляются, соответственно [6]:

$$\text{tf}(t, d) = \frac{f(t, d)}{\max\{f(w, d) : w \in d\}}$$

$$\text{idf}(t, D) = \log \frac{|D|}{|\{d \in D : t \in d\}|}$$

В состав коллекции вошли 149 термов. Все термы, которые встречаются в документах обрабатываемой коллекции, можно упорядочить. Если теперь для некоторого документа выписать по порядку веса всех термов, включая те, которых нет в этом документе, получится вектор, который и будет представлением данного документа в векторном пространстве. Размерность этого вектора, как и размерность пространства, равна количеству различных термов во всей коллекции, и является одинаковой для всех документов.

3. Латентно-семантический анализ отображает документы и отдельные слова в т.н «семантическое пространство». При этом делаются следующие предположения:

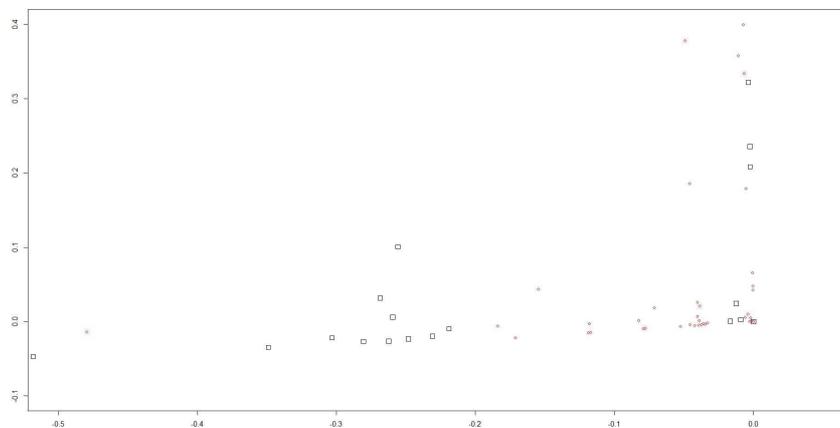


Рис. 2. Представление документов и термов в пространстве R^2

сделанный вывод, а именно: количество групп соответствует числу команд-участниц КВН, а количество документов в каждой группе - это число шуток от каждой команды, попавшее в архив. Наличие данного соответствия объясняется тем, что в шутках команд встречаются слова, идентифицирующие сами команды, например, названия городов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье были рассмотрены некоторые способы извлечения содержимого веб-документов, использующие объектную модель документа (DOM), а также пример обработки данных. Следует отметить, что обработка полученных данных требует более тщательного исследования, выходящего за рамки статьи. Пример создан исключительно в целях наглядной демонстрации идеи латентно-семантического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Объектная модель документа*. – http://ru.wikipedia.org/wiki/Document_Object_Model
- [2] *Request for Comments (RFC) Pages*. – <ftp://ftp.rfc-editor.org/in-notes/rfc3986.txt>
- [3] *Html Agility Pack*. – <http://htmlagilitypack.codeplex.com/>
- [4] *Extensible Stylesheet Language Transformations*. – <http://en.wikipedia.org/wiki/XSLT>
- [5] *Векторная модель*. – <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=VSM>
- [6] *Term frequency-inverse document frequency*. – <http://en.wikipedia.org/wiki/Tf-idf>
- [7] *SVD-разложение прямоугольной матрицы*. – <http://alglib.sources.ru/matrixops/general/svd.php>
- [8] *Singular value decomposition*. – http://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

Нейронные сети и их прикладное значение

Марциновский Евгений Павлович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 401-И)

e-mail: MartsinovskiyE@mail.ru

В работе рассматриваются базовые принципы построения искусственных нейронных сетей, их прикладное значение и обосновывается необходимость написания программного обеспечения для визуального проектирования ИНС.

Человеку и высшим животным буквально на каждом шагу приходится распознавать, принимать решения и обучаться. Нейросетевой подход возник из стремления понять, каким образом мозг решает столь сложные задачи, и реализовать эти принципы в автоматических устройствах.

Пока *искусственные нейронные сети* (artificial neural networks) являются лишь предельно упрощёнными аналогами естественных нейронных сетей. Нервные системы животных и человека гораздо сложнее тех устройств, которые можно создать с помощью современных технологий. Однако для успешного решения многих практических задач оказалось вполне достаточно «подсмотреть» лишь общие принципы функционирования нервной системы. Некоторые разновидности ИНС представляют собой математические модели, имеющие лишь отдалённое сходство с нейрофизиологией, что отнюдь не препятствует их практическому применению [1].

В 1943 году МакКаллок и Питтс на основе биологической нейронной клетки предложили первую математическую модель нейрона. Её обобщение приведено далее [2]. Нейрон представляет собой единицу обработки информации в *нейронной сети*. На рис. 1 показана модель нейрона, лежащего в основе искусственных нейронных сетей. В этой модели можно выделить три основных элемента:

1) Набор *синапсов* или *связей*, каждый из которых характеризуется своим *весом* или *силой*. В частности, сигнал x_j на входе синапса j , связанного с нейроном k , умножается на вес w_{kj} .

2) *Сумматор* складывает входные сигналы, взвешенные относительно соответствующих синапсов нейрона. Эту операцию можно описать как *линейную комбинацию*.

3) *Функция активации* ограничивает амплитуду выходного сигнала нейрона. Обычно нормированный диапазон амплитуд выхода нейрона лежит в интервале $[0, 1]$ или $[-1, 1]$.

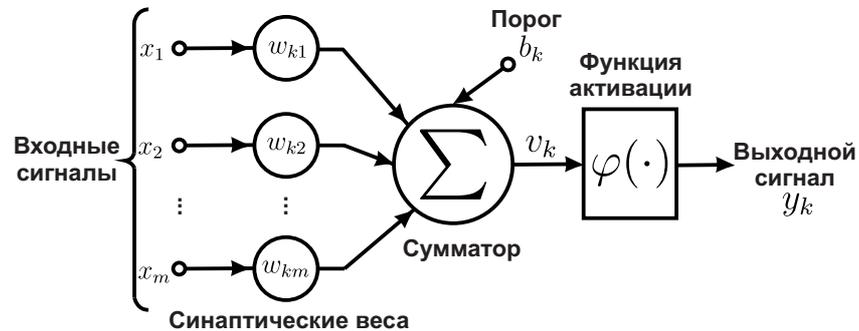


Рис. 1. Модель нейрона

В модель нейрона, показанную на рис. 1, включен пороговый элемент, который обозначен символом b_k . Эта величина отражает увеличение или уменьшение входного сигнала, подаваемого на функцию активации.

В математическом представлении функционирование нейрона k можно описать следующей парой уравнений:

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k)$$

где x_1, x_2, \dots, x_m — входные сигналы; $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$ — синаптические веса нейрона k ; u_k — линейная комбинация входных воздействий; b_k — порог; $\varphi(\cdot)$ — функция активации; y_k — выходной сигнал нейрона. Использование порога b_k обеспечивает эффект *аффинного преобразования* выхода линейного сумматора u_k . В модели, показанной на рис. 1, постсинаптический потенциал вычисляется следующим образом:

$$v_k = u_k + b_k$$

Рассмотрев модель отдельно взятого нейрона, мы можем понять что из себя представляет *многослойная нейронная сеть* [1]. Рассмотрим композицию нейронов, представленную на рис. 2. Значения всех n признаков одновременно подаются на вход всех H нейронов первого слоя. Затем их выходные значения подаются на вход всех M нейронов следующего слоя. В данном случае этот слой является выходным — такая сеть называется *двухслойной*. В общем случае сеть может содержать произвольное число слоёв. Все слои, за исключением последнего, называются *скрытыми*.

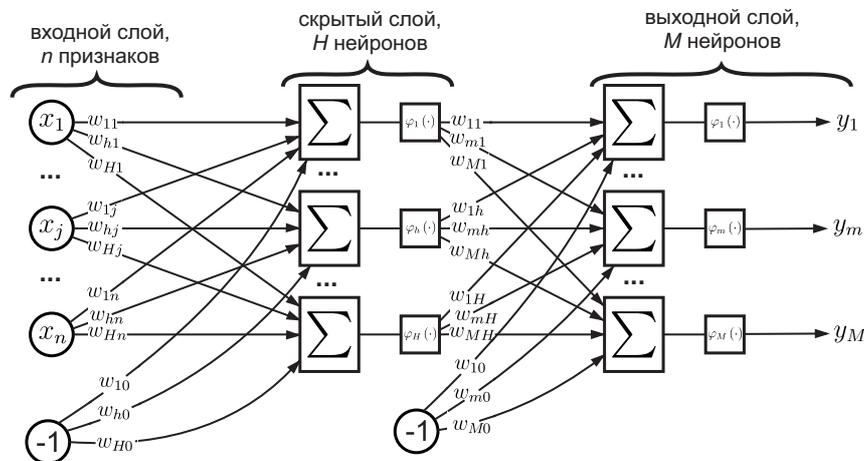


Рис. 2. Многослойная сеть с одним скрытым слоем

Ряд теорем доказывает, что любую функцию можно представить (хотя бы приближённо) с помощью нейронной сети, т.е. ИНС являются универсальными аппроксиматорами функций. Возможности сети возрастают с увеличением числа слоёв и числа нейронов в них. Двух-трёх слоёв, как правило, достаточно для решения подавляющего большинства практических задач классификации, распознавания образов, регрессии, прогнозирования, ассоциации и восстановления сигнала.

Во многих предметных областях нейронные сети уже сейчас решают практические задачи: экономика и бизнес (прогнозирование временных рядов — курсов валют, цен на сырьё, объемов продаж), медицина (постановка диагноза, мониторинг состояния пациента), авионика (обучаемые автопилоты, распознавание сигналов радаров), связь (сжатие видеoinформации, быстрое кодирование-декодирование), интернет (ассоциативный поиск информации, фильтрация информации, блокировка спама), автоматизация производства (контроль качества продукции, предупреждение аварийных ситуаций), политологические и социологические технологии (анализ опросов, выявление значимых факторов, кластеризация электората), безопасность и охранные системы (идентификация личности, распознавание автомобильных номеров, анализ аэрокосмических снимков), ввод и обработка информации (распознавание рукописных текстов), геологоразведка (анализ сейсмических данных, оценка ресурсов месторождений) [3].

Проектирование нейросети состоит из двух основных этапов: продумывание архитектуры сети (число слоев и число нейронов в слое) и собственно обучение сети. И если для второго этапа существуют эффективные алгоритмы настройки весов сети (метод обратного распространения ошибки), то первый этап почти всегда осуществляется «вручную» и считается практически искусством. Поэтому возникает потребность в программном обеспечении, которое позволит *автоматизировать* процесс проектирования архитектуры сети: *визуально добавлять нейроны, слои, менять число связей, пробовать различные функции активации; осуществлять обучение сети по заданной обучающей выборке, записывать ИНС в файл (библиотеку), для дальнейшего использования в более сложном программном обеспечении.*

Существующие аналоги (MATLAB, NeuroSolutions) либо чрезвычайно дороги, либо очень сложны в освоении, особенно для пользователей, которые только начинают свое знакомство с искусственными нейронными сетями. Поэтому подобное визуальное приложение можно было бы использовать при обучении новых специалистов по ИНС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воронцов К.В. *Лекции по искусственным нейронным сетям.* — 2007
- [2] Саймон Хайкин. *Нейронные сети: полный курс*, 2-е изд., испр. Пер. с англ. — М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. — 1104 с.
- [3] Ежов А.А., Шумский С.А. *Нейрокомпьютинг и его применение в экономике и бизнесе.* М.: МИФИ, 1998. — 224с.

Алгоритмы реализации игровых стратегий на основе теории Шпрага-Гранди

Омелькина Алёна Павловна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: Alyona_Om@mail.ru

Теорию Шпрага-Гранди независимо разработали Роланд Шпраг (Roland Sprague) в 1935 г. и Патрик Майкл Гранди (Patrick Michael Grundy) в

1939г. , описывающая так называемые равноправные (англ. "impartial") игры двух игроков, т.е. игры, в которых разрешённые ходы и выигрышность/проигрышность зависят только от состояния игры. От того, какой именно из двух игроков ходит, не зависит ничего: т.е. игроки полностью равноправны. Ознакомившись с данной теорией можно самостоятельно построить эффективную стратегию выигрыша в комбинаторных (логический играх).

Основным пунктом, является конечность игры. Сам процесс можно представить в виде движения по ациклическому ориентированному графу, вершинами которого являются состояния игры, а ребрами — переходы из одного состояния игры в другое в результате хода текущего игрока.

В качестве примеров подобных игр можно привести игру Ним, Баше и прочие игры. Рассмотрим пример нахождения выигрышной стратегии на примере игры Ним. Само название "ним" придумал математик Чарлз Бутон (Charles Bouton), который в 1901 г. опубликовал полный анализ этой игры.

Описание игры Ним:

Итак, у нас есть N кучек, в каждой из которых расположено положительное количество камней. Игроки по очереди берут из кучек положительное количество камней. Когда все кучки становятся пустыми, игра заканчивается поражением того игрока, который не может сделать ход. Следовательно, состояние игры можно описать набором из N положительных натуральных чисел, а игра заканчивается, когда сумма этих чисел становится равной нулю.

Теорема Шпрага-Гранди гласит об эквивалентности ему любой равноправной игры двух игроков.

Рассмотрим любое состояние v некоторой равноправной игры двух игроков. Пусть из него есть переходы в некоторые состояния v_i ($1 \dots k$) (где $k \geq 0$). Утверждается, что состоянию v этой игры можно поставить в соответствие кучку нима некоторого размера x (которая будет полностью описывать состояние v нашей игры — т.е. эти два состояния двух разных игр будут эквивалентны). Это число x — называется значением Шпрага-Гранди состояния v .

Более того, это число x можно находить следующим рекурсивным образом: посчитаем значение Шпрага-Гранди x_i по каждому переходу (v, v_i) , и тогда выполняется:

$$x = \text{mex} \{x_1, \dots, x_k\},$$

где функция mex от множества чисел возвращает наименьшее неотрицательное число, не встречающееся в этом множестве (название "mex — это сокращение от "minimum excludant").

Таким образом, мы можем, стартуя от вершин без исходящих рёбер, постепенно посчитать значения Шпрага-Гранди для всех состояний нашей игры. Если значение Шпрага-Гранди какого-либо состояния равно нулю, то это состояние проигрышно, иначе — выигрышно.

Доказывать теорему будем по индукции.

Для вершин, из которых нет ни одного перехода, величина x согласно теореме будет получаться как mex от пустого множества, т.е. $x = 0$. Но, в самом деле, состояние без переходов — это проигрышное состояние, и ему действительно должна соответствовать ним-кучка размера 0.

Рассмотрим теперь любое состояние v , из которого есть переходы. По индукции мы можем считать, что для всех состояний v_i , в которые мы можем перейти из текущего состояния, значения x_i уже подсчитаны.

Посчитаем величину $p = \text{mex}\{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда, согласно определению функции mex , мы получаем, что для любого числа i в промежутке $[0; p)$ найдётся хотя бы один соответствующий переход в какое-то из v_i -ых состояние. Кроме того, могут существовать также дополнительные переходы — в состояния со значениями Гранди, большими p .

Это означает, что текущее состояние эквивалентно состоянию с увеличенными с кучкой размера p : в самом деле, у нас есть переходы из текущего состояния в состояния с кучками всех меньших размеров, а также могут быть переходы в состояния больших размеров.

Следовательно, величина $\text{mex}\{x_1, \dots, x_k\}$ действительно является искомым значением Шпрага-Гранди для текущего состояния, что и требовалось доказать.

Применение теоремы Шпрага-Гранди

Опишем наконец целостный алгоритм, применимый к любой равноправной игре двух игроков для определения выигрышности/проигрышности текущего состояния v .

Функция, которая каждому состоянию игры ставит в соответствие ним-число, называется функцией Шпрага-Гранди.

Итак, чтобы посчитать функцию Шпрага-Гранди для текущего состояния некоторой игры, нужно:

-Выписать все возможные переходы из текущего состояния;

-Каждый такой переход может вести либо в одну игру, либо в сумму независимых игр;

В первом случае — просто посчитаем функцию Гранди рекурсивно для этого нового состояния.

Во втором случае, когда переход из текущего состояния приводит в сумму нескольких независимых игр — рекурсивно посчитаем для каждой из этих игр функцию Гранди, а затем скажем, что функция Гранди суммы игр равна XOR-сумме значений этих игр.

После того, как мы посчитали функцию Гранди для каждого возможного перехода — считаем *mex* от этих значений, и найденное число — и есть искомое значение Гранди для текущего состояния.

Если полученное значение Гранди равно нулю, то текущее состояние проигрышно, иначе — выигрышно.

Таким образом, по сравнению с теоремой Шпрага-Гранди здесь мы учитываем то, что в игре могут быть переходы из отдельных состояний в суммы нескольких игр. Чтобы работать с суммами игр, мы сначала заменяем каждую игру её значением Гранди, т.е. одной ним-кучкой некоторого размера. После этого мы приходим к сумме нескольких ним-кучек, т.е. к обычному ниму, ответ для которого, согласно теореме Бутона — XOR-сумма размеров кучек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] John Horton Conway. *On numbers and games.* – 1979
- [2] Bernhard von Stengel. *Lecture Notes on Game Theory.*
- [3] Nivasch G. *The Sprague-Grundy theory of impartial games.*
- [4] Куммер Б. Н. 2.2. *Функция Гранди и суммы порядка. Игры на графах.* – 1982.
- [5] Grundy P. M. *Mathematics and Games.* – Eureka 27.
- [6] *The Sprague-Grundy theory of impartial games (англ.).* – November 9 – 2005

Математические методы фиксации активности зеркальных нейронов

Пашкова Дария Михайловна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: knyaginya.ne@gmail.com

Одно из направлений в области искусственного интеллекта связано с изучением биологических процессов в головном мозге. Несмотря на значительный прогресс в исследовании головного мозга в последние годы, многое в его работе до сих пор остается не изученным. Одним из наиболее интересных событий в нейробиологии, за последние 20 лет, было открытие нового вида нейронов, названных впоследствии зеркальными нейронами.

Зеркальные нейроны - клетки головного мозга, которые активизируются не только когда вы самостоятельно выполняете то или иное действие, но и когда вы видите или слышите, как это действие совершается другими. Зеркальные нейроны можно рассматривать как некоторые переключатели поведения, находящиеся в ассоциативных зонах коры больших полушарий и связывающие сенсорные и моторные отделы. При восприятии действия, совершаемого другим индивидуумом, определенная группа нейронов сенсорных отделов, возбужденных по определенному рисунку, свойственному именно этому действию, возбуждает определенные зеркальные нейроны, которые в свою очередь возбуждают определенную группу моторных нейронов коры, результатом чего является подражание.

С момента открытия зеркальных нейронов в середине прошлой декады, множество ученых в разных концах земного шара ведут исследования в этой области. Гипотезы, созданные в начале XXI века, пока достаточно успешно позволяют объяснять такие явления социальной жизни, как подражание, эмпатия, понимание чужого сознания, вскрывают нейрофизиологические механизмы такого серьезного заболевания, как аутизм, и дополняют современные знания о языке и речи.

Для подтверждения существования гипотезы зеркальных нейронов был предложен следующий простой эксперимент.

Длительность эксперимента - 1 минута: 20 + 20 + 20 секунд.

Первые 20 секунд - испытуемый с помощью мышки водит шариком (нижнее кольцо) по кругу в пределах границ кольца (по часовой стрелки, либо против) с удобной для себя скоростью.

Вторые 20 секунд - в верхнем кольце начинает независимо двигаться шарик с переменной скоростью, в соответствии с которым испытуемый должен синхронизировать свою скорость движения.

Третьи 20 секунд - аналогично первым 20 секундам (независимое движение в верхнем окне прекращается). Требуется рассчитать степень синхронизации получаемых траекторий.

Разработка программного обеспечения, осуществляющего поддержку предложенного эксперимента, потребовала решения трех независимых задач. Во-первых, визуализация движения. Во-вторых, расчет меры синхронизации. В-третьих, представление полученных результатов в удобном для пользователя виде.

Разработан комплекс простого движения тестового образца на примере математической точки и аналогично движения манипулятором, для тестируемого. Выбрано движение по идентичным окружностям. Математическая точка

движется по первой окружности, как образец движения, а человек с помощью манипулятора управляет движением аналогичной точки на второй окружности. Для чего положение манипулятора проецируется на окружность, где отображается шарик, который следует за мышью, как проекция движения. Мерой совпадения движения взята синхронизация скоростей двух точек. В программе реализована запись значений углов, как положений точек (тестируемого и образца) на окружности, через равные, малые единицы времени. Разница углов используется в определении синхронизации на каждом промежутке времени.

Изменения и значения скорости и ускорений, полученные в ходе эксперимента, выводятся в виде графиков. Поскольку траектория движения фиксируется в дискретные моменты времени, то для лучшего визуального представления получаемых результатов используются сплайны. Применяется кубический сплайн, поскольку он сочетает в себе такие положительные свойства как простота реализации, небольшое количество требуемых в процессе вычислений данных и хорошее качество получаемой аппроксимации. Кубический сплайн задается значениями функции в узлах и значениями производных на границе отрезка интерполяции (либо первых, либо вторых производных). На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ есть полином третьей степени $S_i(x)$, коэффициенты которого надо определить. $S_i(x)$ записывается в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Для определения коэффициентов сплайна используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} a_i &= f(x_i) \\ h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} &= 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) \\ d_i &= \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \\ b_i &= \frac{1}{2}h_i c_i - \frac{1}{6}h_i^2 d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \end{aligned}$$

Таким образом, массивы значений скорости используются как точки, через которые проходит функция, где x - это значение скорости, а y - время в которое скорость зафиксирована. Результатом становится график изменения скорости от времени для движения образца и тестируемого.

Все результаты экспериментов, скоростей и синхронизации, пишутся в виде xml файлов, как наиболее удобные для отображения при данном объеме данных.

По ходу эксперимента столкнулись со следующими проблемами: сложность реализации передачи данных между потоками на платформе .NET, погрешности и время вычислений для расчета величин в виде поиска оптимальной точности, погрешности при построении проекции для движения манипулятора и отображения шарика. При небольших расстояниях от центра вращения расчет углов обладает немалой погрешностью и соответственно это влияло на расчеты. Небольшую трудность вызвала и обработка данных с привязкой ко времени, ведь вычисления занимали некоторые промежутки и таймер по которому производились расчеты мог отмерять интервалы в 100 микросекунд недостоверно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Iacononi M., Woods R.P., Brass M., Bekkering H., Mazziotta J.C., Rizzolatti G. *Cortical mechanisms of human imitation..* – Science – 1999 – 286: 2526-2528
- [2] Jagger J., Sharp J. *Microsoft Visual C#.NET Step-by-Step.* – U.S.; January, – 2010. – 656 pages
- [3] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры 7-е изд., стер.* – М.: Высш. шк., – 1998 – С. 320.

Использование нечеткой логики для решения задач прогнозирования

Попандопуло Степан Андреевич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: shteffan90@gmail.com

В самых разных экономических сферах деятельности: планирование финансовой деятельности предприятия; оптимизация товарооборота, финансовых и информационных потоков; оценка эффективности рекламной компании; анализ кредитоспособности клиента банка и пр. требуются такие инструменты, которые могут проводить подобные вычисления. Причем достаточно быстро и с приемлемой точностью. Выбор и реализация решения осуществляется в условиях существенной неопределенности факторов внешней и внутренней среды. Степень неопределенности такова, что использование многих традиционных методов финансового менеджмента оказывается эффективным только на стадии оценки эффективности решений, но не управления стратегией и тактикой их практической реализации. Таким образом, требуется разработка методов контроля и регулирования ключевых финансовых показателей

ведения экономики и представляется целесообразным изучить возможность применения в этих целях методов нечетких множеств и нечеткой логики. При решении большинства экономических задач, с которыми мы сталкиваемся, возникает необходимость приближенного задания условий и, соответственно, получаются столь же приближенные ответы. В теории принятия решений часто приходится оценивать различные величины, имеющиеся в распоряжении лица, принимающего решение (ЛПР): ресурсы, параметры внешней среды и др. Однако, использование методов теории вероятностей при принятии подобного решения может оказаться недостаточным – информации слишком мало [3]. В таком случае целесообразно использовать теорию нечетких множеств и нечеткой логики [2]. Аппарат нечеткой логики используют при анализе рисков инвестиционных проектов, анализе банкротства, техническом анализе фондового рынка и так далее [1]. Таким образом, использование методов нечетких множеств в решении экономических задач дает ряд преимуществ, т.к. позволяет: 1) включать в анализ качественные переменные; 2) оперировать нечеткими входными данными; 3) оперировать лингвистическими критериями; 4) быстро моделировать сложные динамические системы и сравнивать их с заданной степенью точности; 5) преодолевать недостатки и ограничения существующих методов оценки проектных рисков.

В связи с этим целью работы является изучение теории нечетких множеств для решения задач прогнозирования и разработка в пакете MATLAB прогноза кредитоспособности клиента банка. В работе рассмотрен обзор результатов по применению нечеткой логики для решения экономических задач, приведены различные подходы к решению задач прогнозирования. Приведены общие понятия и определения теории нечетких множеств, необходимые для построения нечеткой модели. Рассмотрена задача анализа кредитоспособности клиента банка, которая может быть решена при помощи пакета MATLAB и модуля FuzzyTECH. В заключении приведены выводы по работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

- 1) самостоятельно дан обзор результатов по применению нечеткой логики для решения экономических задач, приведены различные подходы к решению задач прогнозирования;
- 2) изучены общие понятия и определения теории нечетких множеств, необходимые для построения нечеткой модели;
- 3) рассмотрена задача анализа кредитоспособности клиента банка, которая

решена при помощи нечеткого моделирования в среде MATLAB и с использованием модуля FuzzyTECH.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Леоненков. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.
- [2] Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. – 165 с.
- [3] Е. А. Сазонова, С. В. Мурай. Решение экономических задач с помощью нечеткой математики - <http://www.conference.mdpi.org.ua/viewtopic.php?f=28&t=1163>

Кубические сплайны в алгоритме предсказания

Спирина Мария Евгеньевна

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 402 И)

e-mail: marimalin0@gmail.ru

Интуитивный подход к использованию кусочных функций в задачах аппроксимации встречался в математике в течение длительного времени. Но вторжение сплайнов в теорию приближения произошло из-за задачи интерполяции, благодаря их хорошим вычислительным и аппроксимативным свойствам.

В реальном мире большое количество физических процессов по своей природе являются сплайнами. В механике это деформация гибкой пластины или стержня, зафиксированного в отдельных точках; траектория движения тела, если сила, действующая на него, меняется ступенчато. В термодинамике это теплообмен в стержне, составленном из фрагментов с различной теплопередачей. В химии — диффузия через слои различных веществ. В моделировании — задание неких поверхностей. На данный момент традиционной сферой использования сплайнов стали компьютерные игры.

Но возникла проблема. Персонажи как будто двигаются рывками по игровому пространству. Следовательно, встал вопрос, как избежать запаздывания. Так вот, существует несколько способов решения возникшей проблемы. Это увеличение частоты пересылки пакетов, уменьшение их размеров за счет сжатия, и предсказание.

Разберемся с тем, что такое техника предсказания. Она используется для возмещения задержек при пересылке данных. Смысл в том, что мы пытаемся предсказать действие объекта исходя только из его характеристик. Например, используя элементарные выражения и, зная начальное положение и начальную скорость объекта, мы можем отобразить его траекторию. Она может использоваться для создания иллюзии плавного движения. Зная две контрольные точки (в которых известны и координата, и скорость), с помощью кубических сплайнов мы можем построить такую траекторию. Одна точка — это начальное положение объекта, другая — конечное. Рассмотрим некоторые методы решения поставленной задачи.

Самый примитивный метод предсказания — это точечный. Игрок перемещается в новое положение только при получении данных о нем. Вы видите реальное положение своего противника, только если он стоит на месте. Единственный выход — отсылать данные так, чтобы информация приходила при каждом обновлении экрана. Но это требует ужасной нагрузки на сеть и весьма сложно осуществимо. Из этого делаем вывод, что точечный метод непригоден для эффективного использования в играх, работающих в реальном времени.

Следующий метод — линейный. В нем траектория является отрезком прямой, соединяющим начальную и конечную точки. Физически это означает, что при использовании скорости объекта, мы предсказываем его следующее положение. Получаем, что игроки смогут двигаться только с постоянной скоростью. А при переходе на иную линейную траекторию, скорость может резко измениться. В результате у нас получится нереалистичная игра.

Если мы будем использовать еще и ускорение, то метод даст более гладкую траекторию (квадратичный метод). Но и он даст неверный результат: конечная скорость не будет соответствовать действительности. А происходит это из-за того, что квадратичные функции не могут описывать изменение траектории со временем. Таким образом, приходим к выводу о том, что оптимальнее всего использовать кубические сплайны. Кубический сплайн при построении дает возможность брать в расчет начальное и конечное положение, начальную и конечную скорость. Как результат, при достаточной скорости передачи данных, траектория будет реалистичной.

Использование кубических сплайнов

Для использования кубических сплайнов необходимо рассмотреть систему уравнений. Входными переменными для этих уравнений являются 4 пары координат — (x, y) .

Координата 1 — Начальное положение.

Координата 2 — Позиция после движения в течение одной секунды с начальной скоростью — Координата 1 + Начальная Скорость.

Координата 3 — Позиция после движения в течение одной секунды с конечной скоростью, взятой с обратным знаком — Координата 4 — Конечная Скорость.

Координата 4 — Конечное положение.

Параметрические уравнения, используемые для построения сплайна:

$$x = At^3 + B^2t + Ct + D$$

$$y = Et^3 + Ft^2 + Gt + H$$

Внесем их в нашу игру следующим образом:

1. Обрабатываем движение объекта по законам физики (вычисляя скорость и ускорение).

2. Когда получим данные о новом положении, создаём сплайн от текущей до следующей позиции.

3. Для первой и второй координаты сплайна используем текущую позицию и скорость.

Координата 1 = начальное положение

Координата 2 = начальное положение + начальная скорость

4. Пусть наш объект достигнет конечного положения за T шагов. Используем только что пришедшие данные, чтобы вычислить позицию через t секунд. Аналогично вычисляем конечную скорость.

Координата 3 = текущее положение + текущая скорость* t + 0.5*текущее ускорение* t^2

Координата 4 = Координата 3 - (текущая скорость + текущее ускорение* t)

Этот метод сочетает две формы предсказания: кубический сплайн и квадратичное движение. Результат выглядит более реалистично.

5. Используем траекторию для перемещения объекта на T шагов.

6. При подходе к концу сплайна переходим к началу и повторяем.

В результате выполненных операций мы получаем приятную для глаза, реалистичную графику в игре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Роджерс Д., Адамс Дж. *Математические основы машинной графики*. — М.: Мир, — 2001.
- [2] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*.
- [3] Вершинин В. В., Завьялов Ю. С, Павлов Н. Н. *Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания*. — Новосибирск: Наука, — 1988.

- [4] Шикин Е. В., Плис Л. И. *Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей.* – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996.

Методы синтеза и отбора признаков в задаче классификации текстов

Шершенюк Олег Михайлович

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

e-mail: shershenjuk@gmail.com

Классификация текстовых документов является одной из ключевых задач информационного поиска. В связи с ростом объема доступной текстовой информации возникает необходимость в отнесении документа к одной из нескольких тем (категорий) на основании его содержания [1]. Данная задача возникает в сфере построения поисковых систем для ограничения области поиска, при автоматическом реферировании, фильтрации спама, составлении интернет-каталогов и т.д.

Для решения задачи категоризации предлагается использовать статистические и метрические алгоритмы классификации, применяемые в машинном обучении. В этом смысле хорошо зарекомендовали себя линейные методы классификации SVM (метод опорных векторов) и наивный байесовский классификатор, а также метод ближайших соседей kpp, в совокупности с различными эвристиками для отбора информативных признаков. Также хорошо показали себя методы, основывающиеся на алгоритмах тематического моделирования LDA и PLSA (латентное размещение Дирихле и латентный семантический анализ), рассматриваемые в [3].

Пусть D - множество (коллекция) текстовых документов, W - множество (словарь) всех употребляемых в них слов, C - множество категорий документов, определенных заранее. Каждый документ $d \in D$ представляет собой последовательность слов (w_1, \dots, w_{n_d}) из словаря W , где n_d - длина документа в словах. Одно и то же слово может повторяться в документе много раз. Задача категоризации - это задача присвоения булева значения каждой паре $\{d, c\} \in D \times C$. Более формально, задача категоризации - это задача восстановления неизвестной целевой функции: $\Phi: D \times C \rightarrow \{1, 0\}$.

Однако перед тем как решать задачу категоризации, текстовые документы должны подвергнуться некоторой предобработке. Каждый документ представляется в виде множества слов, которые приводятся к нормальной форме,

для этого применяются лемматизаторы - специальные программы, использующие грамматический словарь всех словоформ. Также из множества слов удаляются так называемые стоп-слова, то есть повсеместно употребляемые слова, предлоги, союзы и т.д.

Следующий этап связан с построением некоторой числовой модели текста, например в виде многомерного вектора слов и их веса в документе. Также рассматривается возможность уменьшения размерности модели. Каждый документ рассматривается как вектор, состоящий из действительных чисел. Благодаря этому для классификации документов можно пользоваться методами, которые оперируют векторами действительных чисел.

Поставим в соответствие каждому документу вектор длины размера словаря $|W|$ и применим одну из нижеописанных схем взвешивания (сопоставления термам документа весов).

Схема взвешивания TF (term frequency) основывается на частоте появления термина в документе, CF - в коллекции, DF - на количестве документов в коллекции, содержащих конкретный термин. Комбинируя частоту термина в документе TF и обратную документную частоту, получают схему взвешивания TF-IDF как их произведение. Можно применять схемы взвешивания, основанные на вероятностной модели, например Okapi BM25 и её модификации, рассматриваемые в [2].

В результате задача категоризации сводится к серии задач двухклассовой классификации с классами c и \bar{c} , где c - класс документов категории c из заданного множества категорий, а \bar{c} - класс документов, не относящихся к категории c . Для того чтобы повысить качество классификации делают отбор информативных признаков с помощью таких методов как жадный отбор признаков на основе бустинга (процедура последовательного построения композиции алгоритмов) и отбор признаков с помощью взаимной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fabrizio Sebastiani *Machine learning in automated text categorization* . – ACM Computing Surveys, vol. 34, – 2002.
- [2] Shibin Zhou , Kan Li *Text Categorization Based on Topic Model* . – International Journal of Computational Intelligence Systems, Vol.2, No. 4, – 2009.
- [3] Воронцов К. В. *Тематические модели для коллекций текстов* . – Курс: Байесовские методы машинного обучения, – 2011.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция МАТЕМАТИКИ	3
Аликина Е.А. О теореме Путнама-Фуглида.....	3
Антропова А.А. Динамика периодических решений феноменологического уравнения нестационарного горения вдоль полосы.....	7
Ашурова Э.Н. Критерий простоты минимального симметрического оператора на графе.....	13
Баран И.В. Симметрические компактные субдифференциалы.....	18
Белялова Ф.Р. Семейства коммутирующих неограниченных измеримых самосопряженных операторов, присоединенные к коммутативной алгебре фон Неймана.....	21
Гуляй Н.С. Методическое пособие по курсу «Теория меры и интеграла».....	25
Жирова Е.С. Влияние нестандартных уроков на мотивацию изучения математики учениками 8-ых классов средних школ.....	29
Закирья Б.М. Упрощение Плюккерových координат прямой с помощью параллельного переноса репера.....	31
Кисель О.С. Дискретизация и локализация пространств Орлича-Лоренца.....	35
Крошка В.А. Методические аспекты разработки учебного пособия по исследованию операций и принятию решений.....	39
Курзина А.И. Методическая разработка на тему: “Тестовый контроль знаний по математике” (для студентов 1 курса колледжа ТНУ).....	40
Лемешенко М.Н. Свободные модули конечного типа над кольцом с делением.....	43

Люманова С.Р. Обучающая информационная программа «Стереометрия»	47
Мамбетова Ф.И. Внеклассная работа по математике. Олимпиадные задачи	50
Мартыненко М.В. Разработка методического материала для практического занятия по высшей математике для студентов 1-го курса направление подготовки “Химия”	53
Минакова М.А. Краткий обзор современных интерактивных технологий	56
Онопrienко А.В. Обобщение второй теоремы Гаула	59
Осетрова С.А. Оператор Лапласа в кватернионном гильбертовом модуле	62
Османова А.Р. Система массового обслуживания $M/M/1$ с отключением прибора	67
Полищук А.В. Колебания вязкоупругого стержня	71
Прудникова Н.В. Применение компьютерных технологий на уроках стереометрии	73
Савчин Т.Б. Роль теоремы Фробениуса в конструкции вещественной алгебры кватернионов \mathbb{H}	75
Смоленская Е.С. Неравенство треугольника в математике	79
Турчик П.В. Система $M/M/1$ с отключением прибора	83
Харак В.А. Интеллект-карты на уроках математики	86
Цыганкова А.В. Исключение уравнения Якоби в вариационных задачах: соболевский случай	89
Шкаденкова А.В. Об одной задаче теории бесконечных цепных дробей	93

Секция **ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ** 96

- Жабина А.Г.** Проблема параметризации сплайновых кривых и поверхностей при неравномерном расположении узлов интерполяции 96
- Клещев А.Ю.** Влияние знака кривизны на поведение параметрических сплайновых кривых..... 99
- Корытцев А.С.** Разработка приложений для мобильных устройств на базе iOS 103
- Курочкин А.А.** Разработка геоинформационной системы для мобильных устройств: математические модели, алгоритмы и программное обеспечение 105
- Леем Р.Э.** Табличный процессор как средство визуализации тестовых примеров по численным методам 107
- Подаревская К.М.** Использование приложений Java для учебно-методического пособия по численным методам 111
- Попович Е.А.** Технологии защиты данных и анонимизации в сети Интернет 116
- Шаповалова И.А.** Численный метод исследования спектра операторов, возникающих в некоторых задачах квантовой механики 119

Секция ИНФОРМАТИКИ	123
Бадудина Е.С. Метрические алгоритмы классификации в задачах оптимизации с прецедентной начальной информацией	123
Болдырев Д.О. Методы сетевого планирования и управления	125
Быченко Б.И. Модели потребительского выбора при неполной информации	131
Ганиева Э.А. Разработка игрового приложения “Пятнашки” для ОС Android	134
Голубцов А.А. Получение оценок релевантности web-страниц на основе анализа ссылок	137
Гуцул М.В. Построение приближения поверхности на основе прямых скелетов	141
Гуржий И.А. Отбор эталонных объектов в задаче категоризации текстов	145
Давидович А.Н. Влияние знака кривизны на поведение тригонометрического параметрического сплайна	149
Жуков П.И. Real-time Web-приложения	152
Згурская О.О. Методы оптимизации маршрута на карте города	156
Карпухин А.А. Категоризация текстов с помощью монотонных алгоритмов	158
Карпухин А.А. Применение монотонных алгоритмов в задаче обучения ранжированию	160
Костенко Р.О. Влияние понятия “Асинхронность” на современные веб приложения	164
Кузин А.Б. Выбор игрового движка при разработке игрового приложения для ОС Android	166

Лапченко В.В. Построение ландшафтов	168
Литвинов Д.С. Применение линейных алгоритмов классификации для решения задач оптимизации	173
Мазинов О.Р. Методы извлечения и обработки содержимого веб- документов	175
Марциновский Е.П. Нейронные сети и их прикладное значение	180
Омелькина А.П. Алгоритмы реализации игровых стратегий на осно- ве теории Шпрага-Гранди	183
Пашкова Д.М. Математические методы фиксации активности зер- кальных нейронов	186
Попандопуло С.А. Использование нечеткой логики для решения за- дач прогнозирования	189
Спирина М. Е. Кубические сплайны в алгоритме предсказания	191
Шершенюк О.М. Методы синтеза и отбора признаков в задаче клас- сификации текстов	194