

Крымский научный центр НАН Украины

Таврический национальный университет
им. В.И. Вернадского

Филиал Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова в г. Севастополе

**ТАВРИЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ
ПО ИНФОРМАТИКЕ И МАТЕМАТИКЕ**



18-20 мая 2011
КНЦ НАНУ
Симферополь

Редакционный совет:

Рудницкий О. И., к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики и информатики ТНУ им. В.И. Вернадского

Донской В. И., д.ф.-м.н., профессор, гл. научный сотрудник
КНЦ НАН Украины

Копачевский Н. Д., д.ф.-м.н., профессор

Орлов И. В., д.ф.-м.н., профессор

Чехов В. Н., д.ф.-м.н., профессор

Техническая группа:

Марянин Б. Д., к.ф.-м.н., доцент, ответственный редактор

Войтицкий В. И., к.ф.-м.н., ассистент, технический редактор

Толочко В. К., студент

СЕКЦИИ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ:

1. МАТЕМАТИКА, председатель Копачевский Н. Д.
математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра,
функциональный анализ, геометрия
2. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, председатель Чехов В. А.
математические модели в естествознании, численные методы решения
математических задач
3. ИНФОРМАТИКА, председатель Донской В. И.
прикладная информатика, программное обеспечение компьютерных систем

Печатается по решению научно-технического Совета КНЦ НАНУ и
Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины от
апреля 2011 года, протокол .

подписано к печати 27.04.2011 г.
отпечатано в типографии КНЦ НАНУ

Секция МАТЕМАТИКИ

Возможности использования диска «1С:Образовательная коллекция. Стереометрия, 10-11»

Абibuлаева С. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

Одной из самых актуальных проблем современного образования является применение новых компьютерных технологий в школьном образовании. Проблема обсуждается на страницах многих методических журналов и газет. Существуют различные мнения за и против использования компьютера в преподавании математики в школе. Занимаясь конкретным электронным учебником «Стереометрия», хочу отметить, что богатейшие возможности представления информации на компьютере позволяют изменять и неограниченно обогащать содержание образования. Изложение материала, выполнение упражнения с помощью программы создает возможность для повышения интенсивности урока, использование вариативного материала и различных режимов работы способствует индивидуализации обучения.

Рассмотрим с помощью программы «Стереометрия» интересную задачу о конусе максимального объема. Для этого решим вспомогательную задачу.

Задача 1. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α . Найти центральный угол β в развертке его боковой поверхности (углы измеряются в радианах).

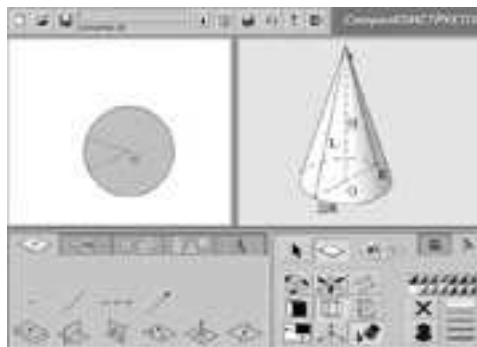


Рис. 1

Решение: В окне пространственных чертежей стереоконструктора (правое окно) изобразим осевое сечение конуса и кликнув по кнопке «красная стрелка» получим в окне плоских чертежей (левое окно) развёртку конуса (см. рис.1). Для этого последовательно выполним такие действия:

1) построим конус, воспользовавшись инструментом конус (3) на панели «Тела вращения» (см. рис.2);



Рис. 2

2) проведём высоту конуса и диаметр его основания, воспользовавшись инструментом прямая (2) в пространстве на первой панели для элементарных построений (см. рис.3).



Рис. 3

Замечаем, что $2\pi R = \beta L$ или

$$\beta = 2\pi \frac{R}{L} = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Теперь перейдём к решению основной задачи.

Задача 2. Дан круг радиуса L (см. рис. 1). Вырезать из него развёртку конуса наибольшего объема.

Решение:. Имеем (см. рис. 1)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \left(L \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \times L \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi L^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Если зафиксировать образующую L и менять угол α , то объем V достигнет наибольшего значения одновременно с функцией

$$y = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

где $0 < \alpha < \pi$. Сделаем замену переменных: $\sin \frac{\alpha}{2} = u$.

$$\text{Тогда } y = u^2 \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{u^4(1 - u^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}u^2u^2(2 - 2u^2)}.$$

Так как $u^2 + u^2 + (2 - 2u^2) = 2 = \text{const}$, то подкоренное выражение достигнет своего максимума при $u^2 = 2 - 2u^2$

Отсюда $u^2 = \frac{2}{3}$ и

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad (4)$$

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 2 \arcsin \frac{2,44949}{3} \approx 2 \arcsin 0,8165 = 2 \cdot 54^{\circ}44' = 109^{\circ}28'. \quad (5)$$

Учитывая (1) и (4), находим

$$\beta = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 120^{\circ} \cdot 2,44949 \approx 293^{\circ}56'. \quad (6)$$

Вычислим максимальный объем конуса. Для этого найденное в (4) значение $\sin \frac{\alpha}{2}$ подставим в (2):

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi L^3 \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\pi L^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi L^3 \sqrt{3}}{27} = 0,4030L^3 \quad (7)$$

Интересно отметить, что такие конусы встречаются в природе, разумеется, с известным приближением.

На основе составленных мною поурочных планов по стереометрии и разработок интересных олимпиадных задач с использованием программы «Стереометрия» будет составлено методическое пособие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петров С.М. Конус максимального объема в природе. // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 1972. – №4. –Т. 1.

Доминантная эргодическая теорема в пространствах Марцинкевича

Аблаева Л. Л.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

Пусть μ – мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$ и $S(0, \infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0, \infty)$.

Функцией распределения функции f называют функцию n_f , определяемую для любого $\tau \in (0, +\infty)$ равенством:

$$n_f(\tau) = n_{|f|}(\tau) = \mu\{t \in (0, \infty) : |f(t)| > \tau\}.$$

Обозначим через $S_0(0, +\infty)$ подпространство функций из $S(0, +\infty)$, для которых функция распределения $n_f(\tau) \not\equiv +\infty$.

Убывающей перестановкой функции $f \in S_0(0, +\infty)$ называется убывающая непрерывная справа функция f^* , равноизмеримая с функцией $f(t)$:

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in (0, \infty) : n_{f(t)}(\tau) \leq t\}.$$

Пусть $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$, тогда функция

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^* d\mu, \quad t \in (0, +\infty).$$

называется максимальной функцией Харди-Литлвуда.

Определение 1. Положительный линейный оператор

$$T : L_1 + L_\infty \longrightarrow L_1 + L_\infty$$

называется положительным $(L_1 - L_\infty)$ -сжатием или абсолютным сжатием, если

- 1°. T действует в $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$;
- 2°. $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq 1$, $\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq 1$.

Обозначим множество всех положительных $(L_1 - L_\infty)$ -сжатий через $\mathcal{P}\mathcal{C}$.

Для $T \in \mathcal{P}\mathcal{C}$ положим:

$$B_T f = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Пусть $\psi(t)$ ($\neq 0$) — квазивогнутая функция на $[0, \infty)$ и $\psi(0) = 0$. Множество

$$M_\psi = \left\{ f(t) \in S_0(0, \infty) : \|f\|_{M_\psi} = \int_0^{+\infty} f^*(t) d\psi(t) < \infty \right\}$$

называется пространством Марцинкевича.

Пространство Марцинкевича M_ψ является симметричным пространством. Рассмотрим для любого $\tau > 0$ оператор растяжения $\sigma_\tau: S(0, \infty) \rightarrow S(0, \infty)$

$$\sigma_\tau f(t) = f\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau > 0.$$

Операторы σ_τ ограниченно действуют в любом симметричном пространстве E ([1]).

Напомним, что функцией растяжения положительной всюду конечной функции $\psi(t)$ на полуоси $(0, \infty)$ называется функция

$$M_\psi(s) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

Рассмотрим норму $\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E}$ для пространства $E = M_\psi$.

Так как $M_\psi = \Lambda_\psi^1$, где Λ_ψ — пространство Лоренца ([3]), то

$$\|\sigma_\tau\|_{M_\psi} \leq \tau \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi} = \tau M_\psi\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

С другой стороны, M_ψ — максимальное симметричное пространство, тогда $M_\psi^1 = \Lambda_\psi$. Следовательно

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} \leq \tau \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{M_\psi}$$

и

$$\|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi} \leq \frac{1}{\tau} \|\sigma_\tau\|_{M_\psi}.$$

Таким образом

$$\|\sigma_\tau\|_{M_\psi} = \tau M_\psi\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Для симметричного пространства E положим:

$$d_E = \int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{E \rightarrow E} d\tau.$$

Следующая теорема, представляет собой аналог доминантной эргодической теоремы в пространствах Марцинкевича M_ψ .

Теорема 1. Если $\|\sigma_\tau\|_{M_\psi} = o(\tau)$, при $\tau \rightarrow \infty$, $T \in \mathcal{PC}$ и $f \in M_\psi$, то $B_T f \in M_\psi$ и

$$\|B_T f\|_{M_\psi} \leq \|f^{**}\|_{M_\psi} \leq d_{M_\psi} \|f\|_{M_\psi}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
- [2] Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.
- [3] Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Лоренца // Ученые записки ТНУ. — 2009. — Т. 22(61), № 1. — С. 86 – 92.

Об одной оценке погрешности для уравнения Фредгольма на полуоси

Аблялимова Э. Э.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$Kx(t) := \int_0^\infty k(t, \tau)b(\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $x(t), y(t) \in L_2(0, \infty)$ $k(t, \tau), b(\tau)$ - непрерывные функции такие, что

$$|k(t, \tau)| \leq \frac{c_k}{|(1+t)(1+\tau)|^k}, \quad |b(\tau)| \leq c_b \tau^\beta$$

$$t, \tau \in [0, \infty), \quad c_k, c_b > 0$$

Для произвольного банахового пространства X обобщением понятия интегрального уравнения (1) служит понятие линейного операторного уравнения, которое имеет вид

$$Ax = f. \quad (2)$$

Если оператор K компактный в рассматриваемом функциональном пространстве, то задача нахождения решения уравнения (2) некорректно поставлена, т.к. оператор, обратный к вполне непрерывному не является непрерывным. Таким образом, для корректности задачи решения уравнения (2) необходимо и достаточно существование непрерывного оператора обратного к оператору

A и для построения приближенного ее решения требуется применение специальных регуляризирующих алгоритмов.

Рассмотрим задачу приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода

$$Kx(t) := \int_0^\infty k(t, \tau)b(\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \geq 0,$$

Предположим, что вместо $y(t)$ известно некоторое возмущение $y_\delta \in L_2(0, \infty) : \|y - y_\delta\|_{L_2(0, \infty)} \leq \delta, \delta \in (0, 1)$.

Пусть далее J - неограниченный положительно определенный оператор в $L_2(0, \infty)$ вида $Jf(t) = (1+t)^{1/2}f(t)$. Через $L_{2,s}$ обозначим гильбертово пространство, порождаемое оператором J^s , со скалярным произведением $\langle f, g \rangle_s = \langle J^s f, J^s g \rangle$ и соответствующей нормой $\|f\|_s = \langle f, f \rangle_s^{1/2}$. $\|f\|_0 = \|f\|_{L_2(0, \infty)}$.

Предполагая гладкость решения $x(t) \in L_{2,s}, s > 2\beta - 2k + 1 > 0$, можно перейти к новому неизвестному элементу

$$z(t) \in L_2(0, \infty) : x(t) = J^{-s}z(t) = (1+\tau)^{-s/2}z(\tau),$$

что позволяет исследовать задачу в пространстве $L_2(0, \infty)$ и рассмотреть следующее уравнение для неизвестного $z(t)$:

$$Az(t) = y(t) \tag{3}$$

$$Az(t) := KJ^{-1}z(t) = \int_0^\infty k(t, \tau) \frac{b(\tau)}{(1+\tau)^{s/2}} z(\tau) d\tau.$$

Под приближенным решением x_δ уравнения (1) будем понимать элемент

$$x_\delta := J^{-s}z_\delta, \tag{4}$$

где z_δ - приближенное решение (3), которое ищется в виде

$$z_\delta = g_\alpha((A^{disc})^* A^{disc})(A^{disc})^* y_\delta^{disc}. \tag{5}$$

Здесь α - параметр регуляризации, $g_\alpha(t)$ - порождающая система функций для задействованного метода регуляризации, удовлетворяющая при некоторых константах $\xi_*, \xi_\nu > 0$ условиям

$$\sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \leq \xi_* \alpha^{-1/2}, \tag{6}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda^\nu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \leq \xi_\nu \alpha^\nu, \quad 0 < \nu < \nu_*$$

а для дискретизации коэффициентов A^{disc} и y_δ^{disc} имеют место оценки

$$\|A - A^{disc}\|_{L_2(0, \infty) \rightarrow L_2(0, \infty)} \leq c' \delta, \quad \|y - y_\delta^{disc}\|_0 \leq c'' \delta, \tag{7}$$

где $c', c'' > 0$ не зависят от δ .

Для оценки погрешности предложенного алгоритма (4)-(7), в метрике пространства $L_2(0, \infty)$ необходимо дополнительное условие гладкости на оператор K . Будем считать, что при некотором $r > 0$ и любой $f \in L_2(0, \infty)$ выполняется $\|Kf\|_0 \sim \|f\|_{-r}$.

Теорема 1. *Если точное решение $z(t)$ уравнения (3) имеет вид $z = |A|^{\nu}v, \|v\|_0 \leq p$, где величина $p > 0$ задана, а параметр $\nu > 0$ неизвестен, то для погрешности алгоритма (4)-(7) при любом $0 < \nu < 2\nu_* - 1$ справедлива оценка*

$$\|x - x_\delta\|_0 = O(\delta^\xi), \quad \xi = \frac{\nu r + \nu s + s}{(\nu + 1)(s + r)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бакушинский А.Б. *Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве.* // Ж.вычисл.матем. и матем.физ.-1967.-7,-№3.-С.672-677.
- [2] Красносельский М.А.Вайникко Г.М. *Приближенное решение операторных уравнений.*// -М.: Наука,1969.-456с.
- [3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.*//-М.: Наука, 1979.-285с.

Пространства Лоренца-Орлича

Абселямова Э.И.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И.ВЕРНАДСКОГО

Цель данной работы — рассмотрение пространств Лоренца-Орлича, которые позволяют с единой точки зрения исследовать такие симметричные пространства как пространство Орлича, пространство Лоренца и пространства $L_{p,q}$, которые играют большую роль в теории интерполяции линейных операторов, эргодической теории, теории приближений и многих других разделах математики.

Пусть μ — мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$ и $S(0, \infty)$ пространство всех μ -измеримых почти всюду конечных функций f на $(0, \infty)$ и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Функция $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ называется *функцией Орлича*, если Φ — непрерывна слева, неубывающая, выпуклая функция, для которой $\Phi(0) = 0$.

Предполагается также, что функция Орлича Φ — нетривиальна, т.е. существуют такие $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, что $\Phi(x_1) > 0$ и $\Phi(x_2) < +\infty$.

Пространством Орлича называется множество

$$\mathbf{L}_\Phi = \left\{ f \in S(0, \infty) : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) dx < \infty \text{ для некоторого } a > 0 \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_\Phi = \|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf \left\{ a > 0 : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) dx \leq 1 \right\}, f \in \mathbf{L}_\Phi.$$

Возрастающая, вогнутая функция Ψ на $[0, \infty)$ называется *функцией Лоренца*, если $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(x) \neq 0$.

Пространством Лоренца называется множество

$$\mathbf{L}_\Psi = \left\{ f \in S(0, \infty) : \int_0^\infty f^*(x) d\Psi(x) < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\Psi} = \|f\|_{\mathbf{L}_\Psi} = \int_0^\infty f^*(x) d\Psi(x), f \in \mathbf{L}_\Psi,$$

где f^* — неубывающая перестановка функции f .

Пространством $L_{p,q}$ называется множество

$$\mathbf{L}_{p,q} = \left\{ f \in S(0, \infty) : \left[\int_0^\infty x^{\frac{q}{p}} [f^*(x)]^q \frac{dx}{x} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_{p,q} = \left[\int_0^\infty x^{\frac{q}{p}} [f^*(x)]^q \frac{dx}{x} \right]^{\frac{1}{q}}$$

Пусть Φ и Ψ соответственно функции Орлича и Лоренца. Обозначим:

$$I_{\Psi,\Phi}(f) = \int_0^\infty \Phi(f^*) d\Psi, \quad \|f\|_{\Psi,\Phi} = \inf \left\{ a > 0, I_{\Psi,\Phi}\left(\frac{f^*}{a}\right) \leq 1 \right\}.$$

Пространством Лоренца-Орлича называется множество

$$L_{\Psi,\Phi} = \{f \in L_1 + L_\infty : \|f\|_{\Psi,\Phi} < \infty\}.$$

- Предложение 1.** 1). Если $0 < \|f\|_{\Psi, \Phi} < \infty$, то $I_{\Psi, \Phi} \left(\frac{f}{\|f\|_{\Psi, \Phi}} \right) \leq 1$
 2). Если $\|f\|_{\Psi, \Phi} \leq 1$, то $I_{\Psi, \Phi}(f) \leq \|f\|_{\Psi, \Phi} \leq 1$.
 3). Если $\|f\|_{\Psi, \Phi} > 1$, то $I_{\Psi, \Phi}(f) \geq \|f\|_{\Psi, \Phi} > 1$
 4). $\|f_n - f\|_{\Psi, \Phi} \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\Psi, \Phi}(k(f_n - f)) \rightarrow 0$ для любого $k > 0$.

Теорема 1. $(L_{\Psi, \Phi}, \|\cdot\|_{\Psi, \Phi})$ - перестановочно инвариантное пространство.

Пример 1. Пусть $\Psi(x) = x^{\frac{q}{p}}$. В этом случае $L_{\Psi, \Phi} = L_{\Phi}$.

Пример 2. Пусть $\Phi(x) = x$. В этом случае $L_{\Psi, \Phi} = L_{\Psi}$.

Пример 3. Пусть $\Phi(x) = x^q, \Psi(x) = x^{\frac{q}{p}}, 1 \leq q \leq p < \infty$. В этом случае $L_{\Psi, \Phi} = L_{p, q}$.

Функция $\varphi_E(t) = \|\chi_e\|_E$, где $\mu(e) = t$, называется фундаментальной функцией симметричного пространства E .

Пример 4. Рассмотрим фундаментальную функцию симметричного пространства $E = L_{\Psi, \Phi}$.

$$\begin{aligned} \varphi_E(t) = \|\chi_{[0; t]}\|_E &= \inf \left\{ a > 0 : \int_0^\infty \Phi \left(\frac{\chi_{[0; t]}(x)}{a} \right) d\Psi(x) \leq 1 \right\} = \\ &= \inf \left\{ a > 0 : \int_0^t \Phi \left(\frac{1}{a} \right) d\Psi(x) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\Phi \left(\frac{1}{a} \right) \leq \frac{1}{\Psi(t)}, \quad \frac{1}{a} \leq \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\Psi(t)} \right).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi_E(t) &= \inf \left\{ a > 0 : \Phi \left(\frac{1}{a} \right) \cdot \Psi(t) \leq 1 \right\} = \inf \left\{ a > 0 : a \geq \left(\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\Psi(t)} \right) \right)^{-1} \right\} = \\ &= \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\Psi(t)} \right)^{-1}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.J.Montgomery-Smit. Comparison of Orlicz-Lorenz spaces. *Studia Math.*, 103(1992), 161-189.
 [2] И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва, Мир, 1974, 331 с.
 [3] Халмош П. Лекции по эргодической теории – Ижевск: НИИЦ, –2001.–132 с.

Компактные субдифференциалы на временной шкале: теоремы о среднем

Александров И.М.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

Введено понятие компактного Δ – субдифференциала путем объединения понятий обычного компактного субдифференциала и Δ – производной. Изучены K_Δ – теоремы о среднем.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Вначале напомним понятия временной шкалы и Δ – производной (см.[1]).

Определение 1. *Временная шкала – произвольное непустое замкнутое подмножество действительных чисел.*

Определение 2. *Пусть \mathbb{T} – временная шкала. Для $t \in \mathbb{T}$ определим оператор переднего скачка $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ следующим образом:*

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

и оператор заднего скачка $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ следующим образом:

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Далее нам понадобится также множество \mathbb{T}^k , которое получается из временной шкалы \mathbb{T} следующим образом

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus [\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \text{если } \sup \mathbb{T} < \infty; \\ \mathbb{T}, & \text{если } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Теперь мы рассмотрим функцию $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и определим так называемую Δ – производную функции f в точке $t \in \mathbb{T}^k$.

Определение 3. *Рассмотрим функцию $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $t \in \mathbb{T}^k$. Определим $f^\Delta(t)$ как число, удовлетворяющее следующему свойству: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки t (где $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ для некоторого $\delta > 0$) такая, что*

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t) [\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Будем называть $f^\Delta(t)$ *дельта-производной* функции f в точке t .

В работах И.В. Орлова и Ф.С. Столякина ([2]-[3]) было введено понятие компактного субдифференциала (K – субдифференциала) для отображения

отрезка в произвольное локально выпуклое пространство и детально исследованы его свойства.

Определение 4. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta \rightarrow 0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного локально выпуклого пространства E , $B \subset E$. Будем говорить, что множество B есть K — предел (компактный предел) системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \rightarrow 0$ ($B = K - \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta$) если:

- 1) B — компактное множество в E ;
- 2) $\bigcap_{\delta>0} B_\delta = B$;
- 3) $\forall U = U(0) \subset E \quad \exists \delta = \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B \subset B + U(0))$.

Определение 5. Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\delta > 0$ введём частные выпуклые субдифференциалы:

$$\partial_{co} f(x, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Под K — субдифференциалом f в точке x мы понимаем K — предел частных субдифференциалов:

$$\partial_K f(x) := K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_{co} f(x, \delta),$$

если такой предел существует.

2. K_Δ — ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ.

Пусть \mathbb{T} — временная шкала, E — вещественное отделимое локально выпуклое пространство; $f : I \rightarrow \mathbb{E}$, где $I = [a, b]$ — некоторый отрезок в \mathbb{R} . Продолжим функцию $\sigma(t)$ на I по той же формуле (см. п. 1).

Определение 6. Пусть $x \in I$, $\delta > 0$. Частным Δ — субдифференциалом отображения f в точке x , отвечающим данному $\delta > 0$, называется замкнутое выпуклое множество

$$\partial_{co}^\Delta f(x, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{f(\sigma(x)+h) - f(\sigma(x))}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Определение 7. Отображение $f : I \rightarrow \mathbb{E}$ назовём K_Δ — субдифференцируемым в точке $x \in \mathbb{T}$, если существует K — предел частных Δ — субдифференциалов

$$\partial_K^\Delta f(x) = K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_{co}^\Delta f(x, \delta).$$

Множество $\partial_K^\Delta f(x)$ назовём компактным Δ — субдифференциалом отображения f в точке x (или K_Δ — субдифференциалом отображения f в точке x).

Теорема 1. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ K_Δ – субдифференцируема в точке $x \in I$ тогда и только тогда, когда в этой точке конечны нижняя и верхняя производные $\underline{\partial}^\Delta f(x)$ и $\overline{\partial}^\Delta f(x)$, при этом

$$\partial_K^\Delta f(x) = \left[\underline{\partial}^\Delta f(x); \overline{\partial}^\Delta f(x) \right].$$

Теорема 2. Пусть дан отрезок $[a; b + \gamma] \in \mathbb{R}$, на котором задана временная шкала \mathbb{T} , причём $\mathbb{T} \cap (b; b + \gamma) \neq \emptyset$. Пусть даны непрерывные отображения $f : [a; b + \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что существует $\partial_K^{\Delta,+} f(x)$ и $g'^{,+}(x)$ в любой точке $x \in (a; b)$ и

$$\partial_K^{\Delta,+} f(x) \leq g'^{,+}(x) \quad \text{для } a < x < b.$$

Тогда

$$f(\sigma(b)) - f(a) \leq g(b) - g(a).$$

Следствие. В условиях теоремы 5, если

$$\partial_K^{\Delta,-} f(x) \geq g'^{-}(x) \quad \text{для } a < x < b,$$

то

$$f(\sigma(b)) - f(a) \geq g(b) - g(a).$$

Теорема 3. (K_Δ – лемма Ферма)

Если функция f имеет локальный экстремум в точке x и K_Δ – субдифференцируема в этой точке, то

$$0 \in \partial_K^\Delta f(x).$$

Теорема 4. (K_Δ – теорема Дарбу)

Пусть задано отображение $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть задана временная шкала \mathbb{T} , причём $b \in \mathbb{T}$ и \mathbb{T} не содержит изолированных справа точек. Если функция f K_Δ – субдифференцируема на $[a; b]$, причём

$$\sup \partial_K^\Delta f(a) =: A < B := \inf \partial_K^\Delta f(b),$$

то для любого $C \in (A; B)$ найдётся такая точка $c \in (a; b)$, в которой $C \in \partial_K^\Delta f(c)$.

Теорема 5. (K_Δ – теорема о среднем)

Пусть задано отображение $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть задана временная шкала \mathbb{T} , причём $b \in \mathbb{T}$ и \mathbb{T} не содержит изолированных справа точек. Если отображение f непрерывно на $[a; b]$ и K_Δ – субдифференцируемо на $(a; b)$, то справедлива оценка

$$\frac{f(\sigma(b)) - f(a)}{b - a} \in \overline{\partial_K^\Delta f((a; b))}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Martin Bohner, Allan Peterson *Фракталы.*// Dynamic Equations on Time Scales, PRELIMINARY FINAL Version from May 4, 2001, с. 1-50
- [2] Ф. С. Стонякин, *Компактный субдифференциал вещественных функций.*// Динамические системы, 23, 2007, с. 99–112
- [3] И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.*// Современная математика. Фундаментальные направления, с. 121-138
- [4] А. Картан, *Теорема о конечных приращениях.*// Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, с. 43-58.

История Динамической Геометрии

Анисимова И.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

Несмотря на большое количество компьютерных средств для поддержки курса математики, количество продуктивных идей, которые выдержали испытание временем, невелико. Одной из самых эффективных оказалась идея, реализованная в программах Динамической Геометрии. Появлению Динамической Геометрии предшествовало увлечению формальным аксиоматическим подходом к изложению геометрии и уменьшению часов на её преподавание в школе. Основатели проекта положили в основу изучения геометрии эксперимент, наглядность, эвристическую деятельность. Развитию (а точнее восстановлению) такого взгляда на геометрию способствовало появление персональных компьютеров. Работа над Динамической геометрией началась в 80-х годах с проекта Cabri (CAhier de BRouillon Informatique, по-русски, Компьютерная Тетрадь), который предполагал создание среды для работы с объектами дискретной математики (графами, булевыми функциями). В 1985 году Жан-Мари Лаборде написал книгу «Cabri-geometre», посвящённую экспериментальному изучению геометрии, его студенты подготовили программное обеспечение для поддержки курса динамической геометрии.

Возможности программы открылись с появлением операционных систем с графическим интерфейсом (Mac и Windows). Наиболее быстрое развитие этого направления в 90-е годы наблюдалось в США, где в конце 80-х появилась

программа The Geometer's Sketchpad (Блокнот Геометра), которая основывалась на той же идее моделирования геометрических построений, преобразований и измерений, что и Cabri. В настоящее время в практике преподавания используются и другие программы, такие как GeoGebra, Cinderella (Германия), Dynamic Geometry (Украина), Математический Конструктор (1С) (Россия). Программа «The Geometer's Sketchpad» была русифицирована Институтом Новых Технологий (Москва) и распространяется под названием «Живая математика».

Одна из наиболее важных и нетривиальных задач, которые приходится решать учителю - как побудить ученика самостоятельно думать и создавать новое знание и как помочь ему в этом. В рамках школьной математики наиболее широкие возможности для проявления творческой активности в силу специфики своих задач предоставляет геометрия, так как требует высокого уровня самостоятельного мышления, навыка работы в ситуации многовариантного выбора. Поэтому для решения геометрических задач могут помочь задачи с подсказками. К сожалению, подсказки или указания зачастую превращаются в прямые инструкции, которые практически лишают задачу всего ее содержания. Использование компьютера, а точнее, программ Динамической Геометрии позволяют создавать новые виды заданий, сочетающих в себе наличие указаний с достаточным пространством для математической наблюдательности, догадки, изобретательности. Основным носителем информации в этих указаниях является не текст, а изображение, подвижное или статическое, которые являются визуальными подсказками.

Такие программы обладают презентационными средствами, которые могут быть использованы для достижения вышеназванных целей учителя.

Простейшим из таких средств является показ (или скрытие) каких-то фигур, измерений, вычислений, текстовых комментариев. При этом можно показать как полное решение, так и дополнительные построения, наталкивающие на его идею. Подсказки такого рода используются и в печатных изданиях, и на уроках - на классной доске. Цифровая версия позволяет выводить их шаг за шагом, дает более богатые графические возможности.

Второе, более интересное средство - перемещение «начальных» точек динамического чертежа-модели, определяющих положение и форму изображенной фигуры или ее частей. Используют два варианта таких перемещений.

В одном варианте начальные точки передвигаются на заранее заданные места так, чтобы привести фигуру в определенное «удобное» расположение. При обращении к «подсказке» чертеж автоматически переводится в этот удобный ракурс.

Второй вариант - это произвольное перемещение, которое производится учеником «вручную» (или запускается в автоматическом режиме кнопкой анимации). Оно позволяет увидеть непрерывно изменяющееся семейство фигур и выявить в нем закономерности, на которых можно базировать решение. Эти программы позволяют проверять правильность конструкций простым изменением параметров, что позволяет сделать преподавание более демократичным и индивидуализированным. Ученик может придумать неожиданное для учителя решение и легко убедить учителя в своей правоте. Разные ученики могут предложить разные решения. Появляется возможность введения в учебный процесс творческой составляющей, конструирование, эксперимент, исследование. При этом новые методы обучения оказываются технологичными, они не требуют от учителя дополнительного рабочего времени.

С использованием такого рода программ мной были рассмотрены темы школьного курса планиметрии и составлены планы уроков по некоторым из них. На основе этих разработок будет создано методическое пособие для учителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <http://intoks.ru/article/info.php?articles/id=11>
 [2] <http://ito.edu.ru/2007/Moscow/II/1/II-1-7413.html>

Дифференциальное исчисление функций бикомплексного переменного

Боева В. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

В работе рассмотрены различные подходы к определению функции бикомплексного переменного и ее производной. С помощью идемпотентного разложения удалось свести дифференциальное исчисление функций бикомплексного переменного к дифференциальному исчислению соответствующих функций комплексного переменного.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АЛГЕБРЕ БИКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

Обозначим через $\mathbb{B} = \{(q_0, q_1, q_2, q_3) \mid q_k \in \mathbb{R}\}$ множество бикомплексных чисел. Введем на множестве \mathbb{B} следующие операции:

(1) умножение на скаляр из \mathbb{R} :

$$\lambda(q_0, q_1, q_2, q_3) = (\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3).$$

(2) сложение:

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) + (p_0, p_1, p_2, p_3) = (q_0 + p_0, q_1 + p_1, q_2 + p_2, q_3 + p_3).$$

Очевидно, множество \mathbb{B} является линейным пространством над \mathbb{R} с базисом: $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$. Следовательно, любой вектор $q \in \mathbb{B}$ допускает единственное разложение по базисным векторам: $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$.

Операцию умножения на бикомплексных числах зададим через умножение базисных векторов:

$$\begin{aligned} i \times i &= -1, & i \times j &= k, & i \times k &= -j, \\ j \times i &= k, & j \times j &= -1, & j \times k &= -i, \\ k \times i &= -j, & k \times j &= -i, & k \times k &= 1. \end{aligned}$$

В результате мы получим ассоциативно-коммутативную вещественную алгебру с единицей.

Бикомплексное число также можно представить как упорядоченную пару комплексных чисел:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 i j = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i) j = z + \omega j,$$

где $z = q_0 + q_1 i, \omega = q_2 + q_3 i \in \mathbb{C}$.

Нетрудно видеть, что множество бикомплексных чисел \mathbb{B} можно также рассматривать как ассоциативно-коммутативную \mathbb{C} -алгебру с единицей размерности 2.

Бикомплексное число $\bar{q} = z - \omega j \in \mathbb{B}$ называется *сопряженным* к бикомплексному числу $q = z + \omega j \in \mathbb{B}$.

Произведение $\mathbb{C}N(q) = q\bar{q} = (z + \omega j)(z - \omega j) = z^2 + \omega^2$ будем называть *квадратичной формой* бикомплексного числа q .

Бикомплексное число q называется *сингулярным*, если $\mathbb{C}N(q) = 0$, в противном случае — *несингулярным*.

Обратный элемент существует только у несингулярных чисел и определяется равенством

$$q^{-1} = \frac{1}{\mathbb{C}N(q)} \bar{q} = \frac{z}{z^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} j. \quad (1)$$

Ненулевые сингулярные числа образуют множество делителей нуля в алгебре \mathbb{B} :

$$D(\mathbb{B}) = \{q \in \mathbb{B} \setminus \{0\} \mid \mathbb{C}N(q) = 0\}. \quad (2)$$

Элемент e алгебры \mathbb{B} называется *идемпотентным*, если $e^2 = e$.

Помимо 0 и 1 в алгебре \mathbb{B} существует два нетривиальных идемпотентных элемента:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1+k) \text{ и } e_2 = \frac{1}{2}(1-k). \quad (3)$$

Поскольку e_1, e_2 образуют комплексный базис алгебры \mathbb{B} , то для любого $q \in \mathbb{B}$ имеет место *идемпотентное разложение*:

$$q = xe_1 + ye_2, \quad x, y \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

В терминах идемпотентного разложения намного удобнее записывать критерий обратимости элемента $q : q = xe_1 + ye_2$ обратим тогда и только тогда, когда $xy \neq 0$. При этом $q^{-1} = \frac{1}{x}e_1 + \frac{1}{y}e_2$.

В терминах такого разложения можно также переписать множество делителей нуля. Пусть $q = z + \omega j \in D(\mathbb{B})$. Поскольку $\mathcal{CN}(q) = 0$, то $\omega = \pm iz$ и $q = z(1 \pm ij) = z(1 \pm k)$. Таким образом, множество делителей нуля $D(\mathbb{B}) = \{\alpha e_1, \beta e_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

2. ФУНКЦИИ НАД АЛГЕБРОЙ \mathbb{B} .

Пусть $q = z + \omega j$, $z, \omega \in \mathbb{C}$, тогда $q^2 = (z^2 - \omega^2) + 2z\omega j$. Поскольку $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{B} = 2$, то $1, q, q^2$ — \mathbb{C} -линейно зависимы. Это значит, что можно найти такие $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, что $c_0 + c_1q + c_2q^2 = 0$. или:

$$\begin{cases} c_0 + c_1z + c_2(z^2 - \omega^2) = 0, \\ c_1\omega + 2c_2z\omega = 0. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, что:

1. если $\omega \neq 0$, т.е. $q \notin \mathbb{C}$, то минимальный многочлен для $q \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ имеет вид:

$$\psi_q(\lambda) = \lambda^2 - 2z\lambda + z^2 + \omega^2 = (\lambda - (z - i\omega))(\lambda - (z + i\omega)). \quad (5)$$

Очевидно, что в этом случае спектр элемента $q = z + \omega j$ имеет вид:

$$\sigma(z + \omega j) = \{z \pm i\omega \mid z, \omega \in \mathbb{R}\}$$

2. если $\omega = 0$, то $q \in \mathbb{C}$ и $\psi_q(\lambda) = \lambda - q$.

Пусть $q \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$, $q = z + \omega j$. Обозначим $\lambda_1 = z - i\omega$, $\lambda_2 = z + i\omega$ — корни минимального многочлена.

Используя результаты [1] (§3, п.5) и выполнив соответствующие вычисления, построим спектральное разложение для функции бикомплексного переменного:

$$f(q) = f(\lambda_1)e_{10} + f(\lambda_2)e_{20},$$

где $e_{k0} = [h(q)]^{-1}\psi_{k0}(q)$, $k \in \{1, 2\}$, причем $h(q) = \psi_{10}(q) + \psi_{20}(q)$.

Так как $\psi_{10}(\lambda) = \lambda - z - i\omega$, $\psi_{20}(\lambda) = \lambda - z + i\omega$, то $h(\lambda) = 2\lambda - 2z$, и, соответственно, $\psi_{10}(q) = \omega(j - i)$, $\psi_{20}(q) = \omega(j + i)$, $h(q) = 2\omega j$, откуда $[h(q)]^{-1} = -\frac{1}{2\omega}j$.

Используя полученные выражения, имеем

$$e_{10} = -\frac{1}{2\omega}\omega j(j - i) = \frac{1}{2}(1 + k) = e_1,$$

$$e_{20} = -\frac{1}{2\omega}\omega j(j + i) = \frac{1}{2}(1 - k) = e_2.$$

Тогда для $q = z + \omega j$ получим

$$f(q) = f(\lambda_1)e_1 + f(\lambda_2)e_2,$$

где e_1, e_2 — идемпотентные элементы. Заметим, что $\lambda_1 = z - i\omega = x$, $\lambda_2 = z + i\omega = y$, где x, y — коэффициенты q в идемпотентном разложении.

Поэтому, если $q = xe_1 + ye_2$, то для всякой функции бикомплексного переменного f , определенной на спектре элемента q , имеет место разложение:

$$f(q) = f(x)e_1 + f(y)e_2. \quad (6)$$

Таким образом, всякая функция комплексного переменного определяет равенством (6) функцию бикомплексного переменного.

Пример 1. Пусть $f(\lambda) = \lambda^n$. Поскольку $q = xe_1 + ye_2$, тогда $q^n = x^n e_1 + y^n e_2$.

Пример 2. Пусть $f(\lambda) = \exp \lambda$. Поскольку $q = xe_1 + ye_2$, тогда $\exp q = e_1 \exp x + e_2 \exp y$.

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ БИКОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ИДЕМПОТЕНТНОМ РАЗЛОЖЕНИИ.

Определение 1. Производной функции f бикомплексного переменного называется предел

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} (f(q_0 + \Delta q) - f(q_0))\Delta q^{-1} = f'(x), \quad \Delta q \in D(\mathbb{B}), \quad (7)$$

если он существует и не зависит от направления.

Известно, что для любой функции бикомплексного переменного $f(q)$ справедливы следующие разложения по идемпотентам: если $q = xe_1 + ye_2$, то $f(q) = f(x)e_1 + f(y)e_2$. Пусть $\Delta q = \Delta x e_1 + \Delta y e_2$. Тогда $\Delta f(q) = f(q + \Delta q) - f(q) = \Delta f(x)e_1 + \Delta f(y)e_2$ и $\Delta q^{-1} = \frac{1}{\Delta x}e_1 + \frac{1}{\Delta y}e_2$.

Вычислим значение выражения $\Delta f(q) \cdot \Delta q^{-1}$:

$$\Delta f(q) \cdot \Delta q^{-1} = (\Delta f(x)e_1 + \Delta f(y)e_2) \left(\frac{1}{\Delta x} e_1 + \frac{1}{\Delta y} e_2 \right) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} e_1 + \frac{\Delta f(y)}{\Delta y} e_2,$$

где $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f(y)}{\Delta y} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$.

Предел $\Delta f(q) \cdot \Delta q^{-1}$ при $\Delta q \rightarrow 0$ существует и не зависит от направления тогда и только тогда, когда существует независимый от направления предел функции комплексного переменного $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Таким образом, получена следующая формула для производной функции бикомплексного переменного: если $f(q) = f(x)e_1 + f(y)e_2$, то

$$f'(q) = \frac{df(x)}{dx} e_1 + \frac{df(y)}{dy} e_2. \quad (8)$$

Поскольку $f(x)$ и $f(y)$ — функции комплексного переменного, то справедливы следующие правила дифференцирования для функции бикомплексного переменного:

- (1) $(f + g)'(q) = f'(q) + g'(q)$;
- (2) $(\alpha f)'(q) = \alpha f'(q)$;
- (3) $(f \cdot g)'(q) = f'(q) \cdot g(q) + f(q) \cdot g'(q)$.

Пример 3. Пусть $f(q) = q^n = x^n e_1 + y^n e_2$. Согласно формуле (8) $f'(q) = (q^2)' = (nx^{n-1})e_1 + (ny^{n-1})e_2 = nq^{n-1}$. Таким образом

$$(q^n)' = nq^{n-1}.$$

Пример 4. Пусть $f(q) = \sin q = (\sin x)e_1 + (\sin y)e_2$. Согласно формуле (8) $f'(q) = (\sin q)' = (\cos x)e_1 + (\cos y)e_2 = \cos q$. Таким образом

$$(\sin q)' = \cos q.$$

Пример 5. Пусть $f(q) = \cos q = (\cos x)e_1 + (\cos y)e_2$. Согласно формуле (8) $f'(q) = (\cos q)' = (-\sin x)e_1 + (-\sin y)e_2 = -((\sin x)e_1 + (\sin y)e_2) = -\sin q$. Таким образом

$$(\cos q)' = -\sin q.$$

Пример 6. Пусть $f(q) = \exp^q = (\exp^x)e_1 + (\exp^y)e_2$. Согласно формуле (8) $f'(q) = (\exp^q)' = (\exp^x)e_1 + (\exp^y)e_2 = \exp^q$. Таким образом

$$(\exp^q)' = \exp^q.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] .А.В. Кужель *Алгебры конечного ранга*, Симферополь, СГУ, 1979
 [2] И.И. Привалов *Введение в теорию функции комплексного переменного*, Москва, Наука, 1984
 [3] Stefan Rönin *Bicomplex algebra and function theory*, Finland, arXiv:math.CV/0101200v1 24 Jan 2001

Проблемы диагонализации неэрмитово самосопряженных матриц над телом кватернионов

Гончаренко А. М.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В работе рассматривается класс матриц, самосопряженных относительно операции неэрмитова сопряжения. На основе разложения Такаги получены критерии одновременной диагонализации двух неэрмитово самосопряженных кватернионных матрицы.

1. НЕЭРМИТОВО САМОСOPЯЖЕННЫЕ МАТРИЦЫ

Пусть $\mathbb{H} = \{q = (x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_t \in \mathbb{R}\}$ — вещественная алгебра кватернионов. Отметим, что \mathbb{H} — ассоциативная, но некоммутативная алгебра с единицей, причем, имеет место строгое включение $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Если $1, i, j, k$ — канонический базис, то кватернион q может быть представлен следующим образом: $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k = (x_0 + x_1i) + (x_2j + x_3i)j = q_1 + q_2j$, где $q_1 = x_0 + x_1i$, $q_2 = x_2 + x_3i$.

В \mathbb{H} существует две инволюции, которые (с точностью до изоморфизма) для кватерниона $q = q_1 + q_2j \in \mathbb{H}$ имеют вид:

$$\bar{q} = \bar{q}_1 - q_2j; \quad \hat{q} = q_1 - \bar{q}_2j.$$

Эти унарные операции в свою очередь определяют инволюции в алгебре матриц $M_n(\mathbb{H})$. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ и имеет вид $A = \|a_{st}\|$. Введем следующие обозначения:

$$\bar{A} = \|\bar{a}_{st}\|, \quad \hat{A} = \|\hat{a}_{st}\|.$$

Операции $(^a)$ и $(^*)$, действующие на матрицы следующим образом:

$$A^* := \bar{A}^T, \quad A^a := \hat{A}^T,$$

являются инволюциями в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{H})$.

Композиция этих инволюций определяет автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{H})$:

$$A^c := (A^a)^* = (A^*)^a.$$

Определение 1. Матрица A называется неэрмитово самосопряженной (или a -самосопряженной), если $A = A^a$.

В работе [2] получено разложение Такаги для произвольной a -самосопряженной матрицы.

Теорема 1. Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является a -самосопряженной, то она допускает разложение вида:

$$A = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, столбцы которой образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы AA^c , Σ — неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы AA^c , соответствующих этим собственным векторам.

2. ЗАДАЧИ ОДНОВРЕМЕННОЙ ДИАГОНАЛИЗАЦИИ a -САМОСOPPЯЖЕННЫХ МАТРИЦ

Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. Матрица A называется a -конгруэнтной матрице B , если существует обратимая матрица $S \in M_n(\mathbb{H})$ такая, что

$$A = SBS^a.$$

Отношение a -конгруэнтности является отношением эквивалентности и сохраняет у матрицы свойство a -самосопряженности. Особенно простым является критерий a -конгруэнтности a -самосопряженных матриц, доказанный в работе:

a -самосопряженные матрицы A и B a -конгруэнтны тогда и только тогда, когда $\text{rank} A = \text{rank} B$.

Разложение Такаги (см. теорему 6) свидетельствует об унитарной a -конгруэнтности a -самосопряженной матрицы некоторой диагональной матрице. Возникает вопрос, можно ли по аналогии с парой самосопряженных матриц говорить об одновременной диагонализации пары a -самосопряженных матриц. При некоторых достаточно общих дополнительных условиях эти задачи решаются в нашей работе.

Теорема 2. Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. Матрица A является a -самосопряженной и невырожденной, матрица B — a -самосопряженной, матрица $C = A^{-1}B$. Матрицы UAU^a и UBU^a диагональны для некоторой унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда C — нормальная матрица.

Доказательство 1. Пусть $UAU^a = \Sigma$, $UBU^a = \Lambda$, где Σ, Λ — диагональные матрицы, U — унитарная матрица. Очевидно, Σ, Λ — a -самосопряженные матрицы, и поэтому их элементы являются комплексными числами.

Так как $A = U^{-1}\Sigma U^{-a}$, $B = U^{-1}\Lambda U^{-a}$, то

$$C = A^{-1}B = U^a \Sigma^{-1} U U^{-1} \Lambda U^{-a} = U^a (\Sigma^{-1} \Lambda) U^{-a},$$

где матрица $\Sigma^{-1}\Lambda$ является диагональной с комплексными элементами на главной диагонали. Из унитарности матрицы U следует, что U^a — также унитарная матрица, поэтому C — нормальная матрица.

Обратно, пусть C — нормальная матрица. Следовательно, C — унитарно диагонализуема, то есть существует унитарная матрица $R \in M_n(\mathbb{H})$ и диагональная матрица $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ такие, что

$$C = R\Lambda R^*.$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\Lambda \in M_n(\mathbb{C}_+)$, то есть $\Lambda^a = \Lambda$.

Домножая слева на R^* , а справа на R , получим:

$$R^* A^{-1} B R = \Lambda.$$

Отсюда $BR = AR\Lambda$ и

$$R^a BR = R^a AR\Lambda, \quad (1)$$

причем, R^a — унитарная матрица.

Пусть совпадающие числа λ_i сгруппированы так, что:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{bmatrix}$$

где $\Lambda_i \in M_{n_i}(\mathbb{H})$, $1 \leq n_i \leq n$; $\Lambda_i = \mu_i I$, $i = 1, \dots, p$; $\mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$.

Обозначим $\tilde{B} := R^a BR$, $\tilde{A} := R^a AR$. Очевидно, матрицы \tilde{B} и \tilde{A} — a -самосопряженные, причем из равенства (1) следует

$$\tilde{B} = \tilde{A}\Lambda, \quad \tilde{B} = \Lambda\tilde{A}. \quad (2)$$

Пусть $\tilde{B} = [\tilde{B}_{st}]$, $\tilde{A} = [\tilde{A}_{st}]$, где \tilde{B}_{st} , \tilde{A}_{st} — блоки, согласованные с блочной структурой матрицы Λ , и $\tilde{B}_{st}^a = \tilde{B}_{ts}$, $\tilde{A}_{st}^a = \tilde{A}_{ts}$.

Из равенства (2) следует, что

$$\tilde{B}_{st} = \tilde{A}_{st}\mu_t, \quad \tilde{B}_{st} = \mu_s\tilde{A}_{st},$$

откуда $\tilde{A}_{st}\mu_t = \mu_s\tilde{A}_{st}$.

Пусть $a_{uv}^{(st)}$ — произвольный элемент матрицы \tilde{A}_{st} , $a_{uv}^{(st)} = x_{uv} + y_{uv}j$, где $x_{uv}, y_{uv} \in \mathbb{C}$. Тогда $(x_{uv} + y_{uv}j)\mu_t = \mu_s(x_{uv} + y_{uv}j)$ или

$$\begin{cases} x_{uv}\mu_t = \mu_s x_{uv}, \\ y_{uv}\bar{\mu}_t = \mu_s y_{uv}. \end{cases}$$

Если $s \neq t$, то $\mu_s \neq \mu_t$, $\mu_s \neq \bar{\mu}_t$, откуда: $x_{uv} = y_{uv} = 0$ и $\tilde{A}_{st} = 0$ для любого $s \neq t$.

Это означает, что матрицы $R^a BR$ и $R^a AR$ имеют блочную структуру, согласованную со структурой матрицы Λ , то есть:

$$\tilde{B} = R^a BR = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_p \end{bmatrix}; \quad \tilde{A}\Lambda = R^a AR\Lambda = \begin{bmatrix} A_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p\mu_p \end{bmatrix},$$

где $A_i, B_i \in M_{n_i}(\mathbb{H})$. При $p = n$ получаем тем самым требуемое приведение. При $p < n$ имеется блок размера $n_i > 1$. В этом равенстве матрицы B_t и A_t a -самосопряженные.

Пусть разложение Такаги для матрицы A_t имеет вид

$$A_t = S_t \Sigma_t S_t^a, \quad (3)$$

где $S_t, \Sigma_t \in M_{n_t}(\mathbb{H})$, S_t — унитарная матрица, а Σ_t — вещественная диагональная матрица с неотрицательными элементами.

Так как $B_t = \mu_t A_t = A_t \mu_t$, то для любого элемента

$$a_{uv}^t = x_{uv} + y_{uv}j, \quad x_{uv}, y_{uv} \in \mathbb{C}$$

матрицы A_t имеет место равенство

$$\mu_t(x_{uv} + y_{uv}j) = (x_{uv} + y_{uv}j)\mu_t,$$

откуда $(\mu_t - \bar{\mu}_t)y_{uv} = 0$. Следовательно, для $\mu_t \neq \bar{\mu}_t$ $y_{uv} = 0$ и матрица A_t комплексная. Поэтому матрицу S_t в разложении (3) также можно выбрать комплексной. Таким образом, в любом случае и для $\mu_t \in \mathbb{R}$, и для $\mu_t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$B_t = \mu_t(S_t \Sigma_t S_t^a) = S_t(\mu_t \Sigma_t) S_t^a, \quad t = \bar{1}, p.$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_k \end{bmatrix},$$

где $S_i = [1]$ при $n_i = 1$. Здесь матрица S также унитарная. Тогда справедливы разложения:

$$R^a BR = S(\Sigma\Lambda)S^a, \quad R^a AR = S\Sigma S^a.$$

Следовательно,

$$A = [(R^{-1})^a S] \Sigma [(R^{-1})^a S]^a, \quad B = [(R^{-1})^a S] \Sigma \Lambda [(R^{-1})^a S]^a.$$

Таким образом матрицы A, B диагонализуемы при помощи унитарной матрицы $U = (R^{-1})^a S$.

Без доказательства приведем еще один результат об одновременной диагонализации.

Теорема 3. Если обе матрицы A и B a -самосопряженные, то необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$, такой, что обе матрицы UAU^a и UBU^a диагональны, является нормальность матрицы AB^* .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.
- [2] Карпенко И.И. Неэрмитово самосопряженные матрицы над телом кватернионов // Ученые записки ТНУ, Том 23 (62) № 1 (2010). — 77-90 с.
- [3] Fuzhen Zhang. *Quaternions and matrices of quaternions.* // Linear algebra and its applications, 1997. — 21-57с.

s-дискриминанты ранга 2

Корнейчук В.В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

В работе рассматриваются s -дискриминанты ранга 2, которые раскладываются в цепные дроби определенной структуры.

Пусть D - натуральное число, не являющееся точным квадратом, $a, b \in \mathbb{Z}$. Все определения и понятия, используемые ниже без пояснений, хороши известны. При необходимости их можно найти в литературе [2]- [3]. Рассмотрим квадратичную иррациональность (КИ) $\alpha = \frac{\sqrt{D-b}}{a}$, которая раскладывается в цепную дробь (ЦД) вида:

$$\alpha = [q_0, \overline{\pi, sq_0}], \quad (1)$$

где $s \geq 2$ - натуральное число, а π - это палиндром: $q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, q_i \in \mathbb{N}$.

В работе [2] доказана теорема об условиях разложения КИ α в ЦД вида (1). Следуя [2] будем называть их *s-дискриминантами*.

Количество палиндромов π_i , содержащихся в ЦД, будем называть *рангом* s -дискриминанта. Таким образом ЦД из правой части равенства (1) - это s -дискриминант ранга 1.

Рассмотрим более общий случай. Пусть заданы два палиндрома π_1 и π_2 , имеющие структуры: $q_1, q_2, \dots, q_2, q_1$ и $g_1, g_2, \dots, g_2, g_1$, соответственно. Тогда, как известно [2], имеют место следующие разложения:

$$[\pi_1, \pi_2] = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad [\pi_2, \pi_1] = \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}.$$

Получены доказательства следующих теорем.

Теорема 1. *Для выполнения равенств*

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{\pi_1, \pi_2, sq_0}], \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{D} - b^*}{a} = [q_0, \overline{\pi_2, \pi_1, sq_0}], \quad (2)$$

где $s \geq 2$ - *натуральный параметр, необходимо выполнение следующего условия:*

$$b + b^* = aq_0(s - 2), \quad q_0 = [\alpha_1] = [\alpha_2] > 1. \quad (3)$$

Если это условие выполнено, то

$$\begin{aligned} D &= (Q_{n-1} - P_{n-2} + sq_0P_{n-1})^2 + 4P_{n-1}(Q_{n-2} + sq_0P_{n-2}), \\ b &= P_{n-2} - Q_{n-1} + (s - 2)q_0P_{n-1}, \\ b^* &= Q_{n-1} - P_{n-2} + (s - 2)q_0P_{n-1}, \\ a &= 2P_{n-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

КИ, представленные формулой (2), будем называть *s-дискриминантами* ранга 2.

Пример 1. КИ $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2300-10}}{22} = [1, \overline{1, 2, 1, 1, 1, 3}]$ и $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2300-12}}{22} = [1, \overline{1, 1, 1, 2, 1, 3}]$. Условие (3) выполнено ($s = 3, q_0 = 1$). Таким образом, α_1 и α_2 - 3 - дискриминанты ранга 2.

Пример 2. Рассмотрим 2 - дискриминант ранга 2 $\beta = [2, \overline{2, 2, 1, 3, 1, 4}]$. Используя формулы (4), приходим к равенству: $\beta = \frac{\sqrt{29580}-12}{66}$.

Пусть теперь

$$[\pi_1, sq_0, \pi_2] = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad [\pi_1] = \frac{R_{s-1}}{T_{s-1}}, \quad [\pi_2] = \frac{V_{m-1}}{W_{m-1}}.$$

Теорема 2. Для выполнения равенств

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [\overline{\pi_1, sq_0, \pi_2}], \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{D} - b}{a^*} = [\overline{\pi_2, sq_0, \pi_1}], \quad (5)$$

где $s \geq 2$ - натуральный параметр, необходимо выполнение следующего условия:

$$aa^* = D - b^2 \quad (6)$$

Если это условие выполнено, то

$$\begin{aligned} D &= (Q_{n-2} - P_{n-1})^2 + 4Q_{n-1}P_{n-2}, & b &= Q_{n-2} - P_{n-1} \\ a &= 2Q_{n-1}, & a^* &= 2P_{n-2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= V_{m-1}R_{s-2} + V_{m-2}R_{s-1} + sq_0V_{m-1}R_{s-1}, \\ Q_{n-1} &= V_{m-2}R_{s-2} + V_{m-1}T_{s-2} + sq_0V_{m-1}R_{s-2}, \\ P_{n-2} &= W_{m-1}R_{s-2} + W_{m-2}R_{s-1} + sq_0V_{m-2}R_{s-1}, \\ Q_{n-2} &= W_{m-2}R_{s-2} + V_{m-2}T_{s-2} + sq_0V_{m-2}R_{s-2}, \\ T_{s-1} &= R_{s-2}, \quad W_{m-1} = V_{m-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пример 3. Пусть $\alpha_1 = \frac{5\sqrt{237+45}}{78} = [1, 1, 1, 3, 2, 2]$ и $\alpha_2 = \frac{5\sqrt{237+45}}{50} = [2, 2, 3, 1, 1, 1]$. Условие (6) выполнено ($s = 3$) и α_1, α_2 - 3 - дискриминанты ранга 2.

Пример 4. Рассмотрим 2 - дискриминанты ранга 2 $\gamma_1 = [2, \overline{1, 2, 4, 1, 1}]$ и $\gamma_2 = [1, \overline{1, 4, 2, 1, 2}]$. Используя формулы (7), находим вид КИ: $\gamma_1 = \frac{8\sqrt{138+62}}{58}$, $\gamma_2 = \frac{8\sqrt{138+62}}{86}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Третьяков Д.В. Об одном обобщении уравнения Пелля.// Spectral and evolution problems. V.18, 2008, p.141-147.
- [2] Бухштаб А.А. Теория чисел.// М.: Гос.уч.-пед.изд.Мин.просв.РСФСР, 1960. -376с.
- [3] Виноградов И.М. Основы теории чисел.// М.: Наука, 1972.

Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах

Пешеходько Т.Н.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

Понятие K -субдифференциала, известное для отображений скалярного аргумента, обобщается на случай векторного аргумента в банаховом пространстве. Рассмотрен ряд свойств K -субдифференцируемых отображений

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах И. В. Орлова и Ф. С. Стоняка ([4]-[6]) введено понятие компактного субдифференциала (K -субдифференциала) для отображений отрезка в произвольное локально выпуклое пространство (ЛВП) и детально исследованы его свойства. Вначале приведем вспомогательное понятие K -предела.

Определение 1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению система замкнутых выпуклых подмножеств ЛВП E . Множество $B \subset E$ называется K -пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K - \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta,$$

если:

- 1) $\forall U(0) \subset E \exists \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \implies (B \subset B_\delta \subset B + U)$;
- 2) B — компактное множество в E .

Таким образом, основными характеристиками K -предела являются топологическое стягивание множеств B_δ к своему пересечению и компактность этого пересечения. Перейдём к определению K -субдифференциала отображения $f : \mathbb{R} \rightarrow E$.

Определение 2. Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\delta > 0$ введём вначале частные выпуклые субдифференциалы:

$$\partial^{co} f(x, \delta) = \overline{\text{co}} \left\{ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \mid 0 < |t| < \delta \right\}.$$

Под K -субдифференциалом f в точке x мы понимаем K -предел частных субдифференциалов:

$$\partial_K f(x) := K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial^{co} f(x, \delta),$$

если такой существует.

Отметим, что аппарат теории K -субдифференциалов успешно применён в работах [6]-[8] при исследовании проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера.

Задача, рассматриваемая в данной работе, состоит в осуществлении перехода к случаю векторного аргумента $f : E \rightarrow F$ (E, F — банаховы пространства). При этом K -субдифференциал $\partial_K^h f(x)$ по каждому конкретному направлению h будет по-прежнему выпуклым компактом, но при изменении направления h мы получим многозначное отображение (в "хорошем" случае — сублинейный оператор с выпуклыми компактными значениями).

Таким образом, операторной базой нашей конструкции служит понятие сублинейного ограниченного оператора с выпуклыми компактными значениями (K -оператора).

2. K -ОПЕРАТОРЫ

Пусть E, F — банаховы пространства. Обозначим F_K — систему всех выпуклых компактов в F . Заметим, что F_K образует нормированный конус (см. [9]) относительно операций $C_1 + C_2$, $\lambda \cdot C$ и нормы $\|C\| = \sup_{y \in C} \|y\|$.

Определение 3. *Отображение $A : E \rightarrow F_K$ называется K -сублинейным оператором (K -оператором), если:*

$$\begin{cases} A(x_1 + x_2) \subset Ax_1 + Ax_2, \\ A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Ax \ (\lambda \geq 0). \end{cases}$$

Введём понятие нормы K -оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Справедлива теорема:

Теорема 1. *K -оператор A ограничен по норме: $\|A\| < \infty$ тогда и только тогда, когда A непрерывен в нуле. При этом выполнены обычные свойства операторной нормы: $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$; $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$; $(\|A\| = 0) \iff (A = 0)$; $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.*

Обозначим $L_K(E; F)$ систему всех ограниченных K -операторов из E в F . Отметим, что множество $L_K(E; F)$ также образует нормированный конус относительно K -операторной нормы. Введем композицию сублинейных операторов: если $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$, то $[B \cdot A]h := \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k \in Ah} B_k \right)$. при этом $[B \cdot A] \in L_K(E; G)$.

3. К-СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ СВОЙСТВА

Всюду далее E, F — банаховы пространства, отображение $f : E \rightarrow F$ определено в некоторой окрестности $x + U \subset E$, $h \in U \setminus \{0\}$.

Определение 4. (i) Для фиксированного h определим K -субдифференциал f в точке x по направлению h как

$$\partial_K f(x, h) = K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\overline{\text{co}} \left\{ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \mid 0 < t \leq \delta \right\} \right). \quad (1)$$

- (ii) Если $\partial_K f(x, h)$ существует по любому направлению $h \in U \setminus \{0\}$ и сублинеен по h , то K -оператор $\partial_K f(x, h)$ назовём слабым K -субдифференциалом f в точке x и обозначим его $\partial_K f(x)h$.
- (iii) Если слабый K -субдифференциал $\partial_K f(x)h$ ограничен по K -норме (т. е. $\partial_K f(x) \in L_K(E; F)$), то назовём его K -субдифференциалом Гато в точке x .
- (iv) Если f K -субдифференцируемо по Гато в точке x , причём сходимость в (1) равномерна по $\|h\| \leq 1$, то K -оператор $\partial_K f(x)h$ назовём K -субдифференциалом Фреше или сильным K -субдифференциалом f в точке x .

Очевидно, если существуют классические: дифференциал по направлению, слабый дифференциал, дифференциалы Гато и Фреше, то соответствующие K -понятия совпадают с ними. Обратное неверно, рассмотрим простой конечномерный пример.

Пример 1. Пусть $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$. Здесь:

$$\partial_K f(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \begin{cases} [-|h_1| - |h_2|; |h_1| + |h_2|] & \text{при } x_1 = x_2 = 0; \\ [h_1 + h_2; h_2 - h_1] & \text{при } x_1 = 0, x_2 > 0; \\ [h_1 - h_2; -h_1 - h_2] & \text{при } x_1 = 0, x_2 < 0; \\ [h_1 - h_2; h_1 + h_2] & \text{при } x_2 = 0, x_1 > 0; \\ [-h_1 - h_2; -h_1 + h_2] & \text{при } x_2 = 0, x_1 < 0. \end{cases}$$

В остальных точках плоскости f дифференцируема таким же образом, в нуле K -субдифференциал несублинеен по направлению, в остальных точках координатных осей f K -субдифференцируема по Фреше.

Сформулируем полезный критерий K -сходимости.

Теорема 2. Пусть $f : E \rightarrow F$ слабо K -субдифференцируемо в точке $x \in E$. Тогда:

i. f K -субдифференцируемо по Гато тогда и только тогда, когда существует $B \in L_K(E; F) : f(x+h) - f(x) \in Bh + \psi(h)$, где $\forall h \in U : (\psi(th)/t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При этом $\partial_K f(x)h \subset Bh$. *ii.* f K -субдифференцируемо по Фреше в точке x тогда и только тогда, когда f K -субдифференцируемо по Гато, и: $f(x+h) - f(x) \in \partial_K f(x)h + \psi(h)$, где $\psi(h) = o(\|h\|)$, или, что равносильно, $(\psi(th)/t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0, \|h\| \leq 1$.

Перейдём к операциям над K -субдифференцируемыми отображениями.

Теорема 3.

- (i) $\partial_K(f_1 + f_2)(x, h) \subset \partial_K f_1(x, h) + \partial_K f_2(x, h)$;
(ii) $\partial_K(\lambda \cdot f)(x, h) = \lambda \cdot \partial_K f(x, h)$.

Теорема 4. *i.* Пусть отображение $f : E \rightarrow F$ K -субдифференцируемо по Гато в точке $x \in E$, отображение $g : F \rightarrow G$ K -субдифференцируемо по Фреше в точке $y = f(x) \in F$. Тогда композиция $g \circ f : E \rightarrow G$ также K -субдифференцируема по Гато в точке x , причём $\partial_K(g \circ f)(x)h \subset [\partial_K(g)(y) \cdot \partial_K(f)(x)]h$.

ii. Если при этом f K -субдифференцируемо по Фреше в точке x , то композиция $g \circ f$ также K -субдифференцируема по Фреше в точке x .

В заключение приведём K -вариант теоремы о среднем.

Теорема 5. Пусть отображение $f : E \rightarrow F$ K -субдифференцируемо по Гато на векторном отрезке $[x_1, x_2] \subset E$. Тогда:

$$f(x_2) - f(x_1) \in \overline{\text{co}}(\partial_K f([x_1; x_2]) \cdot (x_2 - x_1)) .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Москва, Наука, 1990, 432 с.
- [2] А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе *Субдифференциалы: теория и приложения*, Новосибирск, Наука, 1992, 270 с.
- [3] Р. Рокафеллар *Выпуклый анализ*, Москва, Мир, 1973, 472 с.
- [4] И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, *K -субдифференциалы и K -теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства.*// Дифференциальные уравнения и смежные вопросы, Международ. конф., посвященная памяти И. Г. Петровского. Тезисы докладов, МГУ, М., 2007. — С. 220–221.
- [5] Ф. С. Стонякин, *Компактный субдифференциал вещественных функций.*// Динамические системы, 23, 2007. — С. 99–112.
- [6] И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.*// Современная математика. Фундаментальные направления, 34, 2009. — С. 121–138.

- [7] I. V. Orlov, F. S. Stonyakin *Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.* // Methods of Functional Analysis and Topology, — 2009. — Vol. 15. — № 1.— P. 74–90.
- [8] I. V. Orlov, F. S. Stonyakin *Strong compact properties of the mappings and K-Radon-Nikodim property* // Methods of Functional Analysis and Topology, — 2010. — Vol. 16. — № 2.— P. 183–196.
- [9] K. Keimel, W. Roth, *Ordered Cones and Approximation, Lecture Notes in Mathematics*, — Vol. 1517, Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1992.

Ряды и рекуррентные последовательности

Пода Н.С.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

В работе получены обобщения известных разложений в ряд, связанные с числами Фибоначчи на случай произвольных рекуррентных последовательностей 2-го порядка. А также получены формулы некоторых констант в числовые ряды по функциям Бесселя.

Рассмотрим вначале некоторые известные задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями и представлениями числа π в виде ряда, и числами Фибоначчи.

В задаче Norman Anning [1] дается следующее представление числа π в виде ряда

$$\frac{\pi}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} u_n^2, \quad (1)$$

где $u_1 = 2, u_2 = 8, \dots, u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, n \geq 3$.

В другой задаче А.С. Айткен [1] приводит следующее представление числа π :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} 2u_n^2,$$

где $u_1 = 1, u_2 = 3, \dots, u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, n \geq 3$.

Для обобщения первой задачи рассмотрим рекуррентную последовательность, определяемую равенствами $u_1 = \alpha, u_2 = a\alpha, u_n = au_{n-1} - bu_{n-2}, n \geq 3$ где $a > 0, b > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ —фиксированные числа. Используя легко проверяемое равенство $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = b^{n-1}\alpha^2, n \geq 2$, получаем

$$\operatorname{arcctg} \frac{au_1^2}{\sqrt{b}(b^{n-1}\alpha^2)} + \sum_{n=1}^r \operatorname{arcctg} \frac{au_n^2}{\sqrt{b}(b^{n-1}\alpha^2)} = \operatorname{arcctg} \left(\frac{u_{r+1}}{\sqrt{b}u_r} \right)$$

При $r \rightarrow \infty$ отношение $\frac{u_{r+1}}{\sqrt{bu_r}}$ стремится к большему корню квадратного уравнения $x^2 = ax - b$, т.е. к $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2\sqrt{b}}$. Следовательно, переходя к пределу, приходим к справедливости следующего предложения

Теорема 1. *Дана последовательность $u_1 = \alpha$, $u_2 = a\alpha$, $u_n = au_{n-1} - bu_{n-2}$, где $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\operatorname{arcctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2\sqrt{b}} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{au_n^2}{\sqrt{b}(b^{n-1}\alpha^2)} \quad (3).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этой теоремы.

Пример 1. *Выберем коэффициенты следующим образом $a = 4$, $b = 1$, $\alpha = 2$. Тогда последовательность примет вид $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, \dots , $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$. Подставляя значения a, b и α в формулу (3), получаем разложение (1).*

Пример 2. *При $a = 4$, $b = 4$, $\alpha = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, \dots , $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ ($n=3, 4, 5, \dots$), получаем формулу*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{2u_n^2}{4^{n-1}}$$

Пример 3. *Пусть $a = 4$, $b = 2$, $\alpha = 1$. Тогда*

$$\frac{3\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{4u_n^2}{2^{n-1}\sqrt{2}}$$

Пример 4. *При $a = 4$, $b = 3$, $\alpha = 2$ аналогично получаем формулу*

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{u_n^2}{3^{n-1}\sqrt{3}}$$

Перейдем теперь к обобщению второй задачи. Для этого рассмотрим рекуррентную последовательность вида $u_1 = \alpha$, $u_2 = a\alpha - b$, $u_r = au_{r-1} - bu_{r-2}$, $n \geq 3$, где $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа.

Легко видеть, что $u_r^2 - u_{r+1}u_{r-1} = b^{n-1}(b - a\alpha + \alpha^2)$, $n \geq 2$. Положим $\theta := (b - a\alpha + \alpha^2)$, $\gamma = \frac{a}{\theta}$. Тогда имеет место следующее разложение:

$$\gamma \operatorname{arcctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2\sqrt{b}} = \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \gamma \frac{u_r^2}{\sqrt{b} \cdot b^{n-1}} \quad (4).$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пример 5. *Пусть $a = 4$, $b = 1$, $\alpha = 1$. Тогда $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, \dots , $u_r = 4u_{r-1} - u_{r-2}$, $r \geq 3$. Число $\gamma = 2$. Тогда получаем формулу (2).*

Пример 6. Выберем коэффициенты следующим образом: $a = 4, b = 3, \alpha = 2$. Тогда $u_1 = 2, u_2 = 5, \dots, u_r = 4u_{r-1} - 3u_{r-2}, r \geq 3, \gamma = -4$. Подставляя коэффициенты a, b, α и γ в (4), получим

$$-\frac{2\pi}{3} = \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} \frac{-4u_r^2}{3^{n-1}\sqrt{3}}.$$

Пример 7. $a = 2, b = 1, \alpha = 2$. Тогда $u_1 = 2, u_2 = 3, \dots, u_r = 2u_{r-1} - u_{r-2}$ ($r \geq 3$), $\gamma = 2$. Получаем следующее разложение

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} 2u_r^2.$$

Пример 8. Пусть $a = 4, b = 2, \alpha = 1$. Аналогично получаем формулу

$$-\frac{3\pi}{2} = \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} \frac{-4u_r^2}{\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}}.$$

Рассмотрим задачу об обратных тригонометрических функциях и числах Фибоначчи. Доказывается, что $\operatorname{arccctg} 1 = \operatorname{arccctg} 2 + \operatorname{arccctg} 5 + \operatorname{arccctg} 13 + \dots$, где последовательность аргументов арккотангенсов в правой части совпадает с последовательностью членов с нечетными номерами ряда Фибоначчи и может быть определена рекуррентным соотношением $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, n \geq 2$ [1].

Перейдем к обобщению этой задачи. Рассмотрим рекуррентную последовательность вида $v_{n+1} = av_n + bv_{n-1}$, где $v_1 = \alpha, v_2 = \alpha a$. Используя формулу разности арккотангенсов и соотношение $v_{m+1}v_{m+2} - v_mv_{m+3} = (-1)^m \alpha a^2 b^m$ при $m = 2n - 1$, получаем следующее предложение

Теорема 2. Дана последовательность $v_{n+1} = av_n + bv_{n-1}, n \geq 2, a, b \in \mathbf{N}$, где $v_1 = \alpha, v_2 = \alpha a$. Тогда

$$\operatorname{arccctg} \frac{v_2}{\alpha\sqrt{b}} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} \frac{v_{2n+1}}{\alpha a \cdot \sqrt{b^{2n-1}}} \quad (5).$$

Рассмотрим частные случаи формулы (5).

Пример 9. Пусть $a = 3, b = 3, \alpha = 1$. Тогда приходим к следующей последовательности: $v_1 = 1, v_2 = 3, v_{n+1} = 3v_n + 3v_{n-1}$. Подставляя коэффициенты a, b, α в (5), получим

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{2n+1}}{3\sqrt{3^{2n-1}}}$$

Пример 10. Пусть $a = 1, b = 3, \alpha = 2$. Данная последовательность примет вид $v_1 = 2, v_2 = 2, v_{n+1} = v_n + 3v_{n-1}$. Разложение (5) принимает вид:

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{2n+1}}{2\sqrt{3^{2n-1}}}$$

Как известно [2], общее решение линейного рекуррентного уравнения $f_n - (an + b)f_{n+1} = f_{n+2}$ имеет вид

$$f_n = C_1 I_{n+b/a-1} \left(\frac{2}{a} \right) + C_2 (-1)^n K_{n+b/a-1} \left(\frac{2}{a} \right),$$

где $I_v(x)$ - модифицированная функция Бесселя 1-го рода, а $K_v(x)$ - модифицированная функция Бесселя 2-го рода [3]. Используя рекуррентные соотношения, приходим к следующему тождеству

$$I_{\frac{b}{a}} \left(\frac{2}{a} \right) - I_{2n+2+\frac{b}{a}} \left(\frac{2}{a} \right) = \sum_{s=0}^n (2as + b) I_{2s+1+\frac{b}{a}} \left(\frac{2}{a} \right)$$

С помощью асимптотики функций Бесселя $I_v(x)$ по индексу [3], устанавливаем формулу

$$I_{\frac{b}{a}} \left(\frac{2}{a} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} (2as + b) I_{2s+1+\frac{b}{a}} \left(\frac{2}{a} \right) \quad (6)$$

Аналогично устанавливается, что для последовательности $(-1)^n K_{n+b/a-1} \left(\frac{2}{a} \right)$ соответствующий ряд расходится.

Пример 11. Пусть $a = 2, a b = 3$. Подставляя их в формулу (6), получим

$$I_{\frac{3}{2}}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} (4s + 3) I_{2s+1+\frac{3}{2}}(1).$$

Воспользуемся известной формулой для $I_{\frac{3}{2}}(z)$ [3]:

$$\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1 = e^{-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} (4s + 3) I_{2s+1+\frac{3}{2}}(1)$$

Пример 12. Пусть $a = 2, a b = 5$. Тогда

$$I_{\frac{5}{2}}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} (4s + 5) I_{2s+1+\frac{5}{2}}(1),$$

или [3]

$$4 \operatorname{sh} 1 - 3 \operatorname{ch} 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} (4s + 5) I_{2s+1+\frac{5}{2}}(1)$$

Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение $f_n + f_{n+2} = (an+b)f_{n+1}$. Ему удовлетворяет последовательность Бесселя $J_{n+\frac{b}{a}}(\frac{2}{a})$, $b \in \mathbf{Z} : a+b \in \mathbf{N}$, где $J_\nu(x)$ - функция Бесселя 1-го рода [3]. Аналогичные рассуждения позволяют утверждать справедливость разложения:

$$J_{\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2as+b) J_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) \quad (7)$$

Пример 13. Пусть $a = 2$, $b = 3$. Подставляя их в формулу (7), получим

$$J_{\frac{3}{2}}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) J_{2s+1+\frac{3}{2}}(1).$$

Воспользуемся известной формулой для $J_{\frac{3}{2}}(z)$ [3] и преобразуем полученное соотношение

$$\sin 1 - \cos 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) J_{2s+1+\frac{3}{2}}(1).$$

Пример 14. Пусть $a = 2$, $b = 5$. Тогда

$$J_{\frac{5}{2}}(1) = \sum_{s=0}^{\infty} (4s+5) J_{2s+1+\frac{5}{2}}(1).$$

Или

$$4 \operatorname{sh} 1 - 3 \operatorname{ch} 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+5) J_{2s+1+\frac{5}{2}}(1).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Данилова *Избранные задачи из журнала "American mathematical monthly"*. – М.:Мир, 1977, 596 с.
- [2] Д. В. Третьяков *Об иррациональностях, порожденных арифметическими прогрессиями*
- [3] М. Абрамовиц, И. Стиган *Справочник по специальным функциям*. –М.:Наука, 1979, 832 с.

Спектральный анализ колейных операторов

Редькина Ю.С.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

В работе рассматриваются общие свойства коллинейных операторов, действующих в конечномерных \mathbb{H} -модулях. Построено спектральное разложение для нормального коллинейного операторов.

1. КОЛЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Пусть \mathbb{H} — тело кватернионов. Как известно, \mathbb{H} -модули отличаются разнообразием классов линейных операторов. Так, аддитивный оператор A , действующий в правом кватернионном модуле H , называется *линейным*, если $A(xq) = (Ax)q$ для любого вектора $x \in H$ и для любого кватерниона $q \in \mathbb{H}$. Если в этом определении заменить тело \mathbb{H} на некоторое его \mathbb{R} -содержащее подполе \mathbb{F} , то мы получим так называемый класс \mathbb{F} -линейных операторов.

Определение 1. [1] *Аддитивный оператор, действующий в кватернионном модуле H , называется коллинейным, если существует автоморфизм α алгебры кватернионов \mathbb{H} такой, что $A(xq) = (Ax)\alpha(q)$ для любых $x \in H$, $q \in \mathbb{H}$.*

Заметим, что всякий автоморфизм в \mathbb{H} является внутренним, поэтому $\alpha(q) = \bar{\omega}q\omega$ для некоторого $\omega \in \mathbb{H}$ $|\omega| = 1$. Такой автоморфизм будем обозначать α_ω . Если $q \in \mathbb{F}$, где \mathbb{F} — \mathbb{R} -содержащее поле в \mathbb{H} , порожденное кватернионом ω , то $\alpha(q) = q$, и, следовательно, всякий коллинейный оператор является \mathbb{F} -линейным.

Можно показать, что всякий коллинейный оператор является кратным некоторого линейного оператора. А именно, если A — коллинейный оператор с автоморфизмом α_ω , то оператор $B = R_{\bar{\omega}}A$ является линейным. При этом $A = R_\omega B$.

Обозначим через $\text{End}_\omega H$ множество операторов, коллинейных относительно автоморфизма α_ω . Множество $\text{End}_\omega H$ является \mathbb{R} -подмодулем в алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}} H$, где поле \mathbb{F} есть \mathbb{R} -содержащее подполе, порождённое кватернионом ω . В свою очередь $\text{End}_\omega H$ есть вещественная подалгебра алгебры линейных операторов $\text{End } H$.

Кватернион q назовем *собственным значением* коллинейного оператора A , если $Ax = xq$ для некоторого вектора $x \neq 0$. Множество всех собственных значений коллинейного оператора A образует его точечный спектр $\sigma_p(A)$. Множество всех собственных векторов оператора A , соответствующих собственному значению q , и нуль-вектор обозначим $E_q(A)$.

Предложение 1. *Пусть H — \mathbb{H} -модуль, $A \in \text{End}_\omega H$, $A = R_\omega B$. Если $q \in \sigma_p(A)$, то $q\bar{\omega} \in \sigma_p(B)$, и при этом $E_q(A) = E_{q\bar{\omega}}(B)$.*

Доказательство. Пусть $q \in \sigma_p(A)$, $Ax = xq$ для некоторого ненулевого вектора. Действуя на это равенство оператором $R_{\overline{\omega}}$, получим $Bx = x(q\overline{\omega})$, откуда $q\overline{\omega} \in \sigma_p(B)$ и $x \in E_{q\overline{\omega}}(B)$. \square

Следствие 1. Множество $E_q(A)$ есть \mathbb{F} -модуль, где \mathbb{F} — поле, порождённое кватернионом $q\overline{\omega}$.

Будем говорить, что ненулевой кватернион p *косопряжён* кватерниону q , если существует кватернион $u \in \mathbb{H}$; $|u| = 1$ такой, что $p = uq\alpha(\overline{u})$. Отношение косопряжённости есть отношение эквивалентности, которое разбивает все множество \mathbb{H} на классы эквивалентности

$$C(q) = \{uq\alpha(\overline{u}) \mid u \in \mathbb{H}, |u| = 1\}.$$

Множество $C(q)$ назовём *классом косопряжённости* элемента q . Отметим, что каждый класс сопряженности $C(q_i)$ содержит ровно два кватерниона из поля \mathbb{F} : q_i и $\omega\overline{q_i}\omega$.

Следующее утверждение также является непосредственным следствием предложения 1 и работы [2].

Следствие 2. Пусть \mathcal{H} — \mathbb{H} -модуль, $A \in \text{End}_{\omega}\mathcal{H}$. Тогда справедливо следующее:

$$\text{если } q \in \sigma_p(A), \text{ то } C(q) \subset \sigma_p(A).$$

Следствие 3. Множество $H_q(A) := E_q(A) \dot{+} E_{\omega\overline{q}\omega}(A)$ есть \mathbb{H} -модуль, причем $H_q(A) = H_p(A)$ для всякого $p \in C(q)$.

Этот подмодуль мы будем называть *обобщённым собственным подмодулем* коллинейного оператора A .

2. КОНОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Пусть H — гильбертов \mathbb{H} -модуль со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $A \in \text{End}_{\omega}H$. Как отмечалось выше, $A \in \text{End}_{\mathbb{F}}H$, где \mathbb{F} — \mathbb{R} -содержащее подполе тела \mathbb{H} , $\mathbb{F} = \mathbb{R}\langle 1, f \rangle$, $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1, f, \varepsilon, f\varepsilon \rangle$. \mathbb{F} -модуль $H^{\mathbb{F}}$ также является гильбертовым со скалярным произведением $(\cdot, \cdot) = \mathbb{F}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Определение 2. Оператор A^* называется *сопряжённым* к оператору $A \in \text{End}_{\mathbb{F}}H$, если

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Если $A \in \text{End}_{\omega}H$, то для сопряженного оператора справедливо равенство:

$$\langle x, A^*y \rangle = \alpha_{\overline{\omega}}(\langle Ax, y \rangle) \quad (2)$$

Предложение 2. Если $A \in \text{End}_\omega \mathbb{H}$, то $A^* \in \text{End}_{\overline{\omega}} \mathbb{H}$, причем если $A = R_\omega B$, где $B \in \text{End} \mathbb{H}$, то $A^* = R_{\overline{\omega}} B^*$.

Доказательство. С учётом равенства (2) имеем:

$$\begin{aligned} \langle x, A^*(yq) \rangle &= \alpha_{\overline{\omega}}(\langle Ax, yq \rangle) = \alpha_{\overline{\omega}}(\overline{q} \langle Ax, y \rangle) = \\ &= \alpha_{\overline{\omega}}(\overline{q}) \alpha_{\overline{\omega}}(\langle Ax, y \rangle) = \alpha_{\overline{\omega}}(\overline{q}) \langle x, A^*y \rangle = \langle x, (A^*y) \overline{\alpha_{\overline{\omega}}(\overline{q})} \rangle. \end{aligned}$$

Так как $\overline{\alpha_{\overline{\omega}}(\overline{q})} = \overline{\omega \overline{q} \overline{\omega}} = \omega q \overline{\omega} = \alpha_{\overline{\omega}}(q)$, то окончательно

$$A^*(yq) = (A^*y) \alpha_{\overline{\omega}}(q).$$

Следовательно, $A^* \in \text{End}_{\overline{\omega}} \mathbb{H}$.

Далее, если $A = R_\omega B$, где $B \in \text{End} \mathbb{H}$, то, рассматривая отношение сопряженности для этих операторов в алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}} \mathbb{H}$, имеем:

$$A^* = B^* R_{\overline{\omega}} = R_{\overline{\omega}} B^*.$$

□

Определение 3. Оператор $A \in \text{End}_\omega \mathbb{H}$ называется конормальным, если $A^*A = AA^*$

Предложение 3. Пусть $A \in \text{End}_\omega \mathbb{H}$ — конормальный оператор и $A = R_\omega B$, где $B \in \text{End} \mathbb{H}$. Тогда B является нормальным в $\text{End} \mathbb{H}$.

Доказательство. Так как $A \in \text{End}_\omega \mathbb{H}$, то оператор A мы можем представить следующим образом: $A = R_\omega B$, $B \in \text{End} \mathbb{H}$. При этом $A^* = B^* R_{\overline{\omega}}$. По определению конормального оператора $A^*A = AA^*$, откуда

$$B^*B = (R_\omega B)(B^* R_{\overline{\omega}}) = R_\omega (BB^*) R_{\overline{\omega}} = BB^*.$$

Следовательно, мы получили, что оператор B является нормальным в $\text{End} \mathbb{H}$.

□

Из этого предложения следует ряд спектральных свойств конормальных операторов.

Теорема 1. Если p, q — собственные значения конормального оператора $A \in \text{End}_\omega \mathbb{H}$, причем $C(p) \neq C(q)$, то $H_q(A) \perp H_p(A)$.

Доказательство. Так как $A = R_\omega B$, где оператор A — нормальный в $\text{End} \mathbb{H}$, то согласно предложению 1 $H_q(A) = H_{q\overline{\omega}}(B)$, $H_p(A) = H_{p\overline{\omega}}(B)$. Если $C(p) \neq C(q)$, то $K(p\overline{\omega}) \neq K(q\overline{\omega})$, откуда в силу свойств конечномерных нормальных операторов [3]

$$H_{q\overline{\omega}}(B) \perp H_{p\overline{\omega}}(B),$$

что и требовалось доказать. \square

Пусть H — конечномерный \mathbb{H} -модуль, A — конормальный оператор, $A \in \text{End}_\omega H$, $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\omega)$. В этом случае точечный спектр оператора состоит из конечного числа классов косопряженности:

$$\sigma(A) = C(q_1) \cup C(q_2) \cup \dots \cup C(q_s),$$

где $q_t \in \mathbb{F}$, $t = \overline{1, s}$. Как отмечалось ранее, обобщенный собственный подмодуль $H_{q_t}(A) = H_{q_t\bar{\omega}}(B) = E_{q_t\bar{\omega}}(B) + E_{\omega\bar{q}_t}(B)$, где $B = R_{\bar{\omega}}A$.

Так как B — нормальный оператор, то $H_{q_t\bar{\omega}}(B) \perp H_{q_r\bar{\omega}}(B)$, ($t \neq r$) и $H = \bigoplus_{t=1}^s H_{q_t\bar{\omega}}$.

Таким образом, обобщенные собственные подмодули конормального оператора ортогональны, и система ортопроекторов на эти подмодули является разложением единицы, совпадающим с разложением единицы соответствующего нормального оператора.

Пусть P_t — ортопроектор в H на обобщенный собственный подмодуль $H_{q_t}(A) = H_{q_t\bar{\omega}}(B)$, $t = \overline{1, s}$, $\{q_t\bar{\omega}\}_1^s \subset \mathbb{F}^+$ — собственные значения оператора B , $q_t\omega = \alpha_t + \beta_t f$, где $\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место следующее разложение [3]:

$$B = \sum_{t=1}^s (R_{\alpha_t} + R_{\beta_t} R) P_t,$$

где $R(x_t + y_t \varepsilon) f$, $x_t, y_t \in E_{q_t}(A) = E_{q_t\bar{\omega}}(B)$. В таком случае, используя взаимосвязь между конормальным и нормальным оператором получим:

$$A = R_\omega B = \sum_{t=1}^s (R_{\alpha_t \omega} + R_{\beta_t \omega} R) P_t.$$

Так как $q_t\bar{\omega} = \alpha_t + \beta_t f$, $\omega\bar{q}_t = \alpha_t - \beta_t f$, тогда $\alpha_t = \frac{1}{2}(q_t\bar{\omega} + \omega\bar{q}_t)$, $\beta_t = -\frac{1}{2}(q_t\bar{\omega} - \omega\bar{q}_t) f$, и, следовательно, $\alpha_t \omega = \frac{1}{2}(q_t + \omega\bar{q}_t \omega)$, $\beta_t \omega = -\frac{1}{2}(q_t - \omega\bar{q}_t \omega) f$. Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Пусть $A \in \text{End}_\omega H$ — конормальный оператор, $\sigma(A) = C(q_1) \cup C(q_2) \cup \dots \cup C(q_s)$, где $q_t \in \mathbb{F} = \mathbb{F}(\omega)$, P_t — ортопроектор в H на обобщенный собственный подмодуль $H_{q_t}(A)$. Тогда

$$A = \sum_{t=1}^s (R_{u_t} + R_{v_t} R) P_t,$$

где $u_t = \frac{1}{2}(q_t + \omega\bar{q}_t \omega)$, $v_t = -\frac{1}{2}(q_t - \omega\bar{q}_t \omega) f$.

В заключение отметим, что произвольный \mathbb{F} -линейный нормальный оператор не имеет специфических особенностей спектра, позволяющих получить для него спектральное разложение. В этом смысле класс колейнейных операторов, как показано в настоящей работе, выгодно отличается от общего случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.L.Adler, G.G.Emch *A rejoinder on quaternionic projective representations*, arXiv:hep-th/9704121v3 18 Apr 1997, 1–5
- [2] Карпенко И.И., Тышкевич Д.Л. *Спектральные свойства линейных операторов над гильбертовыми кватернионными бимодулями*, Математичні СТУДІЇ, Том 30, No.1, 2008, 67–83.
- [3] Карпенко И.И., *Структура линейного оператора в конечномерном кватернионном пространстве* / Карпенки И.И., Омельченко П.В. // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика -2003, - т. 16(55), -№2, - с. 14-18.

Неравенство шварца в g – модулях с индефинитной метрикой

Саенко С.С.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

В работе доказывается справедливость неравенства Шварца для H - модулей, частным случаем которых являются G - модули. С первого взгляда факт, который кажется достаточно очевидным не является вполне очевидным для индефинитных модулей, так как для кватернионов произведение не является коммутативной операцией, исходя из этих соображений, доказательство не может быть проведено таким же образом как для комплексного случая.

Полученный результат позволяет ввести оператор Грама для данного пространства и даёт возможность рассматривать вопрос ортогональности в индефинитных H - модулях более детально.

Пусть задано пространство H с направлением ω , $[\cdot, \cdot]$ – внутреннее произведение, где $\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$ – мнимый кватернион, $|\omega| = 1$.

Определение 1. Пусть ω – мнимый кватернион, $|\omega| = 1$. Вектор x будем называть ω -направленным, если $[x, x] = \alpha\omega$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$; нейтральным, если $[x, x] = 0$.

Теорема 1. *Неравенство Шварца справедливо для H .*

А именно:

$$|[x, y]|^2 \leq |[x, x]||[y, y]|.$$

Доказательство.

- (1) Введём обозначения, учитывая, что $x, y, x + y \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{C}$.

$$[x, x] = \omega r_x, r_x \geq 0$$

$$[y, y] = \omega r_y, r_y \geq 0$$

$$[x + y\lambda, x + y\lambda] = \omega r_{x,y,\lambda}, r_{x,y,\lambda} \geq 0.$$

Отсюда очевидно, что модули этих векторов равняются:

$$|[x, x]| = r_x; |[y, y]| = r_y;$$

- (2) Покажем, что $[x, y] - \overline{[x, y]}$ перестановочно с ω :

$$[x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, x] + [x, y] - \overline{[x, y]} + [y, y].$$

Пользуясь тем, что $x, y, x + y \in \mathbb{H}$ и введёнными выше обозначениями имеем:

$$\omega r = \omega r_x + [x, y] - \overline{[x, y]} + \omega r_y \quad \text{откуда следует, что}$$

$$[x, y] - \overline{[x, y]} = \omega \rho_{xy}, \rho_{xy} \geq 0.$$

- (3) Покажем, что $[x, y]$ перестановочно с ω , воспользовавшись пунктом 2:

$$[x, y] - \overline{[x, y]} = \omega \rho_{xy}, \rho_{xy} \geq 0.$$

$$[x, y] = r_0 + \omega \rho_{xy}.$$

- (4) Пользуясь свойствами внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$, пунктом 3 и тем, что $[x + y\lambda, x + y\lambda] = \omega r_{x,y,\lambda}, r_{x,y,\lambda} \geq 0$, докажем неравенство Шварца для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Итак,

$$[x + y\lambda, x + y\lambda] = [x, x] + [x, y\lambda] + [y\lambda, x] + [y\lambda, y\lambda] = [x, x] + \bar{\lambda}[x, y] - \overline{[x, y]}\lambda + \bar{\lambda}[y, y]\lambda.$$

Полагая $\lambda = \frac{a}{|[x, y]|}[x, y]\omega$, где $a \in \mathbb{R}$ и учитывая, что

$$[x, y]\overline{[x, y]} = |[x, y]|^2, \quad \bar{\lambda} = \frac{a \overline{[x, y]}}{|[x, y]|} \bar{\omega} = -\frac{a \overline{[x, y]}}{|[x, y]|} \omega \quad \text{получим:}$$

$$[x, x] - \frac{a \overline{[x, y]}}{|[x, y]|} \omega [x, y] - \overline{[x, y]} \frac{a}{|[x, y]|} [x, y] \omega + \frac{a \overline{[x, y]}}{|[x, y]|} \bar{\omega} [y, y] \frac{a}{|[x, y]|} [x, y] \omega.$$

Проведя несложные преобразования приходим к выражению вида:

$$[x, x] - 2a\omega|[x, y]| + a^2[y, y].$$

Перейдём к модулям:

$|[x, x]|\omega - 2a\omega|[x, y]| + a^2|[y, y]|\omega = [x + y\lambda, x + y\lambda] = \omega r_{x,y,\lambda}$. Сократив

полученное выражение на ω получим, что:

$$|[x, x]| - 2a|[x, y]| + a^2|[y, y]| \geq 0, \quad \text{ввиду того, что } r_{x,y,\lambda} \geq 0.$$

Получили квадратный трёхчлен относительно a с вещественными коэффициентами, он неотрицателен при всех a , то есть его дискриминант меньше либо равен нулю и значит,

$$\frac{D}{4} = |[x, y]|^2 - |[x, x]||[y, y]| \leq 0, \text{ откуда } |[x, y]|^2 \leq |[x, x]||[y, y]|.$$

Таким образом, мы показали справедливость неравенства Шварца для пространства H . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. *Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения*. — Итоги науки и техники. Математический анализ. ВИНТИ, 1979. — Т. 17. — С. 113–205
- [2] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*. — М.: Наука, 1986. — 352 с.

Компактные субдифференциалы на временной шкале: общая теория

Сулейманова А. Р.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

Введено понятие компактного Δ – субдифференциала путём объединения понятия обычного компактного субдифференциала и Δ – производной. Изучены основные свойства K_Δ – субдифференциалов.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Вначале напомним понятия временной шкалы и Δ – производной (см.[1]).

Определение 1. *Временная шкала – произвольное непустое замкнутое подмножество действительных чисел.*

Определение 2. *Пусть \mathbb{T} – временная шкала. Для $t \in \mathbb{T}$ определим оператор переднего скачка $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ следующим образом:*

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

и оператор заднего скачка $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ следующим образом:

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Далее нам понадобится также множество \mathbb{T}^k , которое получается из временной шкалы \mathbb{T} следующим образом

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus [\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \text{если } \sup \mathbb{T} < \infty; \\ \mathbb{T}, & \text{если } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Теперь мы рассмотрим функцию $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и определим так называемую Δ – производную функции f в точке $t \in \mathbb{T}^k$.

Определение 3. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $t \in \mathbb{T}^k$. Определим $f^\Delta(t)$ как число, удовлетворяющее следующему свойству: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки t (где $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ для некоторого $\delta > 0$) такая, что

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t) [\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Будем называть $f^\Delta(t)$ дельта-производной функции f в точке t .

В работах И.В. Орлова и Ф.С. Столякина ([2]-[3]) было введено понятие компактного субдифференциала (K – субдифференциала) для отображения отрезка в произвольное локально выпуклое пространство и детально исследованы его свойства.

Определение 4. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ – убывающая по вложениям при $\delta \rightarrow 0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного локально выпуклого пространства E , $B \subset E$. Будем говорить, что множество B есть K – предел (компактный предел) системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \rightarrow 0$ ($B = K - \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta$) если:

- 1) B – компактное множество в E ;
- 2) $\bigcap_{\delta>0} B_\delta = B$;
- 3) $\forall U = U(0) \subset E \quad \exists \delta = \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B \subset B + U(0))$.

Определение 5. Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\delta > 0$ введём частные выпуклые субдифференциалы:

$$\partial_{co} f(x, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Под K – субдифференциалом f в точке x мы понимаем K – предел частных субдифференциалов:

$$\partial_K f(x) := K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_{co} f(x, \delta),$$

если такой предел существует.

2. K_Δ -СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО СВОЙСТВА.

Пусть \mathbb{T} — временная шкала, E — вещественное отделимое локально выпуклое пространство; $f : I \rightarrow \mathbb{E}$, функция σ продолжена на I (I — отрезок).

Определение 6. Пусть $x \in I$, $\delta > 0$. Частным Δ — субдифференциалом отображения f в точке x , отвечающим данному $\delta > 0$, назовём замкнутое выпуклое множество

$$\partial_{co}^\Delta f(x, \delta) = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{f(\sigma(x) + h) - f(\sigma(x))}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Определение 7. Отображение $f : I \rightarrow \mathbb{E}$ назовём K_Δ — субдифференцируемым в точке $x \in \mathbb{T}$, если существует K — предел частных Δ — субдифференциалов

$$\partial_K^\Delta f(x) = K - \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_{co}^\Delta f(x, \delta).$$

Множество $\partial_K^\Delta f(x)$ назовём компактным Δ — субдифференциалом отображения f в точке x (или K_Δ — субдифференциалом отображения f в точке x).

Теорема 1. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ K_Δ — субдифференцируема в точке $x \in I$ тогда и только тогда, когда в этой точке конечны нижняя и верхняя производные $\underline{\partial}^\Delta f(x)$ и $\bar{\partial}^\Delta f(x)$, при этом

$$\partial_K^\Delta f(x) = \left[\underline{\partial}^\Delta f(x); \bar{\partial}^\Delta f(x) \right].$$

Теорема 2. Справедливы следующие равенства и утверждения:

- 1) отображение f K_Δ — субдифференцируемо в точке $x \in I$ тогда и только тогда, когда f K_Δ — субдифференцируемо в точке x справа и слева. При этом

$$\partial_K^\Delta f(x) = \text{conv} \left(\partial_K^{\Delta,+} f(x) \cup \partial_K^{\Delta,-} f(x) \right);$$

- 2) $\partial_K^\Delta(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \partial_K^\Delta f(x)$;
- 3) $\partial_K^\Delta(f_1 + f_2)(x) \subset \partial_K^\Delta(f_1)(x) + \partial_K^\Delta(f_2)(x)$ (субаддитивность);
- 4) $((f_1, f_2) : I \rightarrow E_1 \times E_2) \Rightarrow (\partial_K^\Delta(f_1, f_2)(x) \subset \partial_K^\Delta f_1(x) \times \partial_K^\Delta f_2(x))$.

Пример 1. Пусть \mathbb{T} плотно на некотором отрезке $[x_0; x_0 + \Delta x]$, $\mathbb{T} \cap [x_0 - \Delta x; x_0] = \emptyset$. Тогда

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma(x_0), & x_0 - \Delta x \leq x < x_0. \\ x, & x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x; \end{cases}$$

1. Пусть $x \in (x_0; x_0 + \Delta x]$ Рассмотрим

$$\begin{aligned} \partial_{co}^+ f(\sigma(x), \delta) &= \overline{conv} \left\{ \frac{f(\sigma(x+h)) - f(\sigma(x))}{h} \mid 0 < h < \delta \right\} = \\ &= \overline{conv} \left\{ \frac{f(x+h) - f(\sigma(x))}{h} \mid 0 < h < \delta \right\} = \\ &= \overline{conv} \left\{ \frac{f(\sigma(x)+h) - f(\sigma(x))}{h} \mid 0 < h < \delta \right\} = \partial_{co}^{\Delta,+} f(x, \delta). \end{aligned}$$

Переходя к K – пределу, получаем:

$$\partial_K^+(f \circ \sigma)(x) = \partial_K^{\Delta,+} f(x).$$

2. Пусть теперь $x \in [x_0 - \Delta x; x_0]$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{co}^{\Delta,-} f(x, \delta) &= \overline{conv} \left\{ \frac{f(\sigma(x)+h) - f(\sigma(x))}{h} \mid -\delta < h < 0 \right\} = \\ &= \overline{conv} \left\{ \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \mid -\delta < h < 0 \right\} = \partial_{co}^- f(x_0, \delta). \end{aligned}$$

Переходя к K – пределу, получаем:

$$\partial_K^{\Delta,-} f(x) = \partial_K^- f(x_0).$$

Таким образом,

$$\partial_K^{\Delta} f(x_0) = \text{conv}(\partial_K^- f(x_0) \cup \partial_K^+(f \circ \sigma)(x_0)).$$

Теорема 3. Если f и g K_{Δ} – субдифференцируемы в точке x , то их произведение $f \cdot g$ также K_{Δ} – субдифференцируемо в точке x , причём

$$\partial_K^{\Delta}(f \cdot g)(x) \subset g(x) \cdot \partial_K^{\Delta} f(x) + f(x) \cdot \partial_K^{\Delta} g(x).$$

Теорема 4. Если f K_{Δ} – субдифференцируема в точке x , а функция g K_{Δ} – субдифференцируема в точке $y = f(x)$, то их композиция $f \cdot g$ K_{Δ} – субдифференцируемы в точке x , причём

$$\partial_K^{\Delta} g(f(x)) \subset \partial_K^{\Delta} g(y) \cdot \partial_K^{\Delta} f(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Martin Bohner, Allan Peterson *Фракталы.*// Dynamic Equations on Time Scales, PRELIMINARY FINAL Version from May 4, 2001. с. 1-50
- [2] Ф. С. Стонякин, *Компактный субдифференциал вещественных функций.*// Динамические системы, 23, 2007, с. 99–112
- [3] И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.*// Современная математика. Фундаментальные направления, с. 121-138

Сферическая линейная интерполяция

Толочко В.К.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 504)

Среди математических методов, применяемых в компьютерный графике для хранения положения трехмерного объекта, а также операций с ним, многие программисты используют матрицы вращения или углы Эйлера. Каждое из этих решений работает замечательно, до тех пор, пока вы не пытаетесь осуществить гладкую интерполяцию между двумя разными положениями объекта. Например, представьте себе объект, который просто свободно вращается в пространстве. Если хранить вращение, как матрицу или в виде углов Эйлера, то гладкая интерполяция окажется довольно дорогостоящей по вычислениям и будет не столь гладкой.

Например, когда вы сохраняете вращения в качестве углов Эйлера, может произойти накопление крошечных ошибок, появляющихся при округлении, - если вы изменяете угол "Рысканья" на 0.1 градуса в каждом из 3600 кадров, то в результате угол "Рысканья" не будет равен точно нулю. Однако, наблюдатель, управляющий сценой при помощи джойстика, не заметит этой ошибки - это вполне естественно для людей.

Отсюда следует вывод, что вместо манипулирования тремя углами (*roll*, *pitch* и *yaw*), представляя вращение вокруг осей x , y и z соответственно, намного проще использовать один кватернион. Дело в том, что при уменьшении угла между кватернионами сферическая интерполяция стремится к линейной. Если угол между ориентациями не превышает 90 градусов (что обычно достаточно для анимации по ключам "key frame animation"), то максимальная ошибка составляет не 2 (как можно ожидать), а 0.5 градуса. Такую ошибку практически нельзя увидеть. Из этого можно сделать вывод, что для задач

интерактивной графики можно пользоваться линейной интерполяцией в большинстве случаев. Обратите внимание, что в итоге мы сможем (приблизительно) интерполировать вращение без извлечения корня. Что немаловажно, т.к сам по себе процесс извлечения квадратного корня весьма требователен к ресурсам, несмотря на то, что в компании Id Software эмпирическим путем была найдена «магическая» константа 0x5f3759d5, с помощью которой, можно приблизительно найти инверсионный квадратный корень.

Таким образом одним из наиболее полезных свойств кватернионов является достижение гладкой анимации при интерполяции. Для примера рассмотрим интерполяцию между двумя кватернионами, которые задают вращение. При этом интерполяция происходит вдоль кратчайшей дуги (при интерполяции углов Эйлера объект проходит путь, который не является кратчайшим между ориентациями). Этого можно достичь при помощи сферической линейной интерполяции (SLERP - Spherical Linear intERPolation):

$$SLERP(t) = \frac{(p \sin((1-t)a) - q \sin(ta))}{\sin(a)}$$

где q и p - кватернионы,
 t - изменяется от 0 до 1,
 a - угол между q и p ,

$$\cos(a) = \frac{(q, p)}{(|q| \cdot |p|)} = (q, p)$$

При очень маленьких a , чтобы избежать деления на ноль, следует использовать обычную линейную интерполяцию.

Также следует заметить, что при реализации интерполяции рекомендуется разнести интерполяцию на два этапа – инициализация, которая может быть сделана один раз для пары кватернионов и, непосредственно, интерполяция параметра, это может заметно ускорить процесс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ken Shoemake *Quaternions*.
- [2] Норель М. *Вращение и кватернионы*.

Сходимость с регулятором в эргодических теоремах

Умирова С.Э.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И.ВЕРНАДСКОГО

При решении многих задач эргодической теории приходится исследовать сходимость чезаровских средних. Как известно, различают следующие виды сходимости: по мере, почти всюду, с регулятором и (о)-сходимость. При этом, в каждом из этих случаев получается своя эргодическая теорема. В данной работе рассматривается статистическая эргодическая теорема, в которой исследуется сходимость чезаровских средних, порожденных сохраняющим меру преобразованием, с некоторым регулятором сходимости.

Пусть (Ω, Σ, μ) -пространство с конечной неатомической мерой $\mu, \mu\Omega = 1$, $L_0 = L_0(\Omega, \mu)$ — пространство всех μ -измеримых почти всюду конечных вещественных функций f на Ω и $L_p = L_p(\Omega, \mu), 1 \leq p \leq \infty$.

Для сохраняющего меру преобразования θ и функции $f \in L_0$ положим:

$$A_{n,\theta}f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k, B_{\theta}f = \sup_n A_{n,\theta}f.$$

Индивидуальная эргодическая теорема Бихгорфа утверждает, что для любой функции $f \in L_1$ последовательность $\{A_{n,\theta}f\}_{n \geq 1}$ сходится почти всюду на (Ω, μ) к некоторой предельной функции $\bar{f} \in L_1$ такой, что

$$\bar{f} \circ \theta = \bar{f}.$$

При этом, в случае, когда преобразование θ — эргодическое, то

$$\bar{f} = \int_{\Omega} f d\mu$$

почти всюду для $f \in L_1$.

Пусть E - идеальная структура в L_0 и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$. Последовательность называется (о)-сходящейся к $f \in E$ ($f_n \xrightarrow{o} f$) в E если

$$|f_n - f| \leq g_n \downarrow 0, n \in N$$

для некоторой последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$.

Если существуют $g \in L_0, g \geq 0$ и убывающая к нулю последовательность чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$|f_n - f| \leq r_n g$$

почти всюду для всех $n \in N$, то говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции \bar{f} с регулятором g ($f_n \xrightarrow{r} \bar{f}$) и скоростью $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если регулятор g принадлежит E , то говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ сходится к функции $\bar{f} \in E$ с регулятором g в E .

Очевидно, (о)-сходимость следует из сходимости с регулятором. Более того, $f_n \xrightarrow{r} f$ с регулятором в L_0 в том и только том случае, когда $f_n \xrightarrow{o} f$ в L_0 . Это, в свою очередь, равносильно сходимости почти всюду $f_n \xrightarrow{n.o.} f$ в (Ω, μ) .

Если E — порядково полная идеальная подструктура в L_0 , то $f_n \xrightarrow{o} f$ в E тогда и только тогда, когда $f_n \xrightarrow{n.g.} f$ в (Ω, μ) и (о) - ограничена в E .

В частности, для любого перестановочно инвариантного пространства $E \subseteq L_1$:

$$f_n \xrightarrow{o} f \iff f_n \xrightarrow{n.g.} f, |f_n - f| \leq g$$

для некоторого $g \in E$.

Теорема 1. *Для каждого сохраняющего меру эргодического преобразования θ , любой скорости $r_n \rightarrow 0$ и всякой функции $f \in L_1, f \neq \text{const}$, существует такая равноизмеримая с f функция \widehat{f} , что условие $|A_{n,\theta}\widehat{f} - \widehat{f}| \leq r_n g, n = 1, 2, \dots$ влечет g не из L_1 .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant space // Studia Mathem. – 1989.– No. 128. – P.145-157
- [2] Муратов М. А, Пашкова Ю. С, Рубштейн Б. А. Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Лоренца//Динамические системы. – Межведомственный научный сборник. – 2001.–132 с.
- [3] Халмош П. Лекции по эргодической теории – Ижевск: НИЦ.–2001.–132 с.

Применение метода Прони к уравнениям типа Урысона

Хазова Ю.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (ГРУППА 500)

Метод Прони как правило применяется для моделирования выборочных данных в виде линейной комбинации экспоненциальных функций [1, 2]. Задача определения коэффициентов разложения и параметров, входящих в экспоненты, является нелинейной и некорректной. Целью работы является применение метода Прони для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода типа Урысона. В задачах дистанционного зондирования возникают системы таких уравнений, в которых интегральный оператор и правая часть известны приближенно (для дискретных значений аргументов) в точках, соответствующих процессу сканирования. В наиболее простом случае это уравнения вида

$$A_k z \equiv \int_a^b a_k(s) k(t - \tau(s)) ds = f_k(t), \quad c_k \leq t \leq d_k, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь известные функции $a_k(s)$, $k(t)$ — ядро, $f_k(t)$ — правая часть, а $\tau(s)$ — искомая функция. Ввиду нелинейности и некорректности решения таких уравнений для практической реализации применяются регуляризированные версии метода Прони.

Заметим, что уравнения (1) могут быть заданы на всей вещественной оси, функции $a_k(s)$ финитными и предполагается, что задана априорная информация о решении. Приведем схему применения метода на примере одного уравнения (индекс опущен). Метод Прони удобно применять к (1) в преобразованном виде.

В результате применения преобразования Фурье получаем уравнение вида

$$\int_a^b a(s) e^{it\tau(s)} ds = u(t), \quad c \leq t \leq d, \quad (2)$$

где $u(t) = [K(t)]^{-1} F(t)$, где $K(t)$, $F(t)$ — преобразования Фурье соответственно функций $k(t)$, $f(t)$, а $u(t)$ — комплекснозначная функция, которая задана в виде отсчетов.

Для применения метода Прони уравнение (2) запишем следующим образом

$$\sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} = u[n]. \quad (3)$$

Для этого представим интеграл в виде интегральной суммы. Пусть имеются l равноудаленных точек t_n , в которых с некоторой точностью известны значения функции $u(t_n)$. Введем обозначения: $u[n] = u(t_n)$, где $t_n = c + (n-1)\Delta t$, $n = 1 \dots l$, $\Delta t = (d-c)(l-1)^{-1}$, H_k — коэффициенты квадратурной формулы. Получим

$$\sum_{k=1}^p a_k e^{it_n \tau_k} = u(t_n), 1 \leq n \leq l.$$

Подставляя выражение для t_n , получаем следующие соотношения:

$$e^{it_n \tau_k} = e^{i(c+(n-1)\Delta t)\tau(s_k)} = e^{ic\tau_k} e^{i\Delta t \tau_k (n-1)} = e^{ic\tau_k} (e^{i\Delta t \tau_k})^{(n-1)} = e^{ic\tau_k} z_k^{n-1},$$

где $z_k = e^{i\Delta t \tau_k}$. Обозначим $h_k = H_k a_k e^{ic\tau_k}$, $a_k = a(s_k)$, $\tau_k = \tau(s_k)$, $s_k = a + (k-1)\Delta s$, $k = 1, \dots, p$, $\Delta s = (b-a)(p-1)^{-1}$.

Пусть для определенности $c = 0$.

Искомыми являются величины τ_k , которые определяются через решения (1) h_k, z_k из уравнений

$$\begin{aligned} H_k a_k &= h_k; \\ e^{i\Delta t \tau_k} &= z_k \end{aligned}$$

или

$$\tau_k = \frac{1}{i\Delta t} \ln z_k,$$

Система уравнений (1) нелинейна. Покажем, что ее решение сводится к двум задачам: решению разностного уравнения и поиску корней многочлена.

Рассматриваемая функция дискретного времени $u(t)$ представляет собой сумму p экспонент. Заметим, что в этом выражении используется $2p$ комплексных отсчетов для точной подгонки к экспоненциальной модели с $2p$ комплексными параметрами $h_1, \dots, h_p, z_1, \dots, z_p$. Входящие в (1) p уравнений, можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & \dots & z_p^0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{p-1} & \dots & z_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[p] \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрица с временными индексами элементов z имеет структуру матрицы Вандермонда. Если может быть найден метод для отдельного определения элементов z , то уравнение (2) можно рассматривать как систему уравнений, решив которую определяют неизвестный параметр h .

Разделение основано на том факте, что z_k в (1) является решением некоторого однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Для того чтобы определить вид этого разностного уравнения, определим сначала полином $\phi(z)$, корнями которого являются экспоненты z_k :

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k). \quad (5)$$

Если произведения в (3) выразить в виде степенной последовательности, то полином можно представить в следующем виде:

$$\phi(z) = \sum_{m=1}^p a[m]z^{p-m}, \quad (6)$$

где $a[m]$ — комплексные коэффициенты, для которых $a[0] = 1$. Осуществляя в уравнении (1) сдвиг индекса от n к $n - m$ и умножая обе его части на параметр $a[m]$, получаем

$$\sum_{m=1}^p a[m]u[n - m] = 0, \quad (7)$$

где $u[n]$ — известно, $a[m]$ — неизвестно. Сумму в правой части (4) можно рассматривать как полином, определяемый уравнением (3), который записан через свои корни, что и обеспечивает в (4) равенство нулю.

Уравнение (4) — это линейное однородное разностное уравнение, решение которого выражается формулой (1). Полином (3), ассоциированный с этим линейным разностным уравнением, называется характеристическим.

Уравнения, представляющие искомые значения коэффициентов $a[m]$, удовлетворяющие (4), можно записать в виде следующего $p \times p$ матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} u[p] & \dots & u[1] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u[2p-1] & \dots & u[p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u[p+1] \\ \vdots \\ u[2p] \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Алгоритм метода можно представить в виде следующих трех этапов. На первом этапе получается решение уравнения (5) $a[m]$ для коэффициентов полинома. На втором этапе вычисляются корни полинома, определяемого уравнением (6) $\phi(z) = 0$. Для завершения процедуры корни полинома, вычисленные на втором этапе, используются далее для формирования элементов матрицы уравнения (2), которое затем решается относительно p комплексных параметров h_1, \dots, h_p .

Нелинейная часть метода эквивалентна процедуре факторизации полиномов, для которой разработаны быстрые вычислительные алгоритмы. В случае неточно заданных данных на всех этапах (вычисления корней, решения уже неоднородного разностного уравнения, решение систем алгебраических уравнений (8),(4)) применяются регуляризирующие алгоритмы.

Таким образом получен алгоритм решения интегральных уравнений типа Урысона на базе регуляризованного метода Прони.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марпл-мл. С. Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения* — М.: Мир, 1990. — 584с.
- [2] Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент* — М.: Наука, 1976. — 536с.
- [3] Хазова Ю. А. *Нелинейное интегральное уравнение Урысона первого рода* //Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике, 20-23 апреля 2010. — С. 45-47.
- [4] Lukianenko V. A., Kozlova M. G., Hazova U. A. *Some tasks for integral equation of Urison's type* // Integral equations-2010. — Lviv: PAIS. — 2010. — P.80-84.

Некоторые свойства алгебры инвариантов конечных групп, порожденных отражениями

Шевченко А.Г.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГЕОМЕТРИИ (500 ГРУППА)

В работе рассматривается структура кольца инвариантов группы G^1 подгруппы конечной группы G , порожденной отражениями.

Пусть в n -мерном унитарном пространстве \mathbb{C}^n задана координатная система с началом 0 и ортонормированным базисом \vec{e}_i ($\overline{1, n}$); вектор $\vec{x} = (x_i)$, $\mathbb{C}[\vec{x}]$ —кольцо многочленов от n переменных над полем комплексных чисел.

Отражением порядка p относительно гиперплоскости π называется унитарное преобразование порядка p , неподвижные точки которого составляют π .

Обозначим через G конечную группу, порожденную отражениями относительно гиперплоскости пространства \mathbb{C}^n .

Структура кольца $\mathbb{C}[\vec{x}]^G$ инвариантов группы G хорошо изучена: $\mathbb{C}[\vec{x}]^G$ порождается n алгебраически независимыми инвариантами J_{m_i} степеней m_i ($i = \overline{1, n}$): $\mathbb{C}[\vec{x}]^G = \mathbb{C}[J_{m_1}, \dots, J_{m_n}]$.

Пусть $G^1 = \{g \in G \mid \det(g) = 1\} < G$. G^1 —нормальная подгруппа, фактор-группа G/G^1 —циклическая группа порядка m .

Изучим структуру кольца инвариантов группы G^1 . Известно, что это кольцо Коэна-Маколея, и, следовательно, оно может быть описано полностью с помощью 2-х множеств инвариантов: θ_i и η_m , где θ_i алгебраически независимы, и имеет место представление:

$$\mathbb{C}[\vec{x}]^{G^1} = \bigoplus_{m=1}^k \eta_m \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_i].$$

Такое представление кольца называется разложением Хиронака, а θ_i и η_m —первичные и вторичные инварианты соответственно.

Многочлен $f \in \mathbb{C}[\vec{x}]$ называется χ -инвариантом группы G , если $\sigma f = \chi(\sigma)f$, для всех $\sigma \in G$, где $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ —линейный гомоморфизм.

Пусть $\mathcal{H}(G)$ —множество всех гиперплоскостей, отражение σ относительно которых принадлежат G , L_{H_σ} —линейная функция, определяющая гиперплоскость π . Обозначим $\chi_k(\sigma) = \det^{-k}(\sigma)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, и

$$f_{\chi_k} = \prod_{H \in \mathcal{H}(G)} (L_H)^k.$$

Нетрудно убедиться в том, что f_{χ_k} — χ_k -инвариант группы G .

Теорема. Кольцо инвариантов группы G^1 представимо в виде:

$$\mathbb{C}[\vec{x}]^{G^1} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} f_{\chi_k} \mathbb{C}[J_{m_1}, \dots, J_{m_n}],$$

где m —порядок циклической группы G/G^1 . [1]

Проиллюстрируем данную теорему следующим примером.

Тетраэдральная группа T_8 —это группа симметрий правильного комплексного многоугольника $3(3)3$. [2] Она имеет порядок 24 и порождается отражениями третьего порядка относительно осей симметрии с уравнениями $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 = 0$ и $x_2 = 0$. Группа содержит 8 отражений третьего порядка относительно 4 осей. Показатели группы: $m_1 = 4$, $m_2 = 6$. Множество $\sigma \vec{s}$ состоит из всех нормальных векторов осей симметрии многоугольника $3(3)3$:

$$\pm \omega^t \vec{e}_2, \quad \pm \omega^t \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + i \frac{\omega^h}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 \right), \quad t, h = \overline{1, 3}$$

ω есть первообразный корень третьей степени из единицы, i —мнимая единица.

Кольцо $\mathbb{C}[\vec{x}]^{T_8} = \mathbb{C}[J_4, J_6]$, где базисные инварианты имеют вид:

$$J_4 = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{s})^4 = x_1^4 + 2\sqrt{2}ix_1x_2^3;$$

$$J_6 = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{s})^6 = x_1^6 + x_2^6 - 5\sqrt{2}ix_1^3x_2^3;$$

Подгруппа $G^1 < T_8$ состоит из элементов g группы T_8 , для которых $\det g = 1$; T_8/G^1 –циклическая группа порядка $m = 3$.

Найдем f_{χ_k} :

$$\begin{aligned} f_{\chi_0} &= 1; \\ f_{\chi_1} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(2\sqrt{2}x_1^3x_2 + ix_2^4); \\ f_{\chi_2} &= \frac{1}{27}(8x_1^6x_2^2 - x_2^8 + 4i\sqrt{2}x_1^3x_2^5); \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\mathbb{C}[\vec{x}]^{G^1} = \mathbb{C}[J_4, J_6] \oplus f_{\chi_1}\mathbb{C}[J_4, J_6] \oplus f_{\chi_2}\mathbb{C}[J_4, J_6].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Спрингер Т. *Теория инвариантов*. - М. Мир, 1981-188с.
- [2] Рудницкий О.И. *О базисных инвариантах тетраэдральных и октаэдральных групп, порожденных отражениями, на унитарной плоскости*//Деп. в УкрНИИНТИ 80.80.86.-1986.-23с.

Секция ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Однотоковый осциллятор Янга Миллса

Брагин В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (500-П ГРУППА)

В статье рассмотрены некоторые свойства численного решения динамической системы Однотоковый осциллятор Янга-Миллса

В классической теории Максвелла электромагнитная волна описывается одним четырехкомпонентным вектором (4-потенциал), зависящим от трех пространственных координат и времени. Поле Янга-Миллса, отвечающее за слабое взаимодействие, представляет из себя триплет, т.е. тройку таких связанных векторов. Изменение этого триплета в пространстве и времени описываются т. н. уравнениями Янга-Миллса - системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с кубическими нелинейностями.

Для этой системы уравнений можно рассмотреть одно из частных решений, в которых все переменные зависят только от времени, но не зависят от координат. При этом от всей системы уравнений Янга-Миллса остается система трех обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, называемую трёхмерным осциллятором Янга-Миллса. В этой системе фигурируют переменные u_1, u_2 и u_3 —потенциалы поля, - которые являются ортогональными компонентами векторов триплета.

Однако, в полной постановке янг-миллсовской задачи наряду с триплетом потенциалов существует триплет динамически сопряжённых им токов. В работе рассмотрена частная задача, в которой отличен от нуля только один из токов токового триплета. Если искать решение полевых уравнений задачи в виде плоской волны, то в собственной системе отсчёта волны полевые уравнения при определённых ограничениях на начальные условия задачи могут быть приведены к следующему виду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + u_1(4\pi + u_2^2 + u_3^2) = 0 \\ \ddot{u}_2 + u_2(u_3^2 + u_1^2) = 0 \\ \ddot{u}_3 + u_3(u_1^2 + u_2^2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Динамическую систему (1) назовём однотоковым осциллятором Янга - Миллса. Если уравнения этой системы умножить на du_1, du_2 и du_3 соответственно,

сложить и проинтегрировать, получим выражение для первого интеграла:

$$\frac{1}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{1}{2}(u_1^2 u_2^2 + u_2^2 u_3^2 + u_3^2 u_1^2 + 4\pi u_1^2) = E = const \quad (2)$$

В данной статье рассмотрен частный случай этой задачи когда $u_3 \equiv 0$:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + u_1(4\pi + u_2^2) = 0, \\ \ddot{u}_2 + u_2 u_1^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Интеграл энергии имеет вид:

$$\frac{1}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + \frac{1}{2}u_1^2(4\pi + u_2^2) = E = const \quad (4)$$

Для численного решения систем уравнений были задействованы одношаговые методы Рунге-Кутты. Наиболее оптимальным для рассматриваемых задач (с точки зрения вычислительной погрешности и машинного времени счета) можно считать метод с шестым порядком аппроксимации.

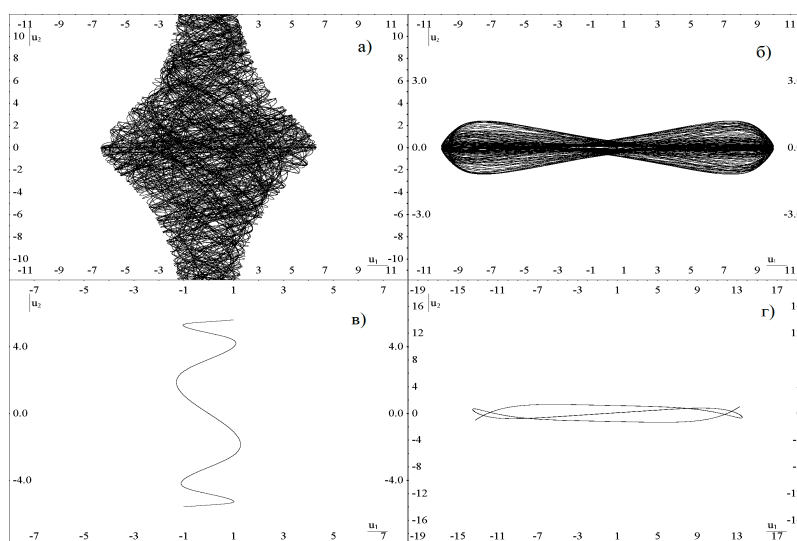
Положим в начальный момент времени $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$, а начальные значения потенциалов u_1 и u_2 , будем считать параметрами задачи. Получаемые решения весьма чувствительны к изменению этих параметров. Решения можно разделить на три основных группы: хаотические, относительно упорядоченные и периодические. Решения первого типа встречаются наиболее часто. В этом случае траектория (кривая, которую описывает радиус вектор (u_1, u_2)) со временем заполняет всю область решения. Пример такой траектории показан на рисунке 1а).

В случае, когда начальное значение одного из потенциалов невелико, решения могут принимать относительно упорядоченный вид. Один из примеров таких траекторий показан на рисунке 1б).

Рисунок 1. Примеры траекторий трех типов

Значительно реже встречаются решения третьего типа - периодические решения (рисунки 1в, 1г)

Для начальных условий, порождающих решения первого и второго типов закономерен вопрос, является ли динамическая система в этих случаях эргодической (т. е. почти каждая её точка с определённой вероятностью проходит вблизи любой другой точки).



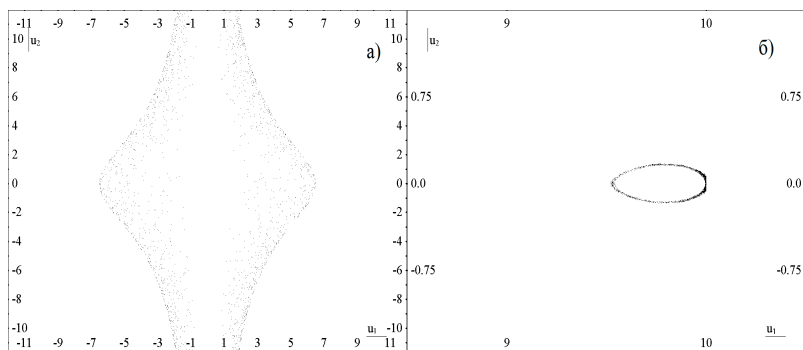
О наличии эргодических свойств может свидетельствовать равномерность заполнения траекторией области решений. Вычисления показали, что для хаотических решений суммарное время, в течение которого точка (u_1, u_2) находится в пределах произвольно выбранного прямоугольника заданной площади, практически не зависит от выбора такого прямоугольника. Таким образом, при начальных условиях, порождающих такие решения, система является эргодической. При переходе к решениям второго типа, эргодичность не наблюдается.

Еще одним инструментом исследования свойств динамической системы является построение портрета Пуанкаре - т.е. множества точек на плоскости u_1, u_2 , вычисленных в моменты времени t , при которых $\dot{u}_1 = 0$

Хаотическим решениям на портрете Пуанкаре соответствует большое количество беспорядочно расположенных точек. В этом случае портрет Пуанкаре не перестает изменяться с увеличением времени счета. Множество точек продолжает заполнять область решений, причем ближе к границам этой области плотность заполнения наиболее велика (рисунок 2а).

Рисунок 2. Портрет Пуанкаре для хаотического (а) и относительно упорядоченного (б) решений

Для решений второго типа сечение Пуанкаре представляет собой несколько изолированных линий (как правило две, симметричные относительно начала



координат), иногда замкнутых. На рисунке 2б) показан фрагмент Пуанкаре-портрета для решения, изображенного на рисунке 1б). Такой рисунок формируется довольно быстро, после чего перестает качественно меняться.

Портрет Пуанкаре для периодических решений представлен множеством из конечного (при этом очень небольшого) числа точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. - М.: Наука, 1979.- 832 с.
- [2] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. - М.: «Мир», 1990 - 512 с.
- [3] Robinson, Matthew B., Karen R. Bland, Gerald Cleaver, and J. R. Dittmann. *A Simple Introduction to Particle Physics* - Baylor University, dept. of Physics, 2008.
- [4] Бордовицына Т.В. *Современные численные методы в задачах небесной механики* - М.: «Наука», 1984 - 136 с.

Стационарная задача классической электродинамики неточечного заряда

Горшков Б.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Основными переменными в стационарной задаче являются плотность заряда ρ и плотность тока \vec{J} , отличные от нуля в пределах некоторого объёма V с границей σ . Всюду внутри объёма V должно выполняться условие:

$$\rho^2 \leq \vec{J}^2 \quad (1)$$

а на границе σ :

$$\rho^2 = \bar{J}^2 \quad (2)$$

Плотность тока \bar{J} является соленоидальным вектором, т.е.

$$\operatorname{div} \bar{J} = 0 \quad (3)$$

Величины ρ и \bar{J} внутри объёма V подчиняются уравнениям Гельмгольца с «неправильным» знаком, а именно:

$$\Delta \rho = 4\pi \rho \quad (4)$$

$$\Delta \bar{J} = 4\pi \bar{J} \quad (5)$$

Пусть \bar{J}_n – нормальная к σ компонента плотности тока \bar{J} . Тогда из (2) вытекает граничное условие для \bar{J}_n :

$$\bar{J}_n = 0 \quad (6)$$

Уравнений (3), (4), (5) и граничных условий (2) и (6) недостаточно для определения плотности заряда ρ и плотности тока \bar{J} , а также неизвестной границы σ .

Используя уравнения Максвелла и условия непрерывности всех компонент тензора электромагнитного поля на границе σ , можно получить для плотности заряда ρ и плотности тока \bar{J} следующие интегральные уравнения, содержащие неизвестную вспомогательную скалярную гармоническую функцию f :

$$\rho(x) + \int_V \frac{\rho(x')}{R(x, x')} dV_{x'} = C \quad (7)$$

$$\bar{J}(x) + \int_V \frac{\bar{J}(x')}{R(x, x')} dV_{x'} + \nabla f = 0 \quad (8)$$

$$\Delta f = 0 \quad (9)$$

где $R(x, x')$ – расстояние между точками x и x' ; x – «точка наблюдения»; x' – точка интегрирования; C – некоторая неизвестная константа, значение которой находится из условий нормировки решения по заряду:

$$\int_V \rho dV = e \quad (10)$$

где e – элементарный электрический заряд электрона.

Можно показать, что уравнения Гельмгольца с «неправильным знаком» (4) и (5) вытекают из уравнений (7), (8) и (9) и вообще говоря не являются необходимыми для решения стационарной задачи электродинамики с неточечным зарядом.

Кроме выписанных уравнений необходим ещё физически мотивированный выбор функционального пространства для ρ и \bar{J} . Здесь представляется оправданным поиск решения в «квазиэнергетическом» пространстве L_2 :

$$\int_V \rho^2 dV < \infty \quad (11)$$

$$\int_V \bar{J}^2 dV < \infty \quad (12)$$

Интегралы (11) и (12) дают вклад в энергию (т.е. собственную массу) частицы, отсюда и предлагаемый термин «квазиэнергетическое» пространство. Истинным энергетическим пространством для данной задачи является функциональное пространство Соболева W_2^1 , т.к. вклад в энергию дают ещё и интегралы от производных:

$$\int_V (\nabla \rho)^2 dV; \int_V (\text{rot} \bar{J})^2 dV \quad (13)$$

Можно показать, что поставленная задача не имеет решений в W_2^1 . Иными словами, собственная масса частицы бесконечна – это, по-видимому, неустранимый дефект любой классической (т.е. не квантовой) теории. Построенная в [1] теория имеет смысл, если сформулированная выше стационарная задача имеет не более чем счётное множество решений в L_2 и если отношения собственных масс различных решений является конечными и соответствуют из опыта соотношениям масс электрона и мюона и τ -лептона.

Для решения общей задачи можно воспользоваться следующей последовательностью шагов.

Одним из неизвестных в задаче является область V . По существу, нам необходимо найти область, в которой существует решение задачи. Зафиксируем некоторый объём V с границей σ . Тогда в этой области можно решать скалярную задачу с дифференциальным уравнением (4), заданным внутри области V и с граничным условием на границе σ , выраженным интегральным уравнением (7). Решив скалярную задачу, мы найдём функцию плотности заряда в области V и на границе.

Следующим шагом является решение векторной задачи, которая определяется векторным дифференциальным уравнением (5) и дополнительным условием (3), заданными в области V . В качестве граничного условия возьмём интегральное уравнение (8). В этом уравнении присутствует скалярная

функция f , которая определяется с помощью уравнения (9). Поэтому, совместно с векторной задачей необходимо решать скалярную задачу для определения функции f . Решив векторную задачу, мы получаем функцию плотности тока, заданную в области V и на поверхности σ .

Далее, варьируя область V нужно минимизировать невязку уравнения (2).

Вообще говоря, можно было бы сразу решать интегральные уравнения (7), (8), не используя дифференциальные уравнения (4), (5). Однако, с вычислительной точки зрения, удобно псевдогольцовские уравнения (4), (5) считать основными, а интегральные уравнения (7), (8) использовать в качестве граничных условий к ним.

Дело в том, что при численном решении интегральных уравнений (например, при помощи проекционно-сеточных методов, метода замены интеграла квадратной суммой) получаются плотно-заполненные матрицы системы (если в качестве базисов не выбрать собственные функции соответствующей задачи на собственные значения, предполагая при этом ортогональность этих функций). До того как начать процесс решения системы алгебраических уравнений, приходится затратить некоторый объем времени ЭВМ на вычисление N элементов матриц (где N - размерность системы), представляющие собой многократные интегралы. Кроме того, при рассмотрении многомерных задач возникает проблемы с хранением информации в памяти ЭВМ. При численном решении дифференциальных задач, с помощью метода конечных элементов можно получить относительно разреженные матрицы системы. Кроме того, можно минимизировать ширину ленты матрицы за счёт удачного выбора конечно-элементной модели.

Можно показать, что если (7), (8) удовлетворяют на границе, то при выполнении (4), (5) они удовлетворяют всюду в V в функциональном пространстве L_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Темненко В.А. *Классическая электродинамика с неточечным зарядом*. – неопубликовано.
- [2] Марчук В.И. *Методы вычислительной математики*. – М.: Наука, – 1989.
- [3] Шиндер В.И. *Стационарная задача классической электродинамики неточечного заряда*. – дипломная работа.

Определение перемещений и парового давления в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде при динамических воздействиях

Каневский А.В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (500П ГРУППА)

Для динамической краевой задачи о гармоническом воздействии на поверхность цилиндрической скважины в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде [3], рассмотрен частный случай - функция нагружения не зависит от осевой координаты полости и однородна вдоль всей ее поверхности. Получены формулы для вычисления перемещений твердой фазы и давления поровой жидкости.

В работе [3] рассмотрена задача о возбуждении волн гармонической нагрузкой с произвольным профилем, действующей на поверхность скважины радиуса $r = a$ по всей её протяженности $-\infty < z < +\infty$ в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде (ПУНЖС).

Приведем вкратце постановку и решение такой задачи. Динамика ПУНЖС описывается двумя векторными уравнениями относительно векторов перемещений скелета \vec{u} и поровой жидкости \vec{U} [4]:

$$N \cdot \nabla^2 \vec{u} + \text{grad}[(A + N) \cdot \text{div} \vec{u} + Q \cdot \text{div} \vec{U}] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}), \quad (1)$$

$$\text{grad}(Q \cdot \text{div} \vec{u} + RR \cdot \text{div} \vec{U}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} \vec{u} + \rho_{22} \vec{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U} - \vec{u}). \quad (2)$$

Входящие в (1), (2) константы выражаются через физические свойства среды: $N = \mu$, $A = \lambda + \frac{K_0 a_0^2 S_0}{m}$, $RR = m K_0 S_0$, $Q = a_0 K_0 S_0$, λ, μ – упругие константы Ламэ пористого упругого скелета; K_0 – модуль объемной сжимаемости жидкости; $a_0 = 1 - m - \frac{K_s}{K_r}$, $S_0 = \frac{m K_r}{m K_r + a_0 K_0}$, $K_s = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ – модуль всестороннего сжатия пористого скелета с пустыми порами, K_r – истинный модуль сжимаемости твёрдой фазы, m – коэффициент пористости среды; $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$, $\rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}$ – эффективные массы фаз; ρ_{12} – коэффициент динамической связи в модели Био; $b = \frac{m^2 \theta_0}{K_{pr}} F(\omega)$ – диссипативный член для гармонических волн, θ_0 – коэффициент динамической вязкости жидкости, K_{pr} – коэффициент проницаемости, функция $F(\omega)$ задается в зависимости от частоты.

Граничные условия данной задачи при $r = a$ и $|z| < \infty$ имеют вид:

$$\tau_{rz}^s(a, z) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}(a, z) = \sigma_{rr}^s(a, z) + q\sigma^f(a, z) = -p_1(z)e^{i\omega t}, \quad (4)$$

$$\sigma^f(a, z) = -m \cdot p_2(z)e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Здесь и далее индекс s относится к твердой фазе, f – к жидкой; $q = \frac{(m-1)}{m}$; функции нагружения $p_1(z), p_2(z)$ считаются заданными; временной множитель $e^{i\omega t}$ в дальнейшем будет опускаться.

Посредством введения скалярных функций Φ_0, Φ_1, ψ_s , уравнения Био (1), (2) приводятся к 3-м уравнениям Гельмгольца, решение которых строится в виде интегральных разложений, удовлетворяющих условию излучения Зомерфельда.

Рассматривается случай проницаемой скважины: $p_2(z) = 0$. Удовлетворение граничных условий позволяет найти интегральные плотности потенциалов и выразить через них составляющие вектора перемещений твердой фазы $u_r(r, z)$ и давление поровой жидкости $p_{por}(r, z)$:

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi \cdot D(\xi)} \left[(2\xi^2 - \bar{k}_2^2) \frac{A_1(r)}{N(\xi)} - 2\xi^2 \frac{B(r)}{N(\xi)} \right] e^{i\xi z} d\xi, \quad (6)$$

$$p_{por}(r, z) = -m^{-1} \sigma^f(r, z), \quad (7)$$

где $\sigma^f(r, z)$ выражается

$$\sigma^f = \frac{\bar{k}_1^2 T_1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(\xi) \left[(2\xi^2 - \bar{k}_2^2) \frac{H_1 H^{(0)}(\bar{\beta}_0 r) - H_0 H^{(0)}(\bar{\beta}_1 r)}{T\chi_0 H_1 - \chi_1 H_0} \right] e^{i\xi z} d\xi. \quad (8)$$

Здесь и далее черта над символами означает, что соответствующие величины относятся к ПУНЖС, а без черты – к упругой среде. Выражения для $N(\xi), A_1(r), B(r), D(\xi)$ в (6) и $\chi_0, \chi_1, H_0, H_1, T_1$ в (8) приведены в [3].

Рассмотрим частный случай функции нагрузки $p_1(z)$. Будем полагать профиль нагрузки постоянным вдоль всей поверхности полости: $p_1(z) = p_0 = const$. Тогда $\bar{p}(\xi) = -2\pi \cdot p_0 \delta(\xi)$, а $u_r(r, z)$ и $\sigma^f(r, z)$ при переходе к безразмерным величинам $\Omega = \bar{k}_2 a$ и $R = \frac{r}{a}$ принимают вид:

$$\frac{u_r}{a} = -\frac{p_0}{2\mu} \frac{1}{1 - (\sigma_0 \Omega) S_0 H_0(1)} \frac{S H_1(1) \frac{H_1^{(2)}(\sigma_0 \Omega R)}{H_1^{(2)}(\sigma_0 \Omega)} - \sqrt{\frac{z_0}{z_1}} H_0 \frac{H_1^{(2)}(\sigma_1 \Omega R)}{H_1^{(2)}(\sigma_1 \Omega)}}{S H_1(1) - \sqrt{\frac{z_0}{z_1}} \left(\frac{1 - (\sigma_1 \Omega) S_1 H_1(1)}{1 - (\sigma_0 \Omega) S_0 H_0(1)} \right) H_0(1)}, \quad (9)$$

$$\sigma^f = \frac{(-\frac{p_0 T_1}{2\mu}(\sigma_0 \Omega))(H_1(1)H_0(R) - H_0(1)H_1(R))}{S(1 - (\sigma_0 \Omega)S_0 H_0(1))H_1(1) - \sqrt{\frac{z_0}{z_1}}(1 - (\sigma_1 \Omega)S_1 H_1(1))H_0(1)}, \quad (10)$$

где

$$\sigma_j = \frac{\bar{c}_2}{c_j} (j = 0, 1, 2);$$

$I_0^{(2)}, I_1^{(2)}$ -функции Ханкеля [1], $H_j(R) = \frac{H_0^{(2)}(\sigma_j \Omega R)}{H_1^{(2)}(\sigma_j \Omega)}$, $S_j = 1 + \frac{A+QM_j}{2N}$ ($j = 0, 1$), $S = \frac{T_1}{T_0}$, z_0, z_1 —корни квадратного уравнения приведенного в [3].

Согласно выражениям (9), (10) можно получить зависимости радиальных перемещений твердой фазы и поровое давление в ПУНЖС от частоты воздействий и от расстояния от поверхности полости. Расчеты зависимостей $u_r(R, \Omega)$ и $\sigma^f(R, \Omega)$ предполагается проводить при следующих параметрах среды [2]:

$$\begin{aligned} A &= 0.4026 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 & N &= 0.2493 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 \\ Q &= 0.0672 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 & RR &= 0.0295 \cdot 10^9 \text{ кг/мс}^2 \\ \rho_f &= 0.82 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 & \rho_s &= 2.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \\ \rho_{12} &= -0.0019 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 & \nu &= 0.25; m = 0.26; b = 0. \end{aligned}$$

Выбор среды с указанными параметрами позволит сравнивать результаты расчетов данной задачи с известными результатами работы [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979.- 832 с.
- [2] Сеймов В. М. Колебания и волны в слоистых средах - К.: Наук. думка, 1990.-224 с.
- [3] Сницер А.Р. Дисперсия скорости поверхностных волн Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде - Динамические системы. - 2009. - Вып. 27 - С. 93 - 105.
- [4] Трофимчук А.Н. Динамика пористо-упругих насыщенных жидкостью сред - К.: Наук. думка, 2003. - 232 с.

Java технологии для интеграции и распределения приложений

Колпаков А.М.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500П)

Разработанные технологии CORBA (*Common Object Request Broker Architecture*), RMI (*Remote Method Invocation*), SOAP (*Simple Object Access Protocol*) [1],[2],[3] приобрели необходимость и актуальность в связи с распределением и многоуровневостью приложений. Все три технологии построены на принципе старой клиент-серверной архитектуры. Только теперь клиент отправляет запрос либо команду не по транспортному протоколу TCP, UDP или HTTP, а через особый распределенный метод. Этот метод по своей семантике ничем не отличается от обычного локального метода. В этом случае разработчик не заботится о передаче по сети, получении и разборе полученных данных. Проблема в том, что объект, у которого вызывается метод, находится за пределами виртуальной машины и возможно даже реализован на языке, отличном от Java. Решение состоит в представителе (проку) сервера на клиентской машине. Клиент обращается к представителю обычным вызовом метода. Представитель же берет на себя всю работу по взаимодействию с сервером. Аналогично на стороне сервера существует представитель для взаимодействия с клиентом. Таким образом, клиент имеет возможность вызывать распределенный метод, как будто удаленный объект находится на локальном компьютере. Как представители взаимодействуют друг с другом? Это зависит от используемой технологии.

Преимущества CORBA:

1. CORBA является высокоуровневой технологией и позволяет вызывать методы удаленных объектов как у локальных.
2. Технология CORBA обеспечивает взаимодействие между Java-объектами и объектами, написанными на других языках программирования и запущенных на разных платформах.
3. Приложения CORBA идеально подходят для систем реального времени так как, они имеют довольно высокую скорость выполнения. Это связано с тем, что CORBA платформа выполняет скомпилированный код.
4. Для описания интерфейсов используется язык IDL. Он является универсальным языком описания и не зависит от языка разработки сервера и клиента. Поэтому он является более широким в плане описания, чем язык Java.

Недостатки CORBA:

1. Технология CORBA сама по себе является тяжеловесной в связи со своей универсальностью. Это создает некоторые проблемы в создании

и в разворачивании CORBA приложений. Существует множество различных утилит для компиляции и запуска, усложняя при этом процесс разработки и отладки.

2. Хотя CORBA v2.3 имеет спецификацию "Объектов по значению" она остается скорее сложной и в некоторых случаях плохо определенной спецификацией.
3. Объекты, основанные на CORBA нельзя поименовать через URL. Это приводит к определенным трудностям для создания сервисов.
4. CORBA не предоставляет никакой возможности динамически загружать новые классы посредники (заглушки и каркасы).
5. Для удобства работы с удаленными объектами, CORBA использует дополнительные усилия для сериализации и маршалинга объектов, регистрации удаленных объектов и создания классов представителей и обслуживающих классов.

Преимущества RMI:

1. RMI позволяет для клиента и сервера передачу объектов как параметров метода и возвращать значения либо по значению либо по ссылке.
2. Несмотря на то, что удаленные объекты сформированы и находятся физически на сервере, они могут быть активированы с помощью клиентского вызова без каких-либо экземпляров на сервере.
3. RMI обеспечивает средства для распределенной сборки мусора, то есть очищает все распределенные серверные объекты, которые не имеют никаких ссылок на распределенные клиенты.
4. В новых версиях RMI позволяет полную настройку основных типов сокетного соединения между клиентом и сервером.
5. Концептуально, RMI технология обеспечивает примерно то же количество средств, которое предоставляет CORBA. Однако RMI предоставляет возможности для более легкой передачи объектов по значению и загрузки новых Java классов между клиентами и серверами.
6. RMI более легковесное решение для Java приложений чем CORBA или SOAP
7. RMI использует сериализацию как протокол, и нет необходимости читать и манипулировать байтами кода.
8. RMI по своей семантике является обычным вызовом метода и следовательно является синхронизированным. не надо затрачивать усилия на синхронизацию потоков и при этом реализуется последовательная потоковая логика.

Недостатки RMI:

1. RMI была создана исключительно для взаимодействия Java приложений, хотя в дальнейшем с помощью реализации протокола IIOP, RMI сумела преодолеть в некоторой степени несовместимость между языками.
2. Для удобства использования вызова методов, RMI использует дополнительные усилия для сериализации и маршалинга объектов, регистрации удаленных объектов и создания классов представителей. Это в свою очередь влияет на снижение оптимальности и производительности.
3. RMI по своей семантике является обычным вызовом метода и следовательно является синхронизированным. Этот факт является недопустимым для долгих вычислительных методов или методов возвращающих большое количество данных. RMI создан для коротких сервисных методов и во многих приложениях этого достаточно.
4. Приложения, построенные на базе RMI более медленные в выполнении, так как работают под Java машиной. Виртуальная Java машина тратит накладные расходы на интерпретацию кода.
5. RMI сильно привязана к JAVA платформе, что делает ее плохо масштабируемой и создает трудности интегрирования с существующими приложениями.

Преимущества SOAP:

1. Web - сервисы построенные на протоколе SOAP не зависят ни от транспортных механизмов, ни от аппаратных архитектур, ни от операционных систем.
2. SOAP это протокол построенный на базе XML. Его можно легко анализировать, а это в свою очередь упрощает отладку. К тому же XML является универсальным языком разметки, и для работы с ним существует множество библиотек на любом языке программирования.
3. Для описания web-сервисов используется язык WSDL. Он является универсальным языком описания и не зависит от языка разработки и от платформы, на которой запущен сервис.
4. Лучший способ взаимодействия между приложениями это HTTP, потому что HTTP поддерживается всеми браузерами и серверами, кроме того ,на сегодняшний день, разработано множество технологий и Фреймворков ориентированных на HTTP. А SOAP в свою очередь был создан именно для HTTP протокола.
5. Распределенное взаимодействие на базе SOAP позволяет преодолеть множество проблем связанных с безопасностью и совместимостью с

платформами или серверами. Исключает проблему с firewall-ами и проху-серверами.

6. Использовать веб-сервисы могут как клиентские приложения, непосредственно работающие с пользователем, так и другие приложения (в том числе и другие веб-сервисы).

Недостатки SOAP:

1. Способность пакетов SOAP преодолевать firewall'ы и другие виды защиты с помощью HTTP составляет одновременно и преимущества и проблему безопасности.
2. Надо заметить, что SOAP не является объектной архитектурой или платформой. Это всего лишь простой протокол.
3. Создание web - сервисов, это более сложная и ресурсоемкая задача, чем создание распределенных интерфейсов. Хотя с современными технологиями и Фреймворками типа JAX-WS, этот процесс стал во многом элегантный и стандартизированный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Paul J. Perrone, Venkata S. R. "Krishna" J2EE Developer's Handbook*, 2003, С. 325 – 528.
- [2] *Sun Microsystems, Inc. The Java EE 5 Tutorial, Third Edition*, 2010, С. 479 – 630
- [3] *Кей С. Хорстманн, Гари Корнелл Java2 библиотека профессионала, Том 2 Тонкости программирования*, 2007, С. 321 – 387

Использование дополнительных возможностей параметрических полиномов степени выше третьей при моделировании кривых и поверхностей

Левяши А.К.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (500-П ГРУППА)

Целью данной работы является описание влияния на вид кривых тех дополнительных параметров, которые вводятся для параметрических сплайнов пятой степени.

При использовании параметрических сплайнов возникают возможности моделирования участков с вертикальными касательными, а использование

многочленов степени выше третьей позволяет получить дополнительные параметры для моделирования кривых, в частности, использовать значения второй производной [1]. Кроме того, если построена составная параметрическая сплайновая кривая на основе сплайнов третьей степени, то локальное использование для отдельной порции кривой многочленов более высоких степеней позволяет осуществить модификацию этой порции не меняя других. Будем искать полиномиальную функцию пятой степени в виде:

$$r(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5,$$

Заданы: $r(0), r(1), \dot{r}(0), \dot{r}(1), \ddot{r}(0), \ddot{r}(1)$.

В результате получим следующую матрицу:

$$r = U \cdot C \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 & u^4 & u^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -15 & 8 & 7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 6 & -3 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \dot{r}(0) \\ \dot{r}(1) \\ \ddot{r}(0) \\ \ddot{r}(1) \end{pmatrix}$$

Построим параметрическую кривую Фергюсона [2] на основе полинома третьей степени и по заданным параметрам параметрическую кривую Фергюсона пятой степени. Проведем анализ влияния значений векторов $\ddot{r}(0)$ и $\ddot{r}(1)$ на порцию кривой.

В случае выпуклой порции, определяемой касательными векторами $\dot{r}(0) = (1, 1)$ и $\dot{r}(1) = (1, -1)$ (рис. 1). Многочлены пятой степени со значениями второй производной $\ddot{r}(0)_x = 10, \ddot{r}(0)_y = 10, \ddot{r}(1)_x = 0, \ddot{r}(1)_y = 0$ (рис. 2) и $\ddot{r}(0)_x = 0, \ddot{r}(0)_y = 0, \ddot{r}(1)_x = -10, \ddot{r}(1)_y = 10$ (рис. 3) повышают выпуклость порции по сравнению с многочленом третьей степени.

Если на одном из концов, например $u = 1$, задать $\ddot{r}(0)_x = 0, \ddot{r}(0)_y = 0, \ddot{r}(1)_x = 10, \ddot{r}(1)_y = 10$, то кривая приобретает изгиб вблизи этой точки, порождающий появление вогнутого участка (рис. 4) Если же, например, взять вариант $\ddot{r}(0)_x = 0, \ddot{r}(0)_y = 0, \ddot{r}(1)_x = -10, \ddot{r}(1)_y = -10$, то изгиб проявляется в середине порции кривой (рис. 5)

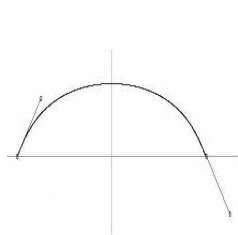


Рис. 1

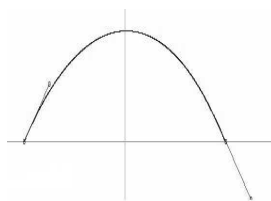


Рис. 2

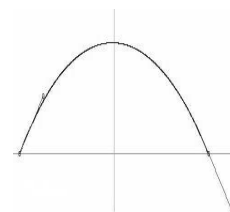


Рис. 3

По-настоящему выпукло-вогнутой порция становится, если задать, например, $\ddot{r}(0)_x = 0$, $\ddot{r}(0)_y = 20$, $\ddot{r}(1)_x = 10$, $\ddot{r}(1)_y = -50$ (рис. 6). Значит, при определенных значениях второй производной можно из первоначально выпуклой порции получить выпукло-вогнутую, т.е. существенно изменить геометрию кривой.

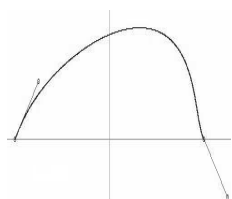


Рис. 4

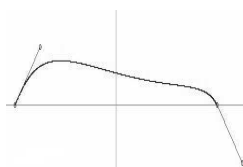


Рис. 5

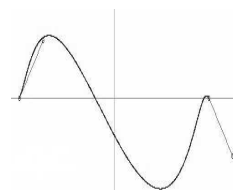


Рис. 6

При исследовании параметрических кривых всегда проводится анализ появления "петель" при определенных параметрах. Если речь идет о порциях кривых третьей степени, то известно, что "петли" появляются при значительном увеличении модулей касательных векторов у выпуклой порции. Анализ порции пятой степени показал, что можно наблюдать такой же эффект, не меняя значений касательных векторов, а выбирая, например, такие значения вторых производных: $\ddot{r}(0)_x = 50$, $\ddot{r}(0)_y = 0$, $\ddot{r}(1)_x = -100$, $\ddot{r}(1)_y = 0$ (рис. 7) и $\ddot{r}(0)_x = 50$, $\ddot{r}(0)_y = 20$, $\ddot{r}(1)_x = -50$, $\ddot{r}(1)_y = 20$ (рис. 8)

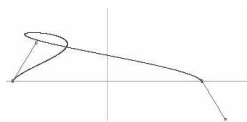


Рис. 7

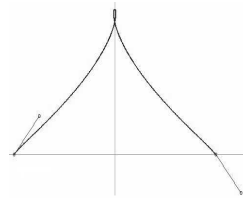


Рис. 8

Следовательно, при использовании в практических целях параметрических сплайнов пятой степени, нужно обращать внимание не только на величину модулей касательных векторов, как обычно, но и не допускать некоторых предельных значений второй производной в конечных точках.

В дальнейшем планируется провести более тщательный анализ влияния на образование "петель" длины хорды $|r(1) - r(0)|$ и длины параметризации (исследовать порцию не на отрезке $u \in [0, 1]$, а на отрезке $u \in [b, b + c]$)

Также недопустимым эффектом для порции кривой параметрического сплайна является эффект "падающей волны". Этот эффект в данном случае возникает при значительном увеличении $\ddot{r}(1)_x$, не изменяя других параметров, например: $\ddot{r}(0)_x = 0$, $\ddot{r}(0)_y = 0$, $\ddot{r}(1)_x = 50$, $\ddot{r}(1)_y = 0$ (рис. 9), $\ddot{r}(0)_x = 0$, $\ddot{r}(0)_y = 0$, $\ddot{r}(1)_x = 60$, $\ddot{r}(1)_y = 0$ (рис. 10).

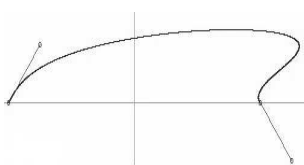


Рис. 9

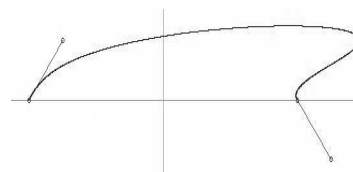


Рис. 10

Кроме рассмотренных значений $\dot{r}(0)$, $\dot{r}(1)$, также было проведено исследование влияния второй производной на случай выпукло-вогнутой порции третьей степени, задаваемой касательными векторами $\dot{r}(0) = (1, 1)$ и $\dot{r}(1) = (1, 1)$.

Были определены те экстремальные значения второй производной, приводящие к таким нежелательным ранее упомянутым деформациям этой порции кривой, как эффекты "петли" и "падающей волны". Была написана программа на языке Java [3]

В дальнейшем предполагается провести следующие исследования:

- Исследовать влияние длины параметризации и длины хорды на порции кривой пятой степени.
- Построить, используя условия гладкости и непрерывности, составной сплайн с порциями кривой, основанными на полиномах пятой степени
- Основная задача: построить пространственный аналог такой кривой - порцию поверхности, используя подход Кунса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ковтун А. М., Бадаев Ю. И. *Сплайны третьего порядка гладкости на основе полинома пятой степени с заданными первыми и вторыми производными в конечных точках*. — Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 84, Київ, 2010. — 217–220 с.
- [2] Фокс А., Прагг М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве*. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
- [3] Ноутон П., Шилт Г. *Полное руководство по программированию Java2*

Дискретные двумерные квадрики типа «эллипс-прямая»

Лицов В.И.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Одним из новых направлений математических и физических исследований является развитие методов и средств изучения систем с хаотическим поведением, получившее название теории хаоса. Теория хаоса - раздел прикладной математики, изучающий свойства хаотических динамических систем.

Дискретные динамические системы являются одним из классов задач, в которых возникает хаос. В данной статье мы остановимся на исследовании дискретных двумерных квадрик, т.е. дискретных динамических систем с квадратичной правой частью, частным случаем которых является отображение Хенона. Им были исследованы условия, при которых происходят бифуркации «складка» и «удвоение периода», а также обнаружен странный аттрактор, обладающий самоподобными свойствами. Однако в теории динамических

систем недостаточно изучен общий случай дискретных двумерных квадрат, поэтому, целью поставим нахождение и классификацию финальных траекторий дискретных двумерных квадрат типа «эллипс-прямая», которые задаются следующим отображением

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + R\cos\xi(x_n^2 + y_n^2 - 1), \\ y_{n+1} = y_n + R\sin\xi(x_n\sin\alpha + y_n\cos\alpha - a). \end{cases}$$

Особый интерес при изучении данной системы представлял найденный странный аттрактор. Его исследование было проведено по всем четырём параметрам. Была вычислена размерность Минковского для каждого значения изменяемых параметров (Рис.1).

В результате итерирования этого отображения возможны следующие финальные траектории: конечное число точек, гладкая кривая, странный аттрактор типа «монстр», слоистый аттрактор.

Одним из вариантов финальных траекторий является странный аттрактор, в котором нельзя выявить основных направлений, вдоль которых концентрируются точки. Аттрактор данного типа состоит из отдельных точек, не образующих линий. Финальная траектория такого типа представлена на (Рис.2). Размерность Минковского для данного аттрактора составляет 1.52, что подтверждает его фрактальную структуру.

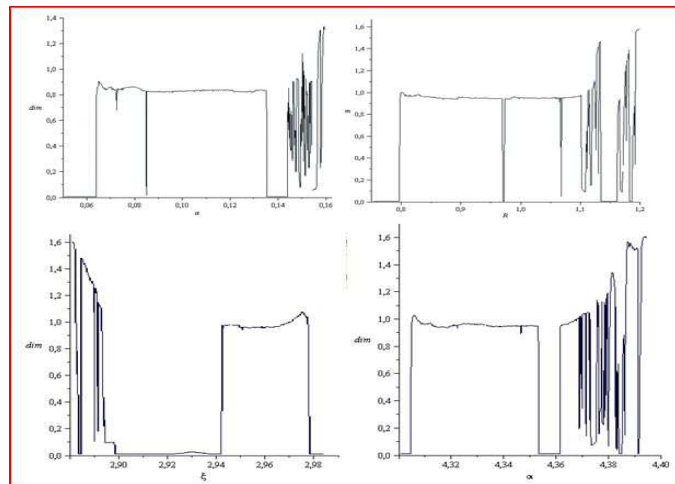


Рис. 1. Размерности Минковского для каждого значения изменяемого параметра.

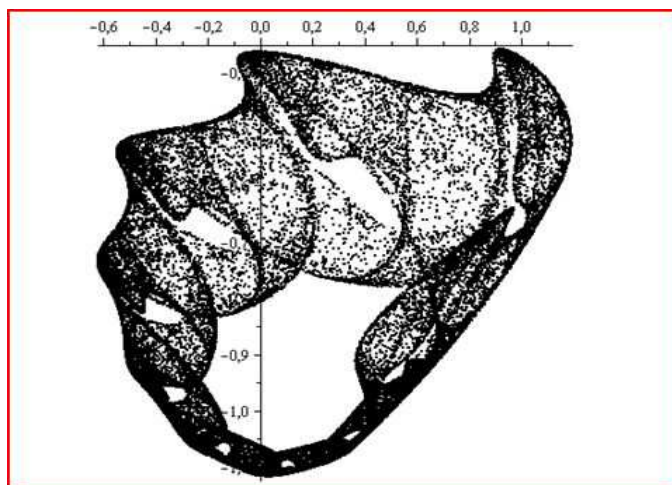


Рис. 2. Странный аттрактор ($R=1.2$, $\alpha=4.398230$, $a=0.151$, $\xi=2.879$).

Таким образом были рассмотрены отдельные аспекты теории хаоса применимо к дискретным динамическим квадрикам типа «эллипс-прямая».

В работе было проведено исследование одного из случаев дискретной двумерной квадрики, случая «эллипс - прямая» по всем четырём параметрам. Были найдены точки равновесия системы, и исследована их устойчивость. Было исследовано влияние параметров системы на отображение «эллипс - прямая». В ходе исследования были обнаружены значения, при которых проявляется эффект Фейгенбаума (происходит удвоение количества точек), а также образование странного аттрактора (тип финальной траектории, в которой точки распределены практически равномерно по всей площади аттрактора и не скапливаются вдоль основных направлений).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Нерон М.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. // Commun. Math. Phys., 1976.
- [2] *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352с.
- [3] *Темненко В.А.* Дискретные динамические квадрики. //неопубликовано, 2007.

Структурирование и алгоритмизация интеллектуальной игры Го

Сиверс А.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Го-это одна из древнейших игр в мире. Она существует более 4000 лет. За многолетнюю историю она обросла целым рядом легенд своего создания, она получила статус интеллектуальной игры элиты.

Го- это стратегическая игра, в которой выбор стратегии в начале игры занимает одну из ключевых позиций. В этой игре камни имеют силу, а не являются средством огораживания территорий. При помощи теории игр и теории вероятностей можно построить алгоритм и структурировать процесс выбора направления игры в начале партии.



Используя некоторые эмпирически полученные данные, можно составить таблицу соотношения побед белых и чёрных камней относительно позиции на доске после 10 ходов. В качестве эмпирических данных были выбраны 300 партий профессионалов на кубки и титулы ассоциации Нихон-Киин. Ситуации на доске, возможно, разделить на группы, в зависимости от выбранных игроками стратегий. Используя методы теории вероятностей и математической статистики были посчитаны дисперсия, математическое ожидание, коэффициент корреляции, благодаря которым была установлена зависимость между

случайными величинами. Полученные данные помогут предугадать развитие и исход партии в случае выбора той или иной стратегии.

В нашем случае два игрока знают все ходы, сделанные до текущего момента, и осведомлены о всех возможных стратегиях, которые может выбрать противник. Хороший игрок в Го может просчитать до 60 комбинаций наперед и предсказать дальнейшее развитие игры. Однако те комбинации, которые рассчитывает в своей голове человек- для компьютера могут быть не преодолимыми. В настоящее время лучшие программы играют в Го на уровне 8-10 кю (любительского). Такого уровня человек может добиться старательно занимаясь около года. Организация, основанная Инг Чань Ки, организовала фонд Инга , который обещает награду 1.5 миллиона долларов тому, кто создаст программу играющую в Го и способную победить профессионального игрока.

На стандартной доске 19x19 имеется около 250 вариантов ходов, при более детальной оценке ситуации на доске, круг поиска идеального хода в середине партии от 50 до 100(в начале игры) и от 15 до 30 в конце , говорить об оценке ситуации в середине партии намного сложнее, так как позиция на доске может изменяться после каждой серии из пяти ходов.

Для улучшения игры компьютера, требуется пересмотреть подход к игровым программам: компьютер не должен пытаться имитировать логику человека, он должен выполнять статистический анализ и после хода человека перебирать варианты и моделировать ситуации, которые в конечном итоге, приводят к выигрышу в партии. В наше время проблема создания программы, хорошо играющей в Го, очень актуальна, ведь человек, играя в эту игру, развивает в себе многие способности, такие как математическое и стратегическое мышление. Создание сайта поможет интересующимся людям ответить на все вопросы относительно игры и начать свой путь к мастеру Го. Сайт реализован на языке HTML, наполнение сайта состоит из методических материалов, пособий, а также содержит программу MultyGo, которая позволяет записывать партии для дальнейшего пошагового разбора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *А.А.Боровков*. Математическая статистика. // Наука.1984 г.144 с.
- [2] *В.Е.Гмурман*. Теория вероятностей и математическая статистика. //М.: Высш. шк. 2006 г.479 с.
- [3] *А.В.Крушевский*. Теория игр.//К:Вища Школа.1977 г.216 с.
- [4] *Г.Оуэн*. Теория игр.// М.:Мир.1971 г.230 с.
- [5] *Миура Ясуюки*. Го и восточная бизнес-стратегия.//М.:София.2005 г. 416с.

Явление Гиббса при оценках напряженного состояния прямоугольной призмы

Халикова Л.Л.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Явлением Гиббса называется особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции, впервые обнаруженная Уилбрейамом в 1848 г. и позже переоткрытая Гиббсом в 1898 г.

Для начала рассмотрим анализ явления Гиббса, проделанным Хеммингом Р. [3] в одномерном случае, где он рассматривал частный случай прямоугольной волны $H(t)$ с периодом 2π

$$H_{2n}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} * \sin(2k-1)t. \quad (1)$$

Гиббс отметил, что частичная сумма H_{2n} превосходит функцию на некоторую величину. Более точно

$$H_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \rightarrow 1,08949\dots, \text{ когда } n \rightarrow \infty.$$

$H_{2n}(t)$ не только превосходит функцию $H(t)$ но и имеет тенденцию колебаться около $H(t)$, и колебания уменьшаются медленно, когда t удаляется от разрыва.

Чтобы объяснить явление запишем (1) как

$$\begin{aligned} H_{2n}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^t \cos(2k-1)x dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2nx}{\sin x}, \end{aligned}$$

где использована формула

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x},$$

Максимум и минимум для $0 \leq t \leq \pi$ достигается в точках

$$\frac{dH_{2n}(t)}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2nt}{\sin t} = 0.$$

То, что верно для этой специальной функции, очевидно, верно и для более общих функций, так как разрыв можно рассматривать как возникающей из прямоугольной волны, прибавленной к главной функции.

Опишем проявление явления Гиббса путем сравнения двух двумерных графиков, представленных на Рис 1. и Рис 2.[1][2][4]

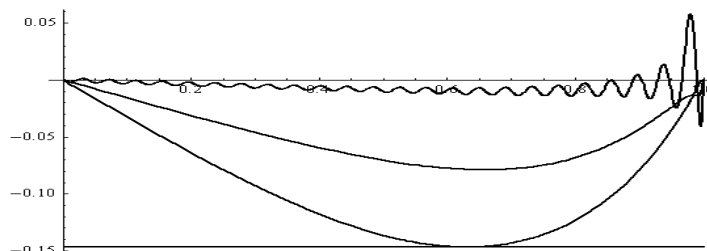


Рис. 1

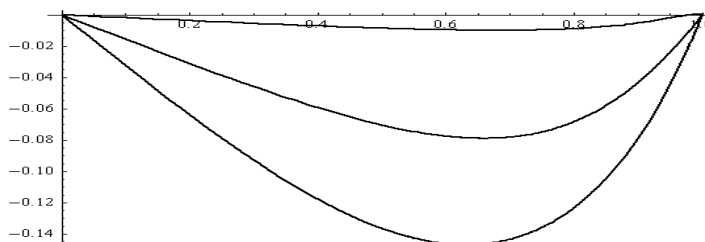


Рис. 2

На Рис.1 представлен график сдвиговых напряжений, искаженный явлением Гиббса. На Рис.2 представлен истинный график сдвиговых напряжений после улучшения сходимости во всей области определения решения. Рассмотрим эти два случая подробнее:

$$\sigma_{xy} = \sum_{n=1}^p (-1)^n \frac{y_{ms}(n) - G}{\sin(n\pi)} ((\cot(n\pi) \sin(n\pi x) - x \cos(n\pi x)) \sin(n\pi y) - \frac{x_{ms}(n) - G}{\sin(n\pi)} (\cot(n\pi) \sin(n\pi y) - y \cos(n\pi y)) \sin(n\pi x))$$

При $G = 0$ наблюдается искажения в трех поперечных сечениях поверхности (явление Гиббса). Горизонтальная прямая фиксирует минимальное значение истинных сдвиговых напряжений, как показано на Рис.1 При $G = \frac{3}{2}$ с улучшением сходимости получаем исправленные кривые (без влияния явления Гиббса), как показано на Рис.2. Верхним кривым на Рис.1 и Рис.2 соответствует

$y = 0,99$, средним кривым соответствует $y = 0,9$, а нижним кривым $y = 0,63$, на котором достигает наибольшее по абсолютной величине значение относительных сдвиговых напряжений равных 0,147.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Б.М. Коялович.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений.
- [2] *В.Н. Чехов, А.В. Пан.* Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике.
- [3] *R.W. Hamming.* Numerical methods for scientists and engineers.
- [4] *V.V. Meleshko, A.M. Gomilko.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion. //Proc. Roy. Soc. London.-2004.

Нейросетевое управление в задаче преследования

Штука А.Ю.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Рассмотрим игровую задачу преследования одного управляемого объекта, движущегося в горизонтальной плоскости, другим управляемым объектом, движущимся в пространстве. Цель преследователя - достичь равенства координат и скоростей с убегающим, то есть совершить мягкую посадку. При этом убегающий может противодействовать догоняющему, выбирая тот или иной алгоритм убегания. Кроме того, в задаче присутствуют фазовые ограничения - преследователь не может пересечь плоскость, в которой движется убегающий.

Запишем задачу мягкой посадки в теоретико-игровой постановке. Пусть движение преследователя задается уравнением:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u, \quad x, u \in R, \quad \|u\| \leq 1 \quad x = (x_1, x_2), \quad u = (u_1, u_2) \quad (1)$$

где (x_1, x_2) - координаты преследователя. α - коэффициент сопротивления среды, $\rho > 0$ - параметр управления, $u(t)$ - управление преследователя.

Движение убегающего задается уравнением:

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} = \sigma v, \quad y, v \in R, \quad \|v\| \leq 1 \quad y = (y_1, y_2), \quad v = (v_1, v_2) \quad (2)$$

где (y_1, y_2) - координаты убегающего. β - коэффициент сопротивления среды, $\sigma > 0$ - параметр управления, $v(t)$ - управление убегающего.

Игра рассматривается с точки зрения преследователя. Его цель - совершить мягкую посадку, то есть за конечное время добиться выполнения равенств $\|\Delta\| < \epsilon$, $\|\dot{\Delta}\| < \epsilon$, где $\Delta = x - y$, $\dot{\Delta} = \dot{x} - \dot{y}$. При этом убегающий может противодействовать догоняющему, выбирая тот или иной алгоритм убегания.

Управление преследователя строится с помощью нейроконтроллера на основе нейронной сети с обратным распространением ошибки. В качестве входных величин были взяты расстояние между объектами $R = \|\Delta\|$, величина вектора скорости $R_v = \|\dot{\Delta}\|$ и угол отклонения вектора скорости $\gamma = \angle(\Delta, \dot{\Delta})$. Управление преследователя выбиралось таким образом, чтобы обеспечивать мягкую посадку при любом допустимом управлении убегающего: $u = [(\alpha - \beta)\dot{y} + \sigma v - \Delta - (k - \alpha)\dot{\Delta}]/\rho$, где $k > 2$ - коэффициент.

Для обучения нейронной сети численно было создано 54 сценария, в каждом из которых изменялся угол отклонения вектора скорости (от 0° до 180° с шагом 30°), начальное положение и начальная скорость преследователя были фиксированными, а начальное положение убегающего и величина скорости менялись от 0 до 3. Нейронная сеть имела два скрытых слоя. Число нейронов менялось на каждом из слоев от 6 до 35. Процесс обучения прерывался, когда ошибка достигала некоторой малой величины, заранее заданной исходя из стратегии обучения и начальных условий. Для обучения нейронной сети требовалось порядка 300000 итераций.

Нейросетевое управление хорошо отображает функциональное соотношение между входными параметрами и решением, обеспечивающем мягкую посадку, однако оно не гарантирует хорошее управление для любых ситуаций. Так как нейронная сеть обучалась только для ситуаций, где преследователь и убегающий имели оптимальные стратегии, нейроконтроллер преследователя иногда не может сгенерировать адекватное управление, в случаях, когда движение убегающего не является оптимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *J. Albus, A. Meystel, A.A. Chikrii, A.A. Belousov, A.I. Kozlov* Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects // Cybernetics and systems analysis, Vol. 37, Issue 1, Jan.-Feb. 2001.
- [2] *Терехов В.А., Ефимов Д.В., Тюкин И.Ю.* Нейросетевые системы управления. //Издательство:Радиотехника, 2003г.
- [3] *Han-Lim Choi, Min-Jea Tahk, Hyo-Choong Bang* Neural network guidance based on pursuit-evasion games with enhanced performance. //Division of Aerospace Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 373-1, Guseong-dong, Yuseong-gu, Daejeon,305-701, Republic of Korea.

Секция ИНФОРМАТИКИ

Программный комплекс поддержки принятия решений на основе линейной модели при неполной информации

Бекирова Э.М., Ионина И.С.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Широкий класс моделей принятия решений представляют задачи математического программирования, для решения которых разработаны многочисленные методы. В частности, линейные модели принятия решений, формализованные как задачи линейного программирования, имеют широкий круг приложений в различных областях. Однако применение формальных методов решения возможно лишь при полной информированности о задаче.

В статье рассматриваются алгоритмы синтеза линейных моделей принятия решения на основе неполной начальной информации и способы их реализации в системах поддержки принятия решений в виде специальных подсистем синтеза.

Согласно схеме, приведенной на рис.1, программный комплекс поддержки принятия решений включает два модуля: **"Анализ и восстановление"** и **"Выбор доопределения"**.

В модуле **"Анализ и восстановление"** на вход поступает начальная информация о задаче принятия решений. Пользователь указывает, является ли задача полностью или частично заданной, выбирая соответствующий блок.

1. В случае выбора блока **"Частично заданная целевая функция"** пользователь вводит информацию о полностью заданных ограничениях и начальную информацию о функции. Если функция является нелинейной, но принадлежит к одному из допустимых классов, то выполняется ее линеаризация и далее происходит переход к конструктору функции. Если же функция является линейной, то переход к конструктору функции осуществляется сразу.

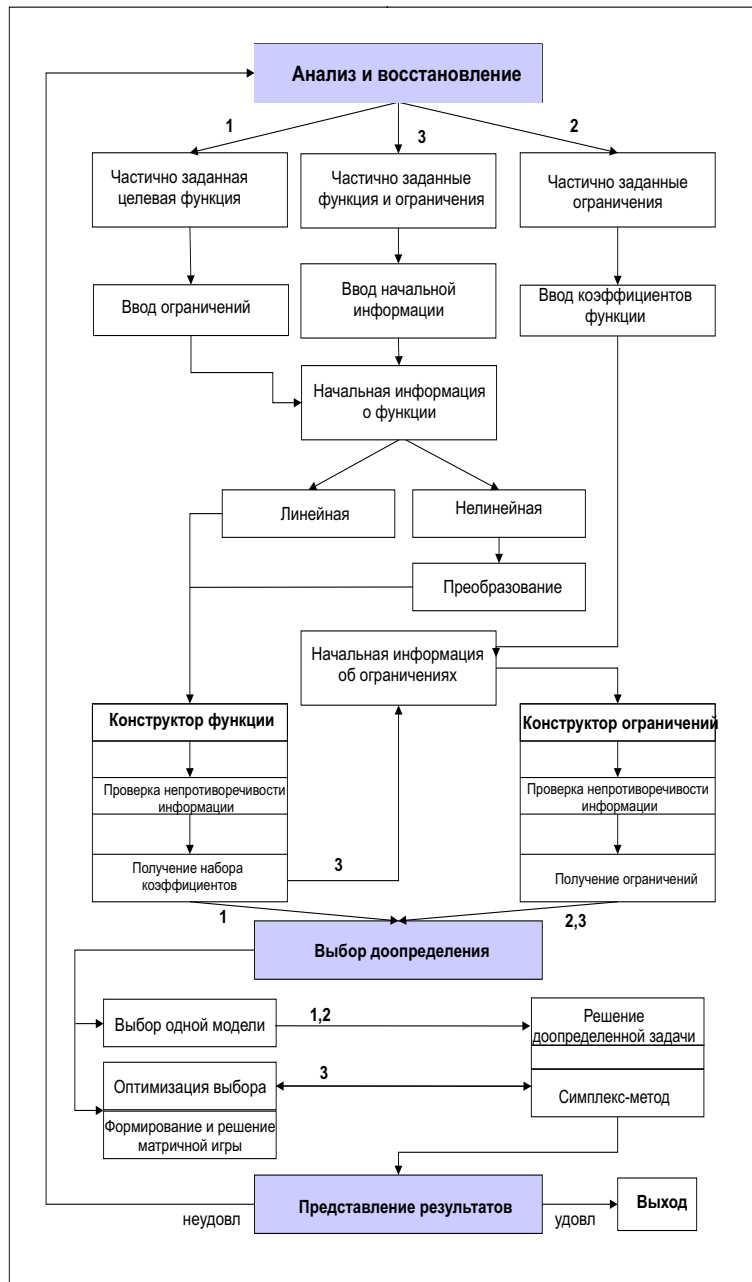


Рис.1. Схема программного комплекса

Конструктор функции подразумевает выполнение алгоритма синтеза (восстановления) линейной целевой функции. Приведем краткое теоретическое обоснование алгоритма синтеза функции [2,3].

Будем рассматривать класс задач Z принятия решений (ПР), допускающих описание в виде *модели*:

$$\begin{cases} \max(f(x))/x \in \Omega \subset R^n \\ f, \Omega : I(f, \Omega) \end{cases}$$

Здесь $f(x) : R^n \rightarrow R$ — целевая функция, Ω — множество допустимых решений и задающая их информация $I = I(f, \Omega)$.

Начальная информация $I_0(f)$ задаёт на конечном множестве допустимых значений D бинарное отношение, которое обозначим \succ :

$$x \succ y \Leftrightarrow f(x) > f(y), x, y \in D$$

В процессе формирования начальной информации могут быть допущены ошибки в результатах сравнения пар допустимых решений, в результате чего возникнет "циклическая" ситуация $x \succ y \succ z \succ x$, $x, y, z \in D$, которая нежелательна, и должна быть устранена путем дополнительной проверки начальных данных. Формально заданную так начальную информацию будем называть противоречивой.

Определение 1. Информация $I_0(D)$ называется *непротиворечивой*, если заданное ею отношение \succ является строгим порядком.

Это означает, что непротиворечиво заданная начальная информация позволяет упорядочить элементы множества D (т.е. допустимые решения) по убыванию значений целевой функции.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$, частично заданная непротиворечивой информацией $I_0(D)$, *допускает линейное доопределение* (восстановление), если найдётся вектор $c \in R$ такой, что $(f(x) > f(y)) \Leftrightarrow c(x) > c(y)$.

Набор коэффициентов $c = c_1, \dots, c_n$ линейной функции, доопределяющей заданную при помощи непротиворечивой частичной информации целевую функцию $f(x)$, может быть восстановлен за конечное число шагов применения процедуры линейной коррекции:

$$c^i = \begin{cases} c^{i-1} & , \text{ если } (c^{i-1}, x^i - x^j) > 0 \\ c^{i-1} + (x^i - x^j) & , \text{ если } (c^{i-1}, x^i - x^j) \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $l = 1, \dots, m, 1, \dots, m = k(k-1)/2$, $k = |D|$, $x^i, x^j \in D, 1 \leq i < j \leq k$, c^0 - произвольный начальный набор.

Таким образом, если, начиная с некоторой итерации значения набора c не корректируются, то линейное доопределение найдено. Если же, начиная с некоторого шага, значения коэффициентов набора c начинают повторяться через каждые m коррекций, то следует сделать вывод о невозможности линейного доопределения функции $f(x)$.

Алгоритм 1 синтеза целевой функции

1) По заданной информации $I_0(D)$ на множестве элементов $D = \{x^1, \dots, x^k\}$ формируется матрица $F = \|F_{ij}\|_{k \times k}$,

$$F = \begin{cases} 1, & f(x^i) > f(x^j), i \neq j, \\ 0, & i = j, \\ -1, & f(x^i) < f(x^j), i \neq j, \end{cases}$$

которая формализует экспертное сравнение "ценности" значений целевой функции.

2) Проверяется непротиворечивость информации $I_0(D)$ (отношение строгого порядка) и производится упорядочение множества D по убыванию значений целевой функции: $f(x^1) > f(x^2) > \dots > f(x^k)$, что соответствует приведению матрицы F к виду

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & 0 & \dots \\ -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В случае невыполнения условия непротиворечивости алгоритм прекращает работу.

3) Для зафиксированного в п.2 порядка x^1, \dots, x^k элементов множества D выполняется вычисление последовательности c^0, c^1, \dots наборов коэффициентов при произвольном начальном значении c^0 :

$$c^i = \begin{cases} c^{i-1} & , \text{ если } (c^{i-1}, (x^i - x^j)) > 0 \\ c^{i-1} + (x^i - x^j) & , \text{ если } (c^{i-1}, (x^i - x^j)) \leq 0 \end{cases}$$

где $1 \leq i < j \leq k, l = 1, \dots, m, 1, \dots, m, \dots, m = (k-1)k/2$.

Если, начиная с некоторого шага p , значения набора коэффициентов не корректируются, т.е. $c^p = c^{p+1} = c^{p+2} = \dots = c^{p+m}$, то (c^p, x) объявляется доопределением частично заданной целевой функции $f(x)$.

Если, начиная с некоторого шага q , значения набора коэффициентов повторяются через каждые m коррекций, т.е.

$c^q = c^{q+m}, c^{q+1} = c^{q+m+1}, \dots, c^{q+m} = c^{q+2m}$, то следует вывод о невозможности линейного доопределения частично заданной целевой функции и происходит возврат к началу для повторного ввода начальной информации либо завершение работы.

2. В случае выбора блока "**Частично заданные ограничения**" производится ввод коэффициентов полностью заданной целевой функции и начальной информации об ограничениях. Далее следует проверка начальной информации об ограничениях на непротиворечивость.

Информация $I_0(\Omega)$ о множестве допустимых решений Ω задается двумя конечными подмножествами: $\Omega_1 = \{x^1, \dots, x^k\} \subset \Omega$, $\Omega_2 = \{y^1, \dots, y^l\} \subset R^n \setminus \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Определение 3. Начальная информация $I_0(\Omega)$ называется *непротиворечивой*, если множества Ω_1 и Ω_2 линейно разделимы, т.е. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Теорема 1. Если точка $y \in \Omega_2$ линейно отделима от точек множества Ω_1 , то коэффициенты отделяющей гиперплоскости $H(x) = h_1x_1 + \dots + h_nx_n + h_{n+1} = 0$, вычисляются с помощью алгоритма линейной коррекции:

$$h^i = \begin{cases} h^{i-1} & , \text{ если } (h^{i-1}, x^i) > 0 \\ h^{i-1} + x^i & , \text{ если } (h^{i-1}, x^i) \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $h^i = h_1^i, \dots, h_n^i$, $h^0 = (0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, k+1, 1, \dots$;

$x^i \in \{(x_1^1, \dots, x_n^1, 1), \dots, (x_k^1, \dots, x_n^k, 1), (-y_1, \dots, -y_n, -1)\} = W$ и процесс вычисления сходится за конечное число шагов.

Процедура линейной коррекции построит гиперплоскость H по обучающей выборке W за конечное число шагов.

Теорема 1 дает способ вычисления коэффициентов одной гиперплоскости, отделяющей некоторую точку $y \in \Omega_2$ от Ω_1 . Применяя процедуру (2) к построению всех гиперплоскостей $\forall y \in \Omega_2$, получают набор разделяющих гиперплоскостей, из которого выделяется минимальный набор, являющийся моделью ограничений задачи ЛП.

Алгоритм 2 синтеза ограничений

1) Построить гиперплоскость $H_1(x) = 0$, отделяющую точку $y^1 \in \Omega_2$ от множества Ω_1 . Если точка y^1 линейно неотделима, то алгоритм прекращает работу.

2) Пусть получен некоторый набор гиперплоскостей:

$\{H_1(x) = 0, \dots, H_p(x) = 0\}$, $(p < l = |\Omega_2|)$. Если все точки множества Ω_2 отделены от множества Ω_1 , то 4, иначе 3.

3) Для точки $y^i \in \Omega_2$, которая еще не отделена совокупностью p гиперплоскостей от множества Ω_1 , построить гиперплоскость $H_{p+1}(x) = 0$.

4) Из полученного набора гиперплоскостей $\{H_1(x) = 0, \dots, H_p(x) = 0\}$, разделяющих в совокупности множества Ω_1 и Ω_2 кусочно-линейной поверхностью, выбрать минимальное покрытие множества Ω_1 .

5) Восстановить систему ограничений $\Omega : A\bar{x} \leq b$, где $A = \|a_{ij}\|_{p \times n}$, $b = \|b_i\|_p^T$.

3. В случае выбора блока **"Частично заданные функция и ограничения"** пользователь переходит к вводу начальной информации о функции и об ограничениях. После проверки непротиворечивости информации о целевой функции и ее синтеза выполняется проверка непротиворечивости начальной информации об ограничениях и алгоритм синтеза ограничений.

В случае успешной работы одного из трех блоков модуля **"Анализ и восстановление"** выполняется **"Выбор доопределения"**.

Ввиду того, что при разных стартовых значениях результаты итерационных алгоритмов синтеза различны, по имеющейся начальной информации могут быть восстановлены как набор целевых функций $N_f = \{f^i(x) = (c, x)^i\}_p$, так и набор множеств допустимых решений $N_\Omega = \{\Omega^j\}_q$. Пользователь имеет возможность самостоятельно указать единственный вариант доопределения линейной модели и в блоке **"Выбор одной модели"** получить решение доопределенной задачи.

Другую возможность выбора, связанную с оценкой различных вариантов синтеза, реализует блок **"Выбор оптимального решения"**.

В основе такого выбора лежит теоретико-игровой подход. Формируется матричная игра $\Gamma = \langle N_f, N_\Omega, X \rangle$, где $N_f = \{f^i(x) = (c, x)^i\}_p$ - восстановленный набор целевых функций $N_\Omega = \{\Omega^j\}_q$ - набор множеств допустимых решений, а $X = \|x_{ij}^*\|_{p \times q}$ - платежная матрица игры. Далее выполняется решение матричной игры в чистых или смешанных стратегиях.

Полученное доопределение модели поступает в блок **"Решение доопределенной задачи"** для вычисления на основе симплекс-метода оптимального решения, которое затем предъявляется в блоке **"Представление результатов"**.

В случае неудовлетворительного по каким-либо причинам решения возможен возврат в модуль **"Анализ и восстановление"** и работа с новыми данными. Если полученный ответ удовлетворителен, то программный комплекс завершает свою работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Донской В.И., Бахта А.И.* Дискретные модели принятия решений при неполной информации // Симферополь: Таврия. -1992. - 165 с.
- [2] *Руденко Л.И.* Аппроксимация целевой функции в частично определенной задаче оптимизации // Динамические системы. - Киев: Либідь,1992, Вып.10. - С.117-123.
- [3] *Руденко Л.И.* О развитии подходов к принятию решений при неполной информации // Ученые записки ТНУ. Серия Математика. Механика. Информатика. - №1, 2001. - С.93-95/

Эффективность применения нейронных сетей в задачах распознавания

Гасанов Р. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Нейронная сеть, составляющая человеческий мозг является высокоэффективной системой, способной параллельно выполнять сложнейшие операции. В частности, распознавание лица занимает время в пределах 100мс. Такими результатами вдохновляется создание и исследование искусственных нейронных сетей. Нейронные сети - это достаточно гибкий инструмент, обладающий способностью решать широкий спектр задач. Большое преимущество нейронных сетей перед другими подходами заключается в наличии таких свойств как нелинейность и адаптивность. В то же время их реализация бывает достаточно затруднительна и это связано с проблемами выбора архитектуры, методов обучения и невозможностью предугадать результаты.

Несмотря на то, что в теории искусственные нейронные сети имеют потенциал для решения множества разнообразных задач (как-то распознавание образов, классификации, принятия решений, кластеризации, прогнозирования и т.д.), в реальных условиях результаты работы сети могут оказаться неудовлетворительными, поэтому решение использовать нейронные сети должно быть обдуманым и взвешенным. Такой подход целесообразен в случаях, когда не существует теоретически-обоснованных методов решения поставленной задачи или же когда такие методы не дают желаемых результатов.

Традиционно в круг задач искусственного интеллекта входит задача распознавания образов. Под распознаванием образов понимается процесс, в котором получаемый образ/сигнал (характеризующихся конечным набором свойств и

признаков) должен быть отнесен к одному из predetermined классов (категорий).

Пусть имеется множество объектов X , множество ответов Y и существует целевая функция $y^* : X \rightarrow Y$, значения которой $y_i = y^*(x_i)$ известны на конечном подмножестве объектов $\{x_i, \dots, x_l\} \subset X$. В зависимости от природы множества Y можно выделить следующие категории задач:

- (1) $Y = \{1, \dots, M\}$ - когда множество допустимых ответов конечно, говорят о задачах распознавания (классификации), при котором выделяется M непересекающихся классов (образов) $K_y = \{x \in X : y^*(x) = y\}$.
- (2) $Y = \mathbb{R}$ - когда множество допустимых ответов бесконечно, например, является множеством действительных чисел или векторов, при этом объекты соответствуют моментам времени, а ответы характеризуют будущее поведение процесса или явления, говорят о задачах прогнозирования (частный случай задач распознавания).

Эффективность нейронных сетей в данной области доказана многими существующими системами. Примерами могут служить от таких узких областей применения как интеллектуальная система защиты посевов, находящая и сообщающая о проблемных участках на полях, до использования нейронных сетей в робототехнике или же в известных OCR (Optical Character Recognition) системах. Нейронные сети дают хорошие результаты в задачах, где требуется устойчивость к различного рода шумам или искажениям, в таких задачах их использование оправданно и целесообразно.

Выбор архитектуры сети зачастую является достаточно сложным решением и во многом зависит от поставленной задачи. В случае (1) чаще используются сети с прямыми связями, во (2) - с обратными. Если же не удастся найти существующую оптимальную конфигурацию сети, этого можно добиться исключительно эмпирическим путем.

Рассмотрим основные типы сетей, применяющихся при решении задач распознавания:

- (1) Полносвязные нейронные сети прямого распространения (многослойный перцептрон).

Архитектура данного типа сетей подразумевает наличие иерархии слоев, в которой каждый нейрон на текущем уровне принимает и обрабатывает сигналы от каждого нейрона более низкого уровня. Также имеется выделенное направление распространения нейроимпульсов -

от входного слоя через один (или несколько) скрытых слоев к выходному слою нейронов. Для обучения используется метод обратного распространения ошибок.

(2) Нейронные сети Хопфилда (сети с ассоциативной памятью).

Сеть Хопфилда является однослойной и полносвязной (связи нейронов на самих себя отсутствуют), её выходы связаны со входами. Будучи установленной в начальное состояние, функционирует до тех пор, пока не достигнет стабильного состояния, которое и будет являться её выходным значением. Сети Хопфилда бывают синхронными, когда одновременно пересчитываются все нейроны и асинхронными, когда пересчитывается случайно выбранный нейрон.

(3) Когнитрон.

Когнитрон своей архитектурой похож на строение зрительной коры, имеет иерархическую многослойную организацию. Обучается конкурентным обучением (без учителя). Каждый слой реализует различные уровни обобщения. Неокогнитрон является дальнейшим развитием идеи когнитрона и более точно отражает строение зрительной системы, позволяет распознавать образы независимо от их преобразований, вращений, искажений и изменений масштаба. Неокогнитрон может как самообучаться, так и обучаться с учителем.

(4) Свёрточные нейронные сети.

Идея свёрточных нейронных сетей заключается в чередовании свёрточных слоев (C-layers), субдискретизирующих слоев (S-layers) и наличии полносвязных слоев (F-layers) на выходе. Свёрточные нейронные сети объединяют в себе 3 архитектурные идеи: локальное восприятие (подача на нейрон не всех выходов прошлого слоя, а лишь части, что обеспечивает сохранение структуры образа), общие разделяемые веса (нахождение некоторых черт в любом месте образа), иерархическая организация признаков (субдискретизация и создание карты признаков). Концепция разделяемых весов подразумевает наличие ядер - отдельных наборов весов, через которые проходят все фрагменты образа. Данная концепция помимо уменьшения количества весовых коэффициентов улучшает обобщающие свойства сети. Обучается сеть при помощи алгоритма обратного распространения ошибки (градиентный спуск). Скорость обучения является приемлемой даже для большой размерности сети.

В целом, не существует однозначно доминирующего подхода при решении задач с использованием искусственных нейронных сетей, тем не менее, можно

ожидать значительного улучшения результатов при аппаратных реализациях нейронных сетей (создание нейропроцессоров). Это достаточно перспективное направление, которое в будущем может стать альтернативой современным вычислительным системам, а также охватить большинство сфер деятельности человека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *К.В. Воронцов*. Вычислительные методы обучения по прецедентам.
- [2] *Р. Каллан*. Основные концепции нейронных сетей — 1-е. — «Вильямс», 2001.
- [3] *В.В. Круглов, В.В. Борисов*. Искусственные нейронные сети. Теория и практика — 1-е. — М.: Горячая линия - Телеком, 2001.
- [4] *С. Хайкин*. Нейронные сети: полный курс — 2-е. — М.: «Вильямс», 2006.

Применение генетических алгоритмов для синтеза оптимальных поведенческих деревьев

Коваль А. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

ВВЕДЕНИЕ

В последние десять лет задачи, связанные с комплексным моделированием искусственного интеллекта (ИИ), стали необычайно сложными. К таким задачам можно отнести моделирование в реальном времени поведения социальных групп; создание алгоритмов управления в робототехнике, учитывающих как можно большее число параметров и являющихся реакционными; создание сложного ИИ, проходящего тест Тьюринга, для активно развивающейся индустрии видеоигр. Для эффективного разрешения таких задач и понижения степени их сложности возникли и развиваются несколько подходов. Одним из них является использование поведенческих деревьев [1], описываемых в этой работе.

При создании комплексных систем интеллектуальных агентов зачастую требуется наличие у каждого агента уникального модуля принятия решений. В случае использования поведенческих деревьев [2] в качестве такого модуля в системах, содержащих большое количество агентов (от нескольких сотен до десятков тысяч), возникает проблема обеспечения уникальности. Очевидно, что при таких условиях создание данных модулей принятия решений вручную представляет собой крайне трудоемкую задачу и является неэффективным. В

работе предлагается подход, основанный на использовании генетических алгоритмов, который позволяет автоматизировать процесс создания уникальных поведенческих деревьев.

Для рационального функционирования интеллектуальных агентов модуль принятия решений (в контексте данной работы — поведенческое дерево) должен быть оптимальным в рамках поставленной задачи. В работе выдвигаются предположения о возможных путях вывода оптимальных деревьев решений при эволюционном отборе.

1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕДЕНЧЕСКИХ ДЕРЕВЬЕВ

В определенном смысле современные поведенческие деревья являются адаптацией И/ИЛИ графов [3] для решения задач информатики.

Определение 1. *Поведенческое дерево — это связный ациклический ориентированный граф $BT = (V, E)$, V — множество вершин, E — множество ребер. Основным элементом дерева является задача.*

Определение 2. *Задача — кибернетическая структура, способная выполняться (имеет явно определенную в смысле программирования функцию $Kup()$) и возвращать код завершения выполнения (в простейшем случае 0 или 1, то есть успех или неудача). Каждая вершина является задачей. Задачи делятся на классы. Основными из них являются Условия, Действия и Композиты [2].*

Определение 3. *Условия — изменяют состояние среды.*

Определение 4. *Действия — проверяют некоторое свойство среды.*

Определение 5. *Композиты — агрегируют результаты выполнения задач-сыновок по определенным правилам.*

В зависимости от правил функционирования выделяют несколько подклассов Композитов. Рассмотрим основные — Селектор и Последовательность. Каждый из них по очереди выполняет поддеревья задач-сыновок. Когда выполнение дерева окончено и получен код завершения, Композит решает начать ли выполнение следующего поддерева или закончить с текущим кодом.

Определение 6. *Селектор — завершается с успешным кодом возврата как только один из сыновок завершается успешно. Пока сыновок завершается неуспешно, продолжает работу. Если все сыновок пройдены с неуспешным кодом возврата, Селектор возвращает код *failure*.*

Определение 7. *Последовательность — завершает выполнение с кодом возврата `failure` как только один из сыновей завершается неуспешно. До тех пор, пока сыновья завершаются успешно, продолжает работу. Если все сыновья пройдены с успешным кодом возврата, Последовательность возвращает код `success`.*

Считается, что SPACE-сложность и TIME-сложность выполнения Действий и Условий $O(1)$. Тогда SPACE-сложность поведенческого дерева $O(n)$, TIME-сложность $O(\log n)$, где n — число вершин в дереве.

2. СИНТЕЗ ПОВЕДЕНЧЕСКИХ ДЕРЕВЬЕВ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Так как наиболее часто генетические алгоритмы работают с хромосомами фиксированной длины, то предлагается использовать сбалансированные деревья с закрепленной глубиной и фиксированным максимально возможным количеством листьев.

Ключевым моментом для кодирования поведенческих деревьев является создание таблицы, где первая строка — это перечисление всех возможных узлов дерева (корень, Селекторы, Последовательности, Условия, Действия), во второй строке записывается соответствующий двоичный код. Предусмотреть в таблице наличие «заглушек» — фиктивных строчек, существующих лишь для дополнения дерева до сбалансированного. Так задается описание языка предметной области.

Дерево кодируется в хромосому таким образом: в процессе обхода дерева в глубину строится строка записей посещенных вершин; далее эта строка с помощью таблицы языка предметной области переписывается в двоичном виде. Полученную запись будем считать хромосомой. Хромосома декодируется в дерево в обратном порядке.

Рассматривается простейший вариант генетического алгоритма, при котором начальная популяция генерируется случайным образом:

- (1) Задать целевую функцию приспособленности для особей популяции.
- (2) Создать начальную популяцию.
- (3) Проверить хромосомы на наличие «запрещенных генов» (не входящих в язык предметной области). Удалить такие хромосомы.
- (4) Начало цикла:
 - (a) Размножение (скрещивание) хромосом.
 - (b) Мутирование.

- (с) Проверить хромосомы на наличие «запрещенных генов» (не входящих в язык предметной области). Удалить такие хромосомы.
- (d) Вычисление значений функции приспособленности для всех особей популяции.
- (е) Селекция (формирование нового поколения).
- (f) Если выполняются условия останова, то конец цикла. Иначе начало цикла.

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОВЕДЕНЧЕСКИЕ ДЕРЕВЬЯ

Определение 8. Будем считать дерево оптимальным, если оно доставляет максимум функционалу качества $Q(BT)$.

Замечание 1. Функционал качества $Q(BT)$ очень сильно зависит от закладываемого смысла.

Пример 1. При создании поведенческого дерева для робота-сапера значением функционала может являться количество успешно обезвреженных мин в единицу времени.

Пример 2. При создании агента с условной характеристикой «достаточно спокойный» функционалом качества может быть процент Действий (в итоговом дереве) из класса «реагировать спокойно».

Предлагается отождествить $Q(BT)$ с функцией приспособленности генетического алгоритма. Возникают следующие задачи:

- (1) Генерирование оптимальных поведенческих деревьев в соответствии с заданным функционалом качества. В данном случае проверка эффективности деревьев осуществляется аналитически.
- (2) Подбор оптимального функционала качества путем привлечения экспертной оценки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулированы основные положения теории поведенческих деревьев. Описан подход, заключающийся в использовании генетических алгоритмов для генерации поведенческих деревьев. Рассмотрены основные проблемы синтеза оптимальных деревьев. Указаны основные направления работы для решения задачи оптимизации поведенческих деревьев. Планируется дальнейшая работа в направлении исследования функционалов качества для описанной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *A. J. Champandard* Behavior Trees for Next-Gen Game AI // <http://aigamedev.com/insider/presentations/behavior-trees/> .
- [2] *I. Millington, Funge J.* Artificial Intelligence for Games // Morgan Kaufmann.: 2nd edition, 2009. – С.334-371.
- [3] *N. J. Nilsson* Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence // McGraw-Hill.: 1977. – С.80-156.

Автоматический выбор регрессионной модели на основе символьной регрессии

Куртнебиев Э. Д.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Проблема выбора параметрической регрессионной модели была и остается одной из самых актуальных проблем в области распознавания образов. Количество данных, требующих статистического анализа, возрастает каждый год. Проблема автоматического выбора модели имеет долгую историю, в результате которой было разработано множество различных подходов решения рассматриваемой задачи: символьная регрессия, метод группового учета аргументов, шаговая и гребневая регрессия и т.д. [1].

Построим автоматическую систему выбора модели на основе одного из выше указанных алгоритмов. Одним из самых интересных является алгоритм символьной регрессии. Символьная регрессия основывается на генетических алгоритмах. Это направление возникло сравнительно недавно и развитие его может дать хорошие результаты [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задана выборка X^ℓ — множество пар (x, y) объект-ответ, где $x \in \mathbb{R}^k$ — вектор независимых переменных и $y \in \mathbb{R}$ — зависимая переменная. Также зададим множество гладких параметрических функций $G = \{f_1, \dots, f_n | f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}\}$. Требуется найти наилучшую модель f , порождаемая суперпозицией функций f_i , доставляющая минимум функционалу качества.

2. СИМВОЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ

Как отмечалось ранее символьная регрессия построена на генетических алгоритмах, поэтому она имеет четыре основных шага: генерация первоначальных моделей, объединение моделей, случайное изменение случайно выбранной модели, отбор наилучших моделей.

Рассмотрим алгоритм более подробно. Начнем с первого шага генерации первоначальных моделей. Одним из возможных вариантов выбора может быть простой набор моделей из множества G . Основная задача генерации первоначальных моделей — это набор моделей достаточно сильно различающихся между собой. Приведем пример: $a * x + b$, $a * \ln(x)$, $a * x^2 + b$ и т.д.

Следующий этап очень важен для скорости сходимости символьной регрессии. Выбор правила объединения сильно влияет на конечный результат, и это трудоемкий процесс, т.к. нет определенных ограничений и шаблонов для выбора того или иного правила, а так же мы не можем определить качество выбранного правила. Несмотря на это есть предпочтения и рекомендации по выбору правил объединения. Самым простым методом является разделение моделей на слагаемые и дальнейший случайный набор слагаемых обратно в сумму. Можно модифицировать предыдущий случай, увеличив вероятность выбора слагаемого той модели, у которой функционал качества меньше [3]. Пример: Допустим мы имеем две модели $a * x^2 + b * x + c$ и $a * \ln(x) + b * \sqrt{x} + c * \sin(x)$. В результате объединения получим $a * x^2 + b * \sqrt{x} + c * \sin(x)$ или $a * \ln(x) + b * \sqrt{x} + c$ и т.д.

Третий шаг очень интересен и важен для нахождения наилучших моделей. На данном этапе производится случайное изменение одной из модели. Это можно объяснить тем что любая функция имеет локальный и глобальный минимум, и часто они не совпадают; алгоритм может "застрять" в локальном минимуме и не дать хорошего результата, случайное изменение модели может соответствовать добавлению большого числа к решению на данном этапе. Рассматриваемый шаг позволяет увеличить вероятность нахождения глобального минимума. В рассматриваемых нами случаях этот этап может соответствовать подстановке одной функции в другую либо увеличению количества слагаемых на единицу. Последний случай соответствует модификации генетических алгоритмов называемый генетическим программированием. Вернемся к первым примерам сгенерированных моделей и рассмотрим третий шаг. Допустим наш выбор дал функцию $a * x^2 + b$. В результате случайного изменения получается: $a * \sin(x)^2 + b$ или $a * x^2 + b + c * x$.

Последним этапом задается цель поставленной задачи. Возможна и другая интерпретация шага, например, задание правил сравнения моделей. На этом шаге дается оценка качества моделей, т.е. насколько хороши полученные модели. Функция, дающая оценку качества модели называется фитнес функцией F . Самое простое правило, которое можно задать — это оценка критерия суммы квадратов регрессионных остатков.

$$F = SSE = \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*)^2, \quad (1)$$

где y_i — результаты полученные из модели, y_i^* — результаты взятые из выборки. Этот метод достаточно примитивен и допускает переобучение символьной регрессии, т.е. в результате работы алгоритма могут получаться сложные модели. Для устранения проблемы вводится штрафная функция F_p сложности модели [4]. Она будет оценивать сложность модели и чем сложнее модель, тем большее значение будет иметь функция. Наилучшей моделью называется модель, имеющая наименьшую фитнес функцию. Таким образом фитнес функция имеет вид.

$$F = SSE + F_p \quad (2)$$

После выбора моделей необходимо вернуться ко второму шагу объединения моделей. Алгоритм символьной регрессии останавливается после достижения фитнес функцией заданного минимума или после заданного количества шагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *В.В.Стрижов, Е.А.Крымова* Методы выбора регрессионных моделей Москва,2010.
- [2] *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. Springer, 2001.
- [3] *К. В. Воронцов* Лекции по методам оценивания и выбора моделей. Москва,2010.
- [4] *Malada H.R., Ivakhnenko A.G.* Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. CRC Press, 1994.

Обучение с подкреплением в играх-стратегиях в реальном времени

Пеек А. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

ВВЕДЕНИЕ

RTS (Real-Time Strategy – стратегия в реальном времени) — это жанр компьютерных игр, позволяющий игрокам действовать против виртуальных оппонентов в реальном времени. Производятся сбор ресурсов, постройка военной базы, подготовка войск, и, наконец, захватнические бои. Столь популярный жанр как нельзя лучше подходит для проб алгоритмов машинного обучения, в частности, алгоритмов обучения с подкреплением. Однако, ряд ограничений, присущих обучению с подкреплением, заставляет создавать некоторые усовершенствования, о которых пойдет речь в этой статье.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обучение с подкреплением осуществляется в рамках марковского процесса принятия решений (MDP — Markov Decision Process). Данная модель описана в [1] и здесь лишь остановимся на ее задании. Задается MDP с помощью следующих элементов:

- Множество состояний агента S ;
- Множество действий агента A ;
- Вероятности переходов T ; $T(s, a, s')$ — вероятность перехода из состояния s в состояние s' при осуществлении действия a ;
- Функция вознаграждений $R : S \rightarrow R$;
- Начальное состояние s^0 , конечное состояние s^* .

Задача в MDP — поиск полной оптимальной стратегии $\pi^*(s)$ — набора действий (следование из состояния s^0 в конечное состояние s^*), максимизирующего получаемые вознаграждения.

Методы обучения с подкреплением нацелены на поиск оптимальной стратегии с учетом того, что агенту неизвестны вероятности T и функции вознаграждения (их значения он получает по мере действия в среде). О различных типах и алгоритмах обучения с подкреплением можно найти информацию в [1].

Как один из наиболее быстро сходящихся алгоритмов рассмотрим Q-обучение. Он базируется на поиске функций $Q(s, a)$ — возвращающих «вес» действия в каждом конкретном состоянии. Ниже приведен псевдокод этого алгоритма:

1. Для всех s in S и a in A инициализировать $Q(s, a)$ случайными значениями;
2. for each episode:
3. Инициализировать s ;

4. for each step in episode, $s \neq s^*$;
5. Выбрать действие a для состояния s , пользуясь стратегией P_i ;
6. Выполнить действие a , сохранить вознаграждение r и следующее состояние s' ;
7. $Q(s, a) = Q(s, a) + \alpha \cdot (r + \gamma \cdot \text{MAX}(Q(s', a')) - Q(s, a))$;
8. $s = s'$.

Насколько можно видеть, алгоритм Q-обучения производит итеративную модификацию таблицы Q-значений агента. Здесь используется $\text{MAX}(Q(s', a'))$ - поиск наибольшего Q-значения по всем действиям a' из состояния s' . В этом алгоритме α - параметр скорости обучения, а γ - фактор обесценивания (необходим для придания ближайшим состояниям большего веса).

В [3] показывается, что Q-обучение сходится к оптимальной стратегии быстрее некоторых других методов благодаря «жадной» природе алгоритма (в качестве оптимальных действий на каждом шаге выбираются те, которые имеют наибольший «вес»), в отличие от тех, которые предлагают поиск для возможных долгосрочных улучшений. Однако, в условиях компьютерной игры, где ценится время, выделенное работе алгоритма, выигрышным вариантом выступает именно Q-обучение, так как оно выполняется за меньшее время.

2. АРХИТЕКТУРА

Рассмотрим «классическую» игру RTS, в некотором упрощении. Пусть существуют две противоборствующие армии (игрока и компьютера). У каждого в распоряжении есть здание-штаб и возможность постройки зданий-фабрик для военных юнитов. Существует добыча ресурсов, которая осуществляется специальным юнитом - «комбайном», доставляющим их в перерабатывающие заводы. В распоряжении имеется три типа юнитов: «джип» (небольшая атакующая способность, большая разведывательная способность), «танк» (небольшая разведывательная способность, большая атакующая способность) и «пушка» (медлительное орудие для обороны). Действие происходит на квадратной карте. Задача каждого оппонента — разбить здание-штаб противника.

Теперь необходимо решить, на каком уровне было бы оптимальным применять обучение с подкреплением: на стратегическом командном уровне или же на тактическом уровне отдельных юнитов. Попробуем выяснить, чем эти два уровня отличаются друг от друга и какие есть плюсы и минусы.

- (1) Командный уровень означает, что в ходе обучения будет изменяться общая для всех юнитов стратегия. Например, если есть некая группа, атакующая военную базу противника, то юниты, обладая общей стратегией, не смогут действовать уникально. Для игрока это будет выглядеть довольно единообразно. К тому же, возникает вопрос о чрезмерной «перегруженности» алгоритма, т. к. необходимо непрерывно собирать данные с каждого конкретного юнита и обновлять стратегию.
- (2) Если же на передний план вынесено обучение каждого конкретного юнита, то возникает следующий вопрос: как будет вести себя искусственный интеллект в случае, если юнит будет уничтожен? Будет ли «передача» знаний другим действующим лицам или же этот опыт будет утерян. То есть возникает вопрос о синхронизации.

Рациональное решение заключается в комбинировании первого и второго варианта, а именно, в создании многослойной архитектуры задачи. В нашем случае это будет два слоя: первый — состоящий из общей стратегии, и второй — некоторое число конкретных стратегий, которые будут передаваться юнитам.

В архитектуру включается профилировщик, главная задача которого — определять по данным, собранным юнитами, текущее состояние игры. В нашем случае это будет отображение текущего состояния игрока — атакующий, защищающийся и развивающийся. Идентифицироваться состояние игры будет с помощью наивной байесовской модели [2]. Как только производится идентификация типа игрока, верхнему уровню архитектуры передается соответствующая функция вознаграждения. После этого верхний уровень обучается и генерирует общую стратегию, которая передает управление одному из элементу нижнего уровня.

Главная задача архитектуры — сократить число состояний игры за счет декомпозиции «низкоуровневых» стратегий. Также основное преимущество данного подхода — реализация любого метода обучения с подкреплением в качестве элемента верхнего либо нижнего уровня.

3. ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Помимо вышеизложенного подхода, в котором обучение с подкреплением применяется для ведения боев и руководства юнитами, существует вариант его использования для задания экономической стратегии. В частности, для

управления ресурсами, командами построек зданий, найма юнитов и покупкой улучшений («апгрейдов»). В этом случае архитектура состоит из трех параллельных процессов обучения, связанных соответственно с постройками зданий, покупкой юнитов и покупкой улучшений. Над этими блоками расположен управляющий модуль, который решает (также исходя из стратегии, полученной методом обучения с подкреплением), какой блок из трех будет выполняться следующим (т.е. какое из трех экономически и стратегически важное действие выполнять). Данный подход также предоставляет возможность реализовать гибкую стратегии и обеспечивает улучшаемую со временем «адаптацию» искусственного интеллекта к игроку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, за счет декомпозиции на уровни и использования наиболее эффективного метода обучения с подкреплением можно добиться наиболее приемлемого результата в компьютерных играх, где критически важно время выполнения алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Russell S., Norvig P.* Artificial Intelligence: A Modern Approach, 2nd edition. – Prentice Hall, 2002. – 1132 p.
- [2] *Geiger, D., M. Goldszmidt, G. Provan, P. Langley, and P. Smyth.* Bayesian network classifiers in Machine Learning. – 1997.
- [3] *Richard S. Sutton, Andrew G. Barto.* Reinforcement Learning: An Introduction (Adaptive Computation and Machine Learning). – The MIT Press, 1998. – 322 p.

Полнота семейства импликаций, порождаемых незамкнутыми ключевыми подмножествами

Предеин Д. Д.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Пусть M - конечное множество, $V = P(M)$ - семейство всех подмножеств множества M , (V, \subseteq) - конечная решётка, отношение порядка в которой определяется отношением включения \subseteq , $\gamma : V \rightarrow V$ - оператор замыкания [1], определённый на решётке V .

Определение 1. Элемент $a \in V$ называется замкнутым, если $\gamma(a) = a$.

Оператор замыкания γ порождает на элементах решётки V отношение эквивалентности [2]. Это отношение определяется следующим образом.

Определение 2. *Элементы $a, b \in V$ эквивалентны, если их замыкания совпадают.*

Каждый класс эквивалентности, вместе с унаследованным от решётки (V, \subseteq) отношением порядка, является упорядоченным множеством. В таком упорядоченном множестве, в силу свойств оператора замыкания, максимальный элемент - единственный. Минимальных элементов может быть несколько. Минимальные элементы класса называются ключевыми элементами [2].

K - обозначение множества всех ключевых элементов решётки (V, \subseteq) .

Определение 3. *Пусть $x, y \in V$. Элемент $a \in V$ является моделью импликации $x \rightarrow y$ (обозначение $a \models x \rightarrow y$) в решётке (V, \subseteq) , если $x \not\subseteq a$ или $y \subseteq a$ [2]:*

$$a \models x \rightarrow y \Leftrightarrow x \not\subseteq a \vee y \subseteq a$$

Определение 4. *Пусть $a \in V$, $J = \{x \rightarrow y\}$ - некоторое семейство импликаций. Подмножество a является моделью семейства J , если a является моделью каждой отдельной импликации семейства J [2]:*

$$a \models J \Leftrightarrow a \models x \rightarrow y, \forall x \rightarrow y \in J$$

Обозначим B_J семейство всех моделей, порождаемых семейством импликаций J :

$$B_J = \{a \in V \mid a \models J\}$$

Утверждение 1. B_J - \cap -замкнутое (замкнутое по пересечению) семейство J [2].

Так как B_J - \cap -замкнутое семейство решётки V , то B_J порождает оператор замыкания на решётке V [1], [2]:

$$\gamma_J \equiv \gamma_{B_J} : V \rightarrow V, \quad a \rightarrow \bigcap \{b \in B_J \mid a \subseteq b\}$$

Определение 5. *Импликация $x \rightarrow y$ в решётке V следует (семантически) из семейства импликаций J , если каждая модель семейства J , так же является моделью импликации $x \rightarrow y$ [2], то есть, выполняется включение*

$$B_J \subseteq B_{\{x \rightarrow y\}}$$

J^+ - обозначение семейства всех импликаций, которые семантически следуют из семейства J (J^+ - семантическое замыкание семейства J).

Утверждение 2. [2]. $J \subseteq J^+$.

Утверждение 3. [2]. $B_{J^+} = B_J$.

Определение 6. Семейство импликаций J называется замкнутым, если $J^+ = J$.

Пусть $\gamma : V \rightarrow V$ - оператор замыкания, определённый на решётке $\langle V, \subseteq \rangle$. Семейство всех импликаций, порождаемых оператором γ [2], обозначим J_γ :

$$J_\gamma = \{x \rightarrow y \mid y \subseteq \gamma(x)\}$$

Утверждение 4. $(J_\gamma)^+ = J_\gamma$, то есть семейство J_γ - замкнуто [2].

Пусть J - некоторое семейство импликаций в конечной решётке V . Тогда [2]

$$J^+ = \{x \rightarrow y \mid y \subseteq \gamma_J(x)\}$$

Определение 7. Пусть $\gamma : V \rightarrow V$ - оператор замыкания, определённый на решётке $\langle V, \subseteq \rangle$. Семейство импликаций J называется полным, если $J^+ = J_\gamma$.

Теорема 1. Пусть $\gamma : V \rightarrow V$ - оператор замыкания. Тогда семейство импликаций $J = \{k \rightarrow \gamma(k) \mid k \in K \text{ and } \gamma(k) \neq k\}$ является полным.

Доказательство. Чтобы показать, что J является полным семейством, требуется показать, что $J^+ = J_\gamma$.

Необходимость. Покажем, что $J^+ \subseteq J_\gamma$.

$J \subseteq J_\gamma$ - по определению J и J_γ .

Из этого отношения, в силу монотонности семантического замыкания [2], следует, что $J^+ \subseteq (J_\gamma)^+$, и так как $(J_\gamma)^+ = J_\gamma$, то

$$J^+ \subseteq J_\gamma$$

Достаточность. Покажем, что $J_\gamma \subseteq J^+$.

Для этого достаточно показать, что $B_{J^+} \subseteq B_{J_\gamma}$. Так как $B_{J^+} = B_J$, то достаточно показать, что $B_J \subseteq B_{J_\gamma}$.

B_{J_γ} состоит из γ -замкнутых элементов. Покажем, что элементы семейства B_J - γ -замкнутые.

Пусть $a \in B_J$, то есть a - модель семейства J . Тогда a является моделью каждой отдельной импликации $k \rightarrow \gamma(k)$ этого семейства. Следовательно, для

элемента a на каждой импликации $k \rightarrow \gamma(k)$ выполняется, хотя бы одно из условий модельности:

$$k \not\subseteq a \vee \gamma(k) \subseteq a$$

Допустим, что элемент a - незамкнутый. Тогда, так как $a \subseteq \gamma(a)$ и $a \neq \gamma(a)$, то

$$a \subset \gamma(a) \tag{1}$$

Рассмотрим подмножество импликаций $\{k \rightarrow \gamma(k) \mid k \subset a\} \subseteq J$.

Так как $k \subset a$, то для импликаций этого подмножества не выполняется первое условие модельности $k \not\subseteq a$. Следовательно, выполняется условие

$$\gamma(k) \subseteq a \tag{2}$$

Совместное использование неравенств (1) и (2), порождает неравенство

$$\gamma(k) \subset \gamma(a) \tag{3}$$

Неравенство (3) показывает, что для любого незамкнутого ключевого элемента, строго предшествующего элементу a , замыкание такого ключевого элемента строго предшествует замыканию элемента a . Следовательно, элемент a является ключевым элементом [3] и, так как $a \neq \gamma(a)$, то импликация $a \rightarrow \gamma(a) \in J$.

Элемент a - модель семейства J и $a \rightarrow \gamma(a) \in J$. Следовательно, a - модель импликации $a \rightarrow \gamma(a)$. Поэтому, для элемента a на импликации $a \rightarrow \gamma(a)$ выполняется, хотя бы одно из условий:

$$a \not\subseteq a \vee \gamma(a) \subseteq a$$

Очевидно, что первое из этих условий не выполняется, и, следовательно, выполняется условие

$$\gamma(a) \subseteq a \tag{4}$$

Кроме этого, свойство расширяемости оператора замыкания [1] утверждает, что

$$a \subseteq \gamma(a) \tag{5}$$

Совместное использование неравенств (4) и (5), порождает равенство

$$\gamma(a) = a,$$

что противоречит допущению $a \neq \gamma(a)$.
 Следовательно, элемент a является замкнутым.
 Следовательно, $B_J \subseteq B_{J_\gamma}$.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Биркгоф Г. *Теория решёток*. – М.: Наука, – 1984. – С. 568.
- [2] Ganter, B., Wille, R. *Formal Concept Analysis - Mathematical Foundations*. – Springer-Verlag, Berlin. – 1999.
- [3] Ильченко А.В. *Ключевые антицепи решётки описаний интервалов признакового пространства*. – Таврический вестник информатики и математики. – 2008. – №1. – С. 211-222.

Реализация задачи подбора материалов в приложениях для проектирования силовых конструкций

Рифатов Р.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
 ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
 КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

В приложениях, связанных с проектированием силовых конструкций, требуется задавать свойства используемых материалов. В данной работе рассматривается задача подбора материалов, наиболее близко соответствующих желаемым характеристикам. Из характеристик материала минимально необходимыми являются плотность (удельный вес) и модуль упругости (модуль Юнга). Модуль упругости задаёт угол наклона графика "напряжение-деформация" в случае использования простейшей линейно-упругой модели материала (штриховые линии на рисунке). Однако, при достаточно большой нагрузке реальное поведение материалов является нелинейным, и диаграмма "напряжение-деформация" существенно отличается от прямой линии. [1]

Обычно ее аппроксимируют ломаной, состоящей из двух участков (линейно-упругого и пластического). Поэтому для хранения данных, помимо плотности и модуля упругости следует хранить ещё три величины: деформацию, соответствующую пределу пропорциональности (границе этих участков), а также деформацию и напряжение, соответствующие пределу прочности (конечной точке второго участка). При использовании языка C++ эти данные соответствуют полям структуры следующего вида:

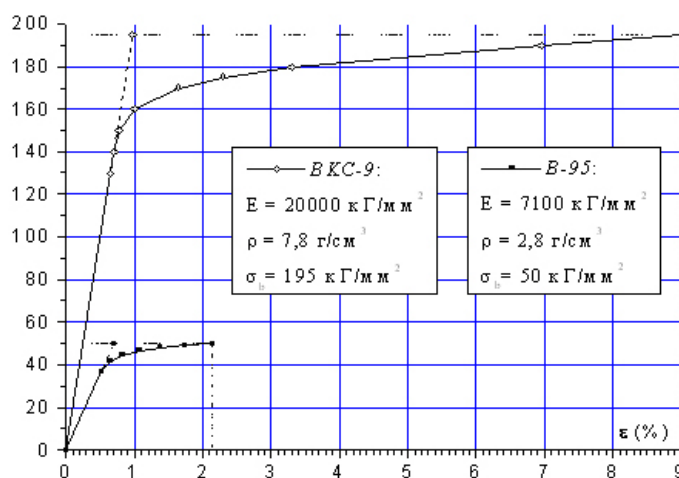


Рис. 1. Диаграмма "напряжение-деформация"

```

struct Material
{
string name; float Rho, E, EpsProp, EpsLim, SigLim;
Material(const char* n, float rh, float ep, float el, float sl): name(n), Rho(rh),
EpsProp(ep), EpsLim(el), SigLim(sl){}
};

```

Близость материала к заданному можно характеризовать при помощи суммы квадратов отклонений выбранных параметров. Например, если в качестве сравниваемых параметров взять плотность, предел пропорциональности и предел прочности, то соответствующий предикат будет иметь вид:

```

struct nearer
{
const Material &matl; //ссылка на заданный материал
nearer(const Material &m): matl(m) {}
float distance2(const Material &m) //квадрат "расстояния" от m до заданного материала
{
return (m.EpsProp-matl.EpsProp)*(m.EpsProp-matl.EpsProp) //квадрат расс-я между пределами пропор-ти
+ (m.EpsLim-matl.EpsLim)*(m.EpsLim-matl.EpsLim) //квадрат расс-я между пределами прочности
}
};

```

```

+ (m.Rho-matl.Rho)*(m.Rho-matl.Rho); //квадрат разности плотностей
}
bool operator()(const Material &m1, const Material &m2) //собственно сам
предикат
return distance2(m1) < distance2(m2); };

```

Для эффективного поиска удобно использовать стандартную библиотеку шаблонов. Соответствующий программный код имеет вид:

```

Material newmatl("unknown 1e-2f,1e-2f,1e-1f,1.6e4f,2e4f); //произвольно
заданный материал
vector<Material> matls_database; // БД по существующим материалам

```

Помещаем в нее 2 мат-ла:

```

matls_database.push_back(Material("steel VKS-9 7.8e-3f,8e-3f,9e-
2f,1.6e4f,1.87e4f));
matls_database.push_back(Material("dural V-95 2.8e-3f,7e-3f,2.2e-2f,4e3f,4.5e3f));
//поиск в БД материала, ближайшего к заданному:
vector<Material>::const_iterator pNearest = min_element(matls_database.begin(),matls_database.end(
nearer(newmatl));
//результат поиска:
cout << pNearest->name << endl; [2]

```

В случае создания Web-приложения средствами языка Java, аналогичный программный код будет иметь следующий вид:

```

import java.util.*;
class Material
{
String Name; float Rho, E, EpsProp, EpsLim, SigLim;
public Material(String name, float rho, float e, float epsProp, float epsLim, float
sigLim)
{
Name=name; Rho=rho; E=e; EpsProp=epsProp; EpsLim=epsLim; SigLim=sigLim;
}
}

```

Функции сравнения материалов: class nearer implements
Comparator<Material>
{
Material matl; //ссылка на заданный материал
public nearer(Material m) matl=m;

```

float distance2(Material m)
{return (m.EpsProp-matl.EpsProp)*(m.EpsProp-matl.EpsProp)
+ (m.EpsLim-matl.EpsLim)*(m.EpsLim-matl.EpsLim)
+ (m.Rho-matl.Rho)*(m.Rho-matl.Rho);
}
public int compare(Material m1, Material m2)
{float difference = distance2(m1) - distance2(m2);
if (difference < 0.0f) return -1; else if (difference > 0.0f) return 1; else return 0;
}
}

```

Реализация поиска:

```

Material newmatl = new Material("unknown 1e-2f,1e-2f,1e-1f,1.6e4f,2e4f);
//произвольно заданный материал
Vector<Material> matls_database = new Vector<Material>(); //БД по существующим материалам
matls_database.add(new Material("steel VKS-9 7.8e-3f,8e-3f,9e-2f,1.6e4f,1.87e4f));
matls_database.add(new Material("dural V-95 2.8e-3f,7e-3f,2.2e-2f,4e3f,4.5e3f));
Material Nearest = Collections.min(matls_database,new nearer(newmatl));
System.out.println(Nearest.Name); [3]

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. – М. МГТУ, – 1999.
- [2] Мюссер Д. Р. *C++ и STL: справочное руководство / 2-е издание*. – М.: Вильямс, – 2010.
- [3] Флэнаган Д. *Java. Справочник, 4-е издание*. – М.: Символ-Плюс, – 2004.

Архитектура решающей системы задач классификации на основе байесовского классификатора

Филиппович А. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

В настоящее время задачи классификации являются одними из наиболее распространенных. Они встречаются в анализе данных, распознавании образов и других областях. Семейство методов обучения, основанных на оценках

плотностей распределения значений признаков, называется байесовским классификатором. То есть одним из основных его предположений есть вероятностная природа данных. Данный классификатор построен на основе оптимального решающего байесовского правила [1]:

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y P_y p_y(x) \quad (1)$$

где $P_y = P(y)$ – априорная вероятность, $p_y(x) = P(x|y)$ – функция правдоподобия, λ_y – величина потери.

Оптимальным оно является, если известны плотности распределения классов, что на практике редко выполнимо. Поэтому ставится задача восстановления плотности распределения. Существует три подхода восстановления плотностей: параметрический, непараметрический и разделение смеси вероятностных распределений. Параметрический подход применяется, если плотности известны с точностью до параметра. К нему относятся такие методы обучения, как квадратичный дискриминант и линейный дискриминант Фишера. Когда невозможно задать функцию плотности, используя только одно параметрическое распределение, предполагается, что ее можно описать с помощью смеси некоторых распределений. Такой подход реализуется методом радиальных базисных функций. Иначе плотности оцениваются локально в каждой точке пространства. Такой подход называется непараметрическим и включает в себя метод парзеновского окна.

Наивный байесовский классификатор является довольно простым в реализации и эффективным. Его можно использовать при малом количестве входных данных. Еще одним преимуществом является скорости обучения. Однако его главное предположение о независимости признаков не всегда выполняется в реальных условиях. Не смотря на это, наивный байесовский классификатор даже в таких случаях дает неплохой результат. Он применим в задачах с очень большим числом признаков. В настоящее время его широко используют в разных областях: от классификации текстов до медицинской диагностики, а также для сравнения эффективности других методов обучения [3]. Модель алгоритма:

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \left(\ln \frac{\lambda_y l_y}{l} + \sum_{i=1}^n \ln \hat{p}_{yi}(x_i) \right) \quad (2)$$

В методе парзеновского окна плотность в точке зависит от объектов выборки, находящихся в некоторой окрестности этой точки. Такая окрестность

называется шириной окна, и подбирается с помощью скользящего контроля.

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y \sum_{i=1}^l [y_i = y] \mathcal{K}\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h(x)}\right) \quad (3)$$

Для метода квадратичного дискриминанта требуются выполнения условий: нормальное распределение классов и линейно не зависимые признаки. Ковариационная матрица должна быть симметричной, невырожденной и положительно определенной. Если она близка к вырожденной, то производится регуляризация, то есть вместо $\widehat{\Sigma}$ обращается $(\widehat{\Sigma} + \tau I_n)$, где параметр τ находится с помощью скользящего контроля.

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \left(\ln \lambda_y P_y - \frac{1}{2} (x - \hat{\mu}_y)^T \widehat{\Sigma}^{-1} (x - \hat{\mu}_y) - \frac{1}{2} \ln |\widehat{\Sigma}_y| \right) \quad (4)$$

$$\text{где } \hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \text{ и } \widehat{\Sigma} = \frac{1}{m-|Y|} \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$$

Линейный дискриминант Фишера требует выполнение двух гипотез: классы распределены по нормальному закону и матрицы ковариаций классов равны.

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \left(\ln(\lambda_y P_y) - \frac{1}{2} \hat{\mu}_y^T \widehat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y + x^T \widehat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}_y \right) \quad (5)$$

$$\text{где } \hat{\mu}_y = \frac{1}{l_y} \sum_{i=1}^l [y_i = y] x_i \text{ и } \widehat{\Sigma} = \frac{1}{l-|Y|} \sum_{i=1}^l (x_i - \hat{\mu}_{y_i})(x_i - \hat{\mu}_{y_i})^T$$

Данный метод используется, когда данных для обучения недостаточно и формы классов похожи. Сложность возникает, если некоторые объекты часто встречаются в обучающей выборке. Применение часто находят в экономической отрасли: маркетинговых исследованиях, управлении производством.

Смесь вероятностных распределений – это распределение, в котором каждый объект подчиняется одному из нескольких распределений. А функция плотности смеси равна сумме плотностей распределений, входящих в нее [2]. Метод радиальных базисных функций основан на предположении, что компоненты смеси гауссовские. Лучшим алгоритмом разделения смеси распределения является EM-алгоритм. С помощью него вычисляется количество компонент смеси распределения и их параметры для каждого класса [1].

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y P_y \sum_{i=1}^{k_y} \omega_{yi} \mathcal{N}_{yi} \exp\left(-\frac{1}{2} \rho_{yi}^2(x, \mu_{yi})\right) \quad (6)$$

$$\text{где } \mathcal{N}_{yi} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_{yi_1}, \dots, \sigma_{yi_n})^{-1}$$

Ниже приведена схема выбора метода восстановления плотности распределения.

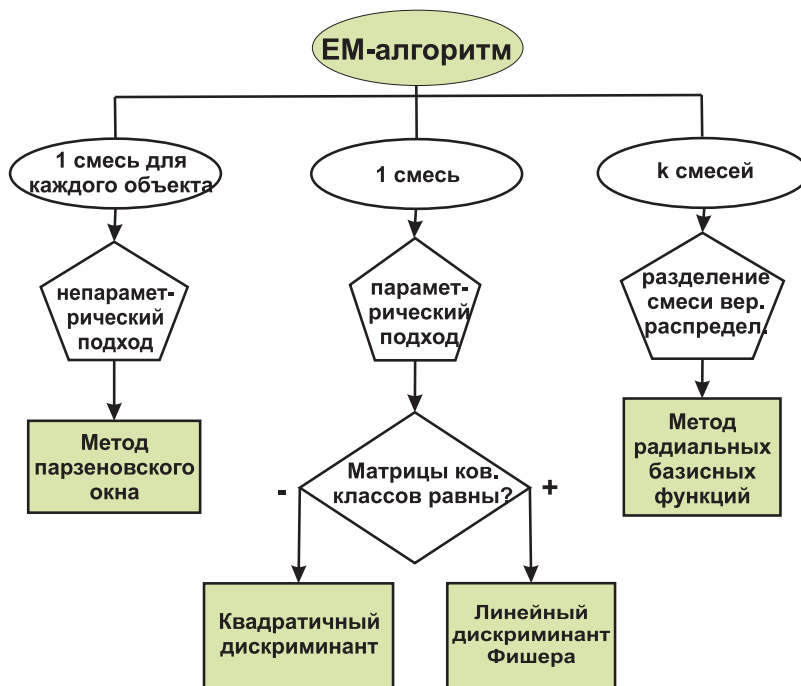


Рис. 1. Выбор метода восстановления плотности распределения

Согласно схеме на рисунке (1), обучающая выборка, поступившая в байесовский классификатор, проходит EM-алгоритм. После чего становится известно, каким количеством смесей распределения можно описать функцию плотности. И в зависимости от этого выбирается подход восстановления плотности. Если стало известно, что функция задана с помощью одной смеси распределения, применяется параметрический подход, в котором происходит вычисление ковариационных матриц классов. В случае их равенства плотность восстанавливается методом линейного дискриминанта Фишера. Иначе используется квадратичный дискриминант. Если на выходе EM-алгоритма k смесей, плотности распределения считаются с помощью метода радиальных базисных функций. И наконец, когда оказывается, что для каждого объекта функция описывается только одним распределением, не обязательно одним и тем же,

плотности будут восстановлены согласно непараметрическому подходу, например методом парзеновского окна.

Для любой задачи классификации обычно невозможно сразу однозначно сказать, каким методом обучения необходимо воспользоваться. Поэтому из числа методов байесовского классификатора для анализа были выбраны наиболее эффективные и понятные. Пользуясь алгоритмом, представленным в виде схемы, легко выбрать оптимальный метод восстановления плотности распределения для конкретной задачи классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. В. Воронцов Лекции по статическим (байесовским) алгоритмам классификации // [<http://www.ccas.ru/voron/download/Bayes.pdf>]
- [2] А. Е. Лепский, А. Г. Броневич Математические методы распознавания образов: Курс лекций // Издательство ТТИ ЮФУ. Таганрог. 2009. – 155 с.
- [3] Статья «Байесовский классификатор» // [<http://alglib.sources.ru/dataanalysis/bayes.php>]

Разработка системы тематической классификации интернет-сайтов

Чакал Э.М.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Автоматическая классификация web-страниц является одной из областей информационного поиска, которая на сегодняшний день в связи с ростом объема информации стала весьма актуальной. Задача классификации состоит в том, чтобы на основе множества документов, вручную классифицированных по тематике, определить тематику большого числа неклассифицированных документов.

Все существующие методы автоматической классификации разбиваются на два класса: методы, основанные на знаниях («инженерный подход») и методы машинного обучения. В настоящее время, в связи с ростом возможностей компьютеров, наибольшей популярностью пользуется второй класс методов.

Разрабатываемая в рамках дипломной работы система классификации выглядит следующим образом:



Особенностью представления документов в сети Интернет является наличие на странице помимо содержательной части элементов форматирования и навигации, которые принято называть «информационным шумом». Часто эти элементы не имеют прямого отношения к теме страницы и поэтому могут отрицательно влиять на качество классификации. Поэтому целесообразно перед применением алгоритма классификации выделить из web-страницы содержательную часть и провести над ней некоторые преобразования: удаление лишних пробелов, удаление HTML-разметки, удаление стоп-слов и т.д.[4]. Для этого в предлагаемой системе используется парсинг страницы, который заключается в следующем: получение страницы, разбор содержимого и выделение нужных данных, сохранение и/или использование этих данных.

Так как методы машинного обучения рассчитаны на работу с числовыми данными, то на следующем этапе текст представляется в виде вектора признаков, предполагая, что документы, принадлежащие одной тематике, имеют близкие распределения относительных частот слов входящих в текст. Для этого используется Латентное Семантическое Индексирование (Latent Semantic Indexing или LSI)[5]. Основная идея латентно-семантического анализа заключается в том, что совокупность всех контекстов, в которых встречается и не встречается данное слово, задает множество обоюдных ограничений, которые позволяют определить схожесть смысловых значений слов и множеств слов между собой. Исходной информацией для LSA является матрица слов на документы, элементы которой содержат частоты использования каждого

слова в каждом документе. Используя разложение исходной матрицы по сингулярным значениям большая исходная матрица разлагается во множество из k ортогональных матриц, линейная комбинация которых является хорошим приближением исходной матрицы. Идея такого разложения заключается в том, что если использовать теорему о сингулярном разложении матриц, и в качестве исходной матрицы использовать матрицу слова-документы, то матрица, содержащая только k первых линейно независимых компонент исходной матрицы, отражает основную структуру ассоциативных зависимостей, присутствующих в исходной матрице, и в то же время не содержит шума[2]. Таким образом, каждое слово и документ представляются при помощи векторов в общем пространстве размерности k .

Заключительным этапом предложенной системы является построение классификатора на основе набора векторов признаков и соответствующих им меток целевых классов. Классификатор-это некоторый алгоритм, принимающий на вход вектор признаков и выдающий метку класса, к которому надо отнести данный вектор. В данной работе классификация осуществляется методом опорных векторов (Support Vector Machines). Метод опорных векторов –это метод классификации, который решает задачу путем построения гиперплоскостей в многомерном пространстве, разделяющих группы векторов, принадлежащих к разным классам[3]. На первом шаге исходные объекты преобразуются в пространстве признаков при помощи специального класса математических функций, называемых ядрами. Новый набор преобразованных объектов уже линейно делим. Таким образом, вместо построения сложной кривой требуется лишь провести оптимальную прямую, разделяющую объекты разных типов. Затем метод отыскивает объекты, находящиеся на границах между двумя классами, которые называются опорными векторами, и использует их для принятия решений о принадлежности к тому или иному классу новых объектов, предъявляемых для распознавания[1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Christopher J.C. Burges*. A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition.
- [2] *Edel Garcia*. LSI Keyword Research A Fast Track Tutorial.
- [3] *К.В. Воронцов*. Лекции по методу опорных векторов.
- [4] *М.В. Киселев*. Оптимизация процедуры автоматического пополнения веб-каталога. // «Интернет-математика 2005». – М.: ООО «Яндекс», 2005.
- [5] *А.Ю. Пастухов, П.В. Сердюков, Н.А. Козлова, С.А. Чернов*. Латентный семантический анализ: новые решения в Internet. // Информационные технологии, 2001, № 6.

Решающая система задач классификации на основе метрических алгоритмов классификации

Черненко А.В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Задача классификации представляет большой интерес во многих областях человеческой деятельности. Специалисты разных отраслей регулярно сталкиваются с задачей классификацией во многих прикладных задачах: задачи медицинской диагностики, предсказание месторождений полезных ископаемых, оценивание кредитоспособности заёмщиков, оптическое распознавание символов, распознавание речи, обнаружение спама, классификация документов. Для решения подобных проблем разработано множество моделей алгоритмов, среди которых выделяется *метрические методы классификации* [1]. Особенно удобно пользоваться этими методами в тех случаях, когда измерить степень сходства объектов проще, чем сформировать признаковые описания. Например, сравнивая две фотографии гораздо легче сказать, что на них один и тот же человек, чем понять, на основании каких признаков они похожи [1].

Представляется интересной задача построения решающей системы задач классификации на основе метрических алгоритмов классификации (далее МАК). Обучение и настройка этой системы будет проходить на наборе прецедентов – выборке X^ℓ . Каждый прецедент состоит из набора (x, y) , где $x \in X$ – объект и $y \in Y$ – метка класса, к которому относится этот объект. X – множество объектов, Y – множество меток классов. Объект представляет собой вектор x_1, \dots, x_n , где x_i – параметр, который характеризует данный объект. Далее, для наглядности, описание и принцип работы решающей системы будет описываться по схеме (рис.1).

Обучающая выборка X^ℓ передается в модуль анализа, где проходит тестирование на пригодность использования в МАК. Если выборка успешно прошла тест, то она передается в модуль, где множеству прецедентов назначается метрика. На начальном этапе будет использоваться только евклидова метрика, еще несколько широко используемых метрик: Хемминга, Минковского, и др. будут добавлены позже.

Следующий шаг - оценка качества алгоритма используя внешний функционал качества. Для этого управляющий модуль формирует 3 ввода. Количество вводов может варьироваться в зависимости от того, сколько моделей алгоритмов используется в решающей системе. В данной системе используется 3 алгоритма:

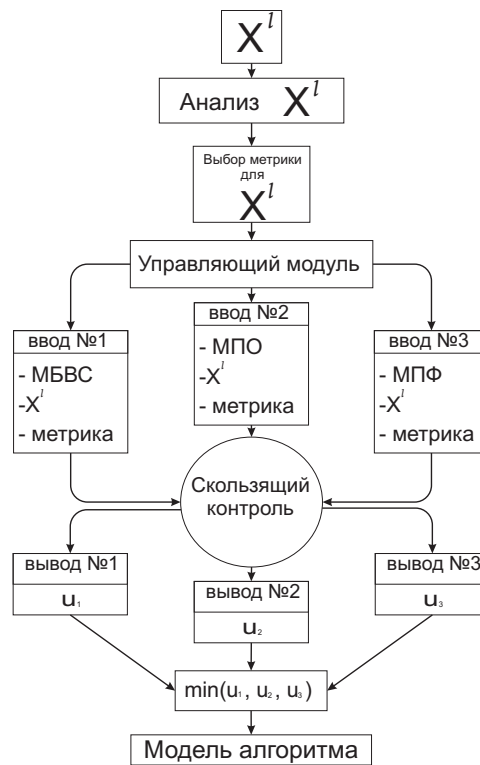


Рис. 1. Схема работы решающей системы на основе МАК

- *Метод ближайших взвешенных соседей* (МБВС) – это метрический алгоритм классификации, основанный на оценивании сходства объектов. Классифицируемый объект относится к тому классу, которому принадлежат ближайшие к нему объекты обучающей выборки.

$$a(u; X^l) = \arg \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^l [y_u^i = y] w(i, u), \quad (1)$$

где $w(i, u)$ – заданная весовая функция, которая оценивает степень важности i – го соседа для классификации объекта u .

- *Метод парзеновского окна* (МПО) отличается от *метода ближайших соседей* способом, с помощью которого задается вес соседей. Для этого необходимо ввести *функцию ядра* $K(z)$, невозрастающую на $[0, \infty]$. В

общем виде алгоритм выглядит так

$$a(u; X^\ell, h, K) = \arg \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^l [y_u^i = y] K \left(\frac{\rho(u, x_u^{(i)})}{h} \right), \quad (2)$$

где ρ – метрика, параметр h называется *шириной окна* и играет примерно ту же роль, что и число соседей. «Окно» – это сферическая окрестность объекта u радиуса h , при попадании в которую обучающего объекта x_i объект u «притягивается» к классу y_i .

- *Метод потенциальных функций* (МПФ) – модификация *парзеновского алгоритма*. Допустим, что теперь ядро помещается в каждый обучающий объект x_i и «притягивать» объект u к классу y_i , если он попадает в его окрестность радиуса h_i :

$$a(u; X^\ell, k, K) = \arg \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^l [y_u^i = y] K \left(\frac{\rho(u, x_u^{(i)})}{h_i} \right). \quad (3)$$

По сути, эта формула отличается от (2) только тем, что здесь ширина окна h_i зависит от обучающего объекта x_i , а не от классифицируемого объекта u [3].

Каждый ввод, содержащий в себе модель алгоритма, выборку и метрику, попадает на вход алгоритма скользящего контроля (СК). СК проводит контроль качества модели алгоритма по отдельному объекту обучающей выборки. Результатом работы модуля СК, по каждому вводу, является соответствующий вывод, который содержит оценку качества модели алгоритма, после выбирается алгоритм с лучшей оценкой.

Таким образом, из указанных алгоритмов система выбирает один, который с более высокой вероятностью будет классифицировать новые объекты, подобных тем, которые указаны в обучающей выборке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Загоруйко Н. Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. ISBN 5-86134-060-9.
- [2] *Воронцов К.В.* Математические методы обучения по прецедентам. МФТИ (2004), ВМиК МГУ (2007).
- [3] *Воронцов К.В.* Основные понятия и примеры прикладных задач. // MachineLearning.ru – Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. – 2010. – С. 2.
<http://www.machinelearning.ru/wiki/images/9/92/Voron-ML-Intro1.pdf>

Матричные Методы понижения размерности

Шуленко Д.В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Данная статья представляет собой попытку рассмотрения круга задач, в которых могут быть использованы матричные методы понижения размерности, актуальности применения этих методов, проблем, возникающих при рассмотрении задач больших размерностей.

I. Введение. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу обучения по прецедентам [2]: задано множество объектов X , множество допустимых ответов Y , и существует целевая функция (target function) $y^* : X \rightarrow Y$, значения которой $y_i = y^*(x_i)$ известны только на конечном подмножестве объектов $(x_1, \dots, x_l) \subset X$. Пары «объект – ответ» (x_i, y_i) называются *прецедентами*. Совокупность пар $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^l$ называется *обучающей выборкой* (training sample). Задача обучения по прецедентам заключается в том, чтобы построить алгоритм a , восстанавливающий целевую функцию y^* на всем множестве X .

Признак (feature) f объекта x – это результат измерения некоторой характеристики объекта. Формально признаком называется отображение $f : X \rightarrow D_f$, где D_f множество допустимых значений признака. Пусть имеется набор признаков f_1, \dots, f_n . Вектор $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ называют признаковым описанием объекта $x \in X$. В дальнейшем под объектом следует понимать его признаковое описание.

Пространство признаков – это система координат, каждое измерение которой образовано определенным признаком (атрибутом) объекта или наблюдения, а по осям откладываются значения признаков (атрибутов). Тогда каждый объект (наблюдение) могут быть представлены точкой в многомерном пространстве, положение которой будет определяться набором значений его признаков. Каждая такая точка называется *многомерным вектором* [3].

Понятие пространства признаков играет очень большую роль в аналитических методах, поскольку многие алгоритмы классификации и кластеризации оперируют именно координатами объектов и наблюдений в многомерном пространстве и расстояниями между ними. Например, степень схожести объектов, а следовательно и вероятность их принадлежности к одному классу, может быть определена на основе расстояния между их точками в пространстве признаков. Чем меньше расстояние между векторами признаков, тем более похожи друг на друга соответствующие объекты.

Понижением размерности пространства признаков является процесс уменьшения анализируемого множества данных до размера, *оптимального с точки зрения решаемой задачи и используемой аналитической модели.*

Понижение размерности является частью процедуры предварительной обработки данных для анализа. Необходимость проведения этой процедуры обусловлена тем, что первоначально неизвестно – какие признаки являются информативными, есть ли дублирующие признаки и каково количество шумов в данных? А так как, как правило, задачи классификации, кластеризации и интеллектуального анализа данных, в целом, являются очень трудоемкими (здесь речь идет о скорости вычислений и о возможности провести вычисления за разумное время в принципе), то предварительная обработка данных становится высокоприоритетной задачей [1].

Вопросы, связанные с понижением размерности пространства признаков, возникают при решении различных задач, примерами которых являются: приближение методом наименьших квадратов, биоинформатика, сжатие видео и изображений, подавление шумов в изображениях, хенометрика (раздел аналитической химии), психодиагностика, вычисление псевдообратных матриц, решение однородных линейных уравнений, интеллектуальный анализ данных (Data Mining), спектральный анализ данных (Spectral data analysis), кластеризация и классификация текстов (Text Mining), задачи прогнозирования, медицинской диагностики, оценивание кредитоспособности заемщиков, также понижение размерности находит свое применение в задачах статистики, в частности, в мультивариативной статистике.

Примерами матричных методов понижения размерности являются: метод главных компонент (Principal Component Analysis, PCA), сингулярное разложение (Singular Value Decomposition, SVD), факторизация неотрицательных матриц (Non-negative matrix factorization, NMF).

II. Метод главных компонент

Метод главных компонент – это один из способов понижения размерности, состоящий в переходе к новому ортогональному базису, оси которого ориентированы по направлениям максимальной дисперсии набора входных данных. Вдоль первой оси нового базиса дисперсия максимальна, вторая ось максимизирует дисперсию при условии ортогональности первой оси, и т.д., последняя ось имеет минимальную дисперсию из всех возможных. Такое преобразование позволяет понижать информацию путем отбрасывания координат, соответствующих направлениям с минимальной дисперсией. Предполагается, что если нам надо отказаться от одного из базисных векторов, то лучше, если

это будет тот вектор, вдоль которого набор входных данных меняется менее значительно [6].

Суть метода главных компонент – это существенное понижение размерности данных. Исходная матрица X заменяется двумя новыми матрицами T и P , размерность которых, A , меньше, чем число переменных (столбцов) J у исходной матрицы X

Вторая размерность – число образцов (строк) I сохраняется. Если декомпозиция выполнена правильно – размерность A выбрана верно, то матрица T несет в себе столько же информации, сколько ее было в начале, в матрице X . При этом матрица T меньше, и, стало быть, проще, чем X [5].

III. Сингулярное разложение

Сингулярным разложением матрицы A размером $m \times n$ называется её представление в виде $A = UWV^T$, где U – ортогональная матрица размером $m \times m$, V – ортогональная матрица размером $n \times n$, W – матрица размером $m \times n$, на главной диагонали которой находятся неотрицательные числа, расположенные в порядке убывания, а все внедиагональные элементы равны нулю [4].

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & U & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & w_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & w_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & V^T & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

С учетом свойств матрицы W , большей частью состоящей из нулей, для получения матрицы A требуется не M столбцов матрицы U , а лишь первые $\min(M, N)$ столбцов (в примере выше – три столбца), аналогично, лишь первые $\min(M, N)$ строк матрицы V^T влияют на результат произведения. Эти столбцы и строки называются левыми и правыми сингулярными векторами.

Сингулярное разложение обладает рядом полезных свойств, в частности, оно может использоваться: при решении недоопределенных или переопределенных систем линейных уравнений, при обращении и псевдообращении матриц, при вычислении числа обусловленности матрицы, при ортогонализации систем векторов и вычислении ортогональных дополнений к ним.

IV. Факторизация неотрицательных матриц

Факторизация неотрицательных матриц (Non-negative matrix factorization, NMF) – это группа алгоритмов в многомерном анализе данных и линейной алгебре, где происходит факторизация матрицы X в, как правило, две матрицы W и H : $nmf(X) \rightarrow WH$ [7].

Отличительной чертой NMF является следующее ограничение – факторы W и H должны быть неотрицательны, то есть все их элементы должны быть ≥ 0 . Фактически, NMF является усовершенствованным вариантом сингулярного разложения и создан именно для устранения слабых сторон SVD.

Основными областями применения NMF являются: кластеризация текстов, спектральный анализ данных и распознавание образов.

Заключение

Реальные задачи интеллектуального анализа данных являются чрезвычайно ресурсоемкими, это касается, в первую очередь, *временных и вычислительных ресурсов*. Для улучшения качества работы алгоритмов и уменьшения времени, затрачиваемого на непосредственный анализ данных, применяется *предварительная обработка данных*, но и она, в самом неудачном случае, будет носить переборный характер.

Таким образом, с развитием высокопараллельной (RISC) архитектуры, все более актуальными становятся вопросы разработки новых и оптимизации уже существующих подходов, алгоритмов, и интерфейсов (API) для использования их на многоядерных и многопроцессорных вычислительных устройствах, в частности, речь идет о современных графических процессорах (GPU). Использование высокопараллельных алгоритмов на GPU уже сейчас позволяет добиться значительных успехов в скорости предварительной обработки данных и анализа данных, и может выражаться в цифрах от 10 до 400 раз (в сравнении с x86-совместимыми процессорами суперскалярной архитектуры), в зависимости от характера и интенсивности вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Воронцов К.В.* Лекции по методам оценивания и выбора моделей. // MachineLearning.ru – Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. – 2010. – С. 2-3.
<http://www.machinelearning.ru/wiki/images/2/2d/Voron-ML-Modeling.pdf>
- [2] *Воронцов К.В.* Основные понятия и примеры прикладных задач. // MachineLearning.ru – Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. – 2010. – С. 2.
<http://www.machinelearning.ru/wiki/images/9/92/Voron-ML-Intro1.pdf>

- [3] Глоссарий // basegroup.ru – Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный интеллектуальному анализу данных.
<http://www.basegroup.ru/glossary/>
- [4] Метод главных компонент // alglib.sources.ru – Сайт проекта ALGLIB.
<http://alglib.sources.ru/dataanalysis/principalcomponentsanalysis.php>
- [5] Померанцев А. Л. Метод Главных Компонент (РСА). // chemometrics.ru – Информационный портал Российского хемометрического общества.
<http://www.chemometrics.ru/materials/textbooks/pca.htm>
- [6] SVD-разложение прямоугольной матрицы. // alglib.sources.ru – Сайт проекта ALGLIB.
<http://alglib.sources.ru/matrixops/general/svd.php>
- [7] Non-negative matrix factorization // wikipedia.org - Свободная энциклопедия.
<http://en.wikipedia.org/wiki/NMF>

Сетевые модели: анализ алгоритмов и прикладные задачи

Щербинин А. И.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Работа посвящена анализу известных алгоритмов решения задачи о максимальном потоке и их оценок сложности. Задача вычисления максимального потока в сети является классической задачей оптимизации, алгоритмы решения которой разрабатывались на протяжении последних 50-60 лет. Методы решения применяются в транспортных, коммуникационных, электрических, вычислительных сетях, при моделировании физических и химических процессов и т.п. Хронология исследований и оценки сложности представлены в таблице.

Год	Автор	Оценка алгоритма
1951	Данциг	$O(n^2mU)$
1956	Форд, Фалкерсон	$O(nmU)$
1970	Эдмондс, Карп	$O(nm^2)$
1970	Диниц	$O(n^2m)$
1972	Эдмондс, Карп	$O(m^2 \log U)$
1973	Диниц, Габоу	$O(nm \log U)$
1974	Казанов	$O(n^3)$
1978	Малхотри, Кумар, Махешвари	$O(n^3)$
1978	Галил, Намад	$O(nm \log^2 n)$
1980	Слейтор, Тарьян	$O(nm \log n)$
1986	Голдберг, Тарьян	$O(nm \log \frac{n^2}{m})$
1989	Чериян, Хагеруп, Мелхорн	$O(nm + n^2 \log^2 n)$
1992	Кинг, Рао, Тарьян	$O(nm + n^{2+e})$
1997	Голдберг, Рао	$O(\min \{m^{\frac{2}{3}}, n^{\frac{1}{2}}\} m \log (\frac{n^2}{m}) \log U)$

Джордж Бернард Данциг с 1941 по 1946 годы возглавлял подразделение анализа военных действий (Combat Analysis Branch), где работал над различными математическими проблемами. Впоследствии, используя работу Данцига, задача о максимальном потоке была впервые решена в ходе подготовки воздушного моста во время блокады Западного Берлина, происходившей в 1948-1949 году. В 1951 году Джордж Данциг впервые сформулировал задачу в общем виде.

Алгоритм Данцига основан на симплекс-методе и предполагает определение базисного допустимого решения (множества дуг), последовательное введение в базис переменных (дуг) и проверку условия оптимальности. В 1955 году Лестер Форд и Делберт Фалкерсон впервые построили алгоритм, специально предназначенный для решения этой задачи. Их алгоритм получил название алгоритм Форда-Фалкерсона.

Метод Форда-Фалкерсона предполагает поиск путей из источника сети к стоку. Суть алгоритма:

1. Пока достигим сток, производится поиск цепей из источника в сток с последовательным раскрытием вершин – присвоением пометок, включающих имя предшествующей вершины и максимально допустимой величины потока:

1.1 Первой раскрывается источник с неограниченной величиной потока.

1.2 Смежная с уже раскрытой достижимая вершина получает либо положительную пометку с именем предшествующей вершины и допустимой величиной потока, либо отрицательную пометку с именем последующей вершины и ненулевой величиной потока связывающей с ней дуги.

1.3 Пока не достигнут сток, повторяют п. 1.2. Иначе в обратном проходе увеличивают потоки всех дуг по величину пометки стока (при положительном раскрытии вершин) или уменьшают на величину пометки стока (при отрицательном раскрытии вершин)

2. Если сток недостижим, выполняется построение разреза сети и проверка равенства величины разреза полному потоку в сети.

Другая интерпретация метода связана с определением **остаточной сети**:

1. Все потоки обнулены. Остаточная сеть изначально совпадает с исходной сетью.

2. В остаточной сети находят любой путь из источника в сток. Если такого пути нет, происходит останов.

3. Пропускают через найденный путь (он называется увеличивающим путём или увеличивающей цепью) максимально возможный поток:

3.1. На найденном пути в остаточной сети находят ребро с минимальной пропускной способностью min .

3.2. Для каждого ребра на найденном пути увеличивают поток на min , а в противоположном ему - уменьшают на min .

3.3. Модифицируют остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляют новую пропускную способность. Если она ненулевая, добавляют ребро к остаточной сети, в противном случае удаляют.

4. Вернуться на шаг 2.

Разработанный в 1997 году **алгоритм Голдберга-Рао** впервые превзошел считавшуюся непреодолимой оценку $O(mn)$. Его результат: $O(\min \{m^{\frac{2}{3}}, n^{\frac{1}{2}}\} m \log(\frac{n^2}{m}) \log U)$. Алгоритм является слабо-полиномиальным, но, учитывая теорему подобия Габова (Gabow), в которой для сравнения слабо- и сильно-полиномиальных алгоритмов используется $\log U = O \log n$, он является лучшим на данный момент.

каждой своей итерации алгоритм Голдберга-Рао ищет тупиковый поток, используя неединичную функцию для определения длины допустимых дуг. Идея использования неединичной функции уже рассматривалась многими

учеными, но никогда не давала улучшения асимптотической оценки быстродействия.

Прикладные задачи

Один из рассмотренных алгоритмов, предложенных Фордом и Фалкерсоном, для однонаправленной сети с постоянными пропускными способностями, используется в разработке программного приложения для решения прикладных задач:

1. Задача распределения информационного ресурса в сети провайдера.
2. Задача распределения потока в децентрализованной вычислительной сети.
3. Задача объемно-календарного планирования.
4. Задачи распределения ресурсов в многоуровневых иерархических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. // М.: Мир, 1979.
- [2] *Липский В.* Комбинаторика для программистов // М.: Мир, 1988.
- [3] *Прилуцкий М.Х., Картомин А.Г.* Поточковые алгоритмы распределения ресурсов в иерархических системах. (*kartomin@mera.ru*).
- [4] *Таха А.Х.* Поточковые алгоритмы распределения ресурсов в иерархических системах. // М.: Мир, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция МАТЕМАТИКИ	3
Абибулаева С.А. Возможности использования диска «1С:Образовательная коллекция. Стереометрия, 10-11».....	3
Аблаева Л.Л. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Марцинкевича.....	6
Аблялимова Э.Э. Об одной оценке погрешности для уравнения Фред- гольма на полуоси.....	8
Абселямова Э.И. Пространства Лоренца-Орлича.....	10
Александров И.М. Компактные субдифференциалы на временной шкале: теоремы о среднем.....	13
Анисимова И.А. История Динамической Геометрии.....	16
Боева В.А. Дифференциальное исчисление функций бикомплексного переменного.....	18
Гончаренко А.М. Проблемы диагонализации неэрмитово самосопря- женных матриц над телом кватернионов.....	23
Корнейчук В.В. s -дискриминанты ранга 2.....	27
Пешеходько Т.Н. Компактные субдифференциалы в банаховых про- странствах.....	29
Пода Н.С. Ряды и рекуррентные последовательности.....	34
Редькина Ю.С. Спектральный анализ коллинейных операторов.....	38
Саенко С.С. Неравенство Шварца в G - модулях с индефинитной метрикой.....	43
Сулейманова А.Р. Компактные субдифференциалы на временной шкале: общая теория.....	45

Толочко В.К. Сферическая линейная интерполяция	49
Умирова С.Э. Сходимость с регулятором в эргодических теоремах .	50
Хазова Ю.А. Применение метода Прони к уравнениям типа Урысона	53
Шевченко А.Г. Дискретные двумерные квадратики типа «эллипс- прямая»	56
Секция ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ	
Брагин В. Однотоковый осциллятор Янга Миллса	59
Горшков Б.А. Стационарная задача классической электродинамики неточечного заряда	62
Каневский А.В. Определение перемещений и парового давления в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде при динамических воздействиях	65
Колпаков А.М. Java технологии для интеграции и распределения приложений	68
Левияш А.К. Использование дополнительных возможностей пара- метрических полиномов степени выше третьей при моделировании кривых и поверхностей	72
Лицов В.И. Дискретные двумерные квадратики типа «эллипс-прямая»	76
Сиверс А.А. Структурирование и алгоритмизация интеллектуальной игры Го	78
Халикова Л.Л. Явление Гиббса при оценках напряженного состояния прямоугольной призмы	81
Штука А.Ю. Нейросетевое управление в задаче преследования	83

Секция **ИНФОРМАТИКИ**..... 85

- Бекирова Э.М., Ионина И.С.** Программный комплекс поддержки принятия решений на основе линейной модели при неполной информации 85
- Гасанов Р.А.** Эффективность применения нейронных сетей в задачах распознавания 91
- Коваль А.А.** Применение генетических алгоритмов для синтеза оптимальных поведенческих деревьев 94
- Куртнебиев Э.Д.** Автоматический выбор регрессионной модели на основе символьной регрессии 98
- Пеек А.А.** Обучение с подкреплением в играх-стратегиях в реальном времени 100
- Предеин Д.Д.** Полнота семейства импликаций, порождаемых незамкнутыми ключевыми подмножествами 104
- Рифатов Р.А.** Реализация задачи подбора материалов в приложениях для проектирования силовых конструкций 108
- Филиппович А.А.** Архитектура решающей системы задач классификации на основе байесовского классификатора 111
- Чакал Э.М.** Разработка системы тематической классификации интернет-сайтов 115
- Черненко А.В.** Решающая система задач классификации на основе метрических алгоритмов классификации 118
- Шуленко Д.В.** Матричные Методы понижения размерности 121
- Щербинин А.И.** Сетевые модели: анализ алгоритмов и прикладные задачи 125