

Крымский научный центр НАН Украины

Таврический национальный университет  
им. В.И. Вернадского

Филиал Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова в г. Севастополе

**ТАВРИЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ  
ПО ИНФОРМАТИКЕ И МАТЕМАТИКЕ**

21-24 апреля 2009

КНЦ НАНУ  
Симферополь

**Редакционный совет:**

**Марянин Б. Д.**, к.ф.-м.н., доцент, ответственный редактор

**Войтицкий В. И.**, аспирант

**Донской В. И.**, д.ф.-м.н., профессор, гл. научный сотрудник КНЦ НАН  
Украины

**Копачевский Н. Д.**, д.ф.-м.н., профессор

**Чехов В. Н.**, д.ф.-м.н., профессор

**Орлов И. В.**, д.ф.-м.н., профессор

**Техническая группа:**

**Лунин В. В.**, студент

**Трещанович И. А.**, студент

**СЕКЦИИ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ:**

1. МАТЕМАТИКА, председатель Копачевский Н. Д.  
математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра,  
функциональный анализ, геометрия
2. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, председатель Чехов В. А.  
математические модели в естествознании, численные методы решения  
математических задач
3. ИНФОРМАТИКА, председатель Донской В. И.  
прикладная информатика, программное обеспечение компьютерных систем

Печатается по решению научно-технического Совета КНЦ НАН и  
Министерства образования и науки Украины от 9 апреля 2009 года,  
протокол 3.

подписано к печати 17.04.2009 г.  
отпечатано в типографии КНЦ НАНУ

# Современные формы теоремы Банаха-Штейнгауза

*Ахромович М. В.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

*Предложена универсальная теорема типа Банаха-Штейнгауза, справедливая в любых полных отделимых локально выпуклых пространствах. Рассмотрено приложение.*

Теорема Банаха-Штейнгауза и связанный с ней принцип равномерной ограниченности являются одним из основополагающих принципов функционального анализа. Она служит фундаментом многих результатов и направлений функционального анализа и его приложений.

Первоначальная формулировка теоремы Банаха-Штейнгауза неоднократно обобщалась. Приведем одну из общепринятых современных формулировок этих результатов. Напомним, что термин «В-почти всюду» означает «всюду, кроме множества I категории по Бэру».

**Теорема 1.** ([1], т. VII.6.46) Пусть  $E$  и  $F$  — топологические векторные пространства, причем  $E$  — бэрсовское, а  $F$  — секвенциально полное. Пусть  $\{u_n\}$  — последовательность линейных непрерывных отображений  $E$  в  $F$ , сходящаяся к некоторому пределу при  $n \rightarrow \infty$  в каждой точке подпространства  $E_0$ , плотно в  $E$ . Тогда:

- 1) или  $\{u_n\}$  расходится В-п.в. на  $E$  и даже В-п.в. неограничена;
- 2) или  $\{u_n\}$  всюду сходится на  $E$ , ее предел есть непрерывное линейное отображение, семейство  $\{u_n\}$  равномерно непрерывно, а сходимости равномерна на каждом компакте из  $E$ .

В последние десятилетия внимание многих математиков привлекают теоремы, обычно называемые универсальными теоремами типа Банаха-Штейнгауза, в которых непрерывность предельного оператора последовательности операторов утверждается при минимальных требованиях к пространствам  $E$  и  $F$ . Приведем некоторые из этих результатов.

**Теорема 2.** ([2], т. В). Пусть  $X$  и  $Y$  — локально выпуклые пространства (ЛВП),  $T_n: X \rightarrow Y$  — непрерывные линейные операторы,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $\lim_n T_n x = Tx$  существует в  $Y$  для каждого  $x \in X$ , то предельный оператор  $T$  является  $\beta(X, X')$ -непрерывным и, в частности, непрерывным, если  $X$  — бочечное пространство.

**Теорема 3.** ([3], т. 1). Пусть  $X$  и  $Y$  — ЛВП,  $T_n: X \rightarrow Y$  — секвенциально непрерывные линейные операторы,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $\lim_n T_n x = Tx$  существует в  $Y$  для каждого  $x \in X$ , то предельный оператор  $T$  является  $\beta(X, X^s)$ -непрерывным, где  $X^s$  — пространство всех секвенциально непрерывных линейных функционалов на  $X$ .

Целью данной работы является получение универсальной теоремы типа Банаха-Штейнгауза, справедливой в любых полных отделимых локально выпуклых пространствах, и рассмотрение некоторых приложений полученной теоремы.

Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы 1 на случай последовательностей операторов в произвольных полных отделимых ЛВП.

**Теорема 4.** Пусть  $E$  и  $F$  — полные отделимые ЛВП, последовательность операторов  $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset L(E, F)$  поточечно сходится к оператору  $A$  на всюду плотном в  $E$  множестве. Тогда:

- 1) либо  $\{A_k\}$  расходится  $B$ -н.в. и даже  $B$ -н.в. неограничена;
- 2) либо  $\{A_k\}$  поточечно сходится к  $A$  всюду на  $E$ ,  $A \in L(E, F)$ ,  $\{A_k\}$  равномерно непрерывна и  $A_k \rightrightarrows A$  на каждом компакте из  $E$ .

Как следствие, из теоремы 4 вытекает утверждение о непрерывности предельного оператора  $A$ .

**Теорема 5.** Пусть  $E$  и  $F$  — полные отделимые ЛВП, последовательность операторов  $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset L(E, F)$  поточечно сходится к оператору  $A$ . Тогда  $A \in L(E, F)$ ,  $\{A_k\}$  равномерно непрерывна на  $E$  и  $A_k \rightrightarrows A$  на каждом компакте из  $E$ .

Рассмотрим одно приложение теоремы 5 к матричным методам суммирования.

Пусть  $A$ -бесконечная матрица, то есть скалярная функция на произведении  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Обозначим через  $D(A)$  множество тех  $x \in C^\mathbb{N}$ , для которых ряд  $\sum_n A_{m,n} x_n$  сходится при каждом  $m$ . Матрица  $A$  определяет линейное отображение  $u_A$  пространства  $D(A)$  в  $C^\mathbb{N}$ , которое каждому  $x \in D(A)$  сопоставляет последовательность  $y = u_A(x)$ , определенную соотношениями  $y_m = \sum_n A_{m,n} x_n$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Имеет место следующая теорема (обобщение теоремы, рассмотренной в (п. 7.2.4 [4])):

**Теорема 6.** Пусть  $E$ -векторное подпространство в  $D(A)$  и  $F$  — векторное подпространство в  $C^\mathbb{N}$ , причем  $E$  и  $F$  наделены структурами ЛВП, удовлетворяющими следующим условиям:

1)  $F$  отделимо, и каждое  $y \in F$  является пределом своих конечных сечений  $s_k y$ ;

2)  $E$ -полное отделимое ЛВП.

Тогда если  $u_A(E) \subset F$ , то  $u_A$  непрерывно отображает  $E$  в  $F$ .

**Замечание 1.** Покажем содержательность т. 6. Введем в  $C^{\mathbb{N}} \supseteq F$  топологию поточечной сходимости. Для любого  $y \in U_A(E)$  рассмотрим сечение  $s_k(y) = (y_1, \dots, y_k, 0, 0, \dots)$ . Обозначим  $U_A(E)^s = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} s_k[U_A(E)] \right) \cup U_A(E)$ .

Положим  $F = \overline{U_A(E)^s}$ ; тогда  $F$  — полное отделимое ЛВП, в котором каждое  $y \in F$  является пределом своих конечных сечений  $s_k y$ . Таким образом, пространство  $F$ , удовлетворяющее условиям теоремы 6, существует для каждого  $u_A$ .

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. Орлову И.В. за постановку задачи и руководство работой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шварц Л. *Анализ. Том 2.* — М.: Мир, 1972. — 528 с.
- [2] Li Ronglu, Min-Hyung Cho. *Banach-Steinhaus type theorem which is valid for every locally convex space* // Appl. Func. Anal. — Vol. 1. — 1993. — P. 146-147.
- [3] Cui Chengri, Soncho Han. *Banach-Steinhaus properties of locally convex spaces* // Kangweon-Kyuingki Math. Jour. — Vol. 5, № 2. — 1997. — P. 227-232.
- [4] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* — М.: Мир, 1969. — 1072 с.

## Поиск объектов на изображении с помощью алгоритмов машинного обучения

*Асанов Р. Р.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Машинное зрение – это теория и технология создания методов, способных моделировать зрение некоторого биологического объекта. В биологии изучается зрительное восприятие человека и различных животных, в результате чего создаются модели работы таких систем в терминах физиологических процессов. Машинное зрение, с другой стороны, изучает и описывает системы машинного зрения, которые выполнены аппаратно или программно [1]. Основная цель машинного зрения – принятие решений о реальных физических объектах и сценах, основываясь на воспринимаемых изображениях. Любая система машинного зрения, основанная на машинном обучении, концептуально состоит из двух частей: настройки модели (например, классификатора), которая работает один раз, в результате получается модель с настроенными параметрами (например, настроенный классификатор), и рабочего модуля – предполагает многократное использование системы по настроенному классификатору.

В теме дипломной работы рассматривается система обнаружения объектов на изображении на основе алгоритма, предложенного в работе Виолы и Джонса [2] по поиску лиц. Алгоритм представляет собой поиск объектов при помощи скользящего окна с использованием простой схемы каскадов. На первой ступени каскада отбрасываются все положения скользящего окна, при которых в окно помещается только черный фон, или часть объекта. На вторую ступень попадают такие положения скользящего окна, при которых в окно помещается объект целиком, или значительная его часть. На второй ступени работает настроенный классификатор, который умеет отличать нужные объекты от ненужных.

Первый этап алгоритма из работы Виолы и Джонса – это построение интегрального изображения из бинарного изображения [3]. Бинаризация исходного изображения осуществляется по заранее заданному порогу. На следующем этапе работает уже настроенный классификатор на основе алгоритма AdaBoost [2, 3].

Суть алгоритма AdaBoost такова:

1) На каждой итерации мы используем некоторый метод обучения, так чтобы он выдал гипотезу которая минимизирует ошибку с учётом «важности» примеров;

2) Мы выбираем тот классификатор, который на данном шаге сделал наименьшую ошибку, с учётом «важности» прецедентов (распределение);

3) Составляем линейную комбинацию всех отобранных классификаторов.

Настройка классификатора осуществляется по базе изображений. Для этого из базы фотографий объектов нужно получить обучающую выборку, в которой записаны вектора признаков фотографий из базы и метка класса для каждого вектора (+1 для нужных объектов и  $-1$  для ненужных объектов). По обучающей выборке нужно настроить классификатор – нужно применить алгоритм AdaBoost. Для выбора количества итераций «бустинга» нужно использовать методы эмпирической оценки качества работы классификатора (оценку на тестовой выборке или скользящий контроль) [4].

Среди преимуществ алгоритма AdaBoost можно отметить: универсальность, высокая скорость сходимости, высокая обобщающая способность, возможность очень эффективной программной реализации и распараллеливания, простота метода и отсутствия параметров. Существенным недостатком является трудность определения нужного числа итераций обучения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

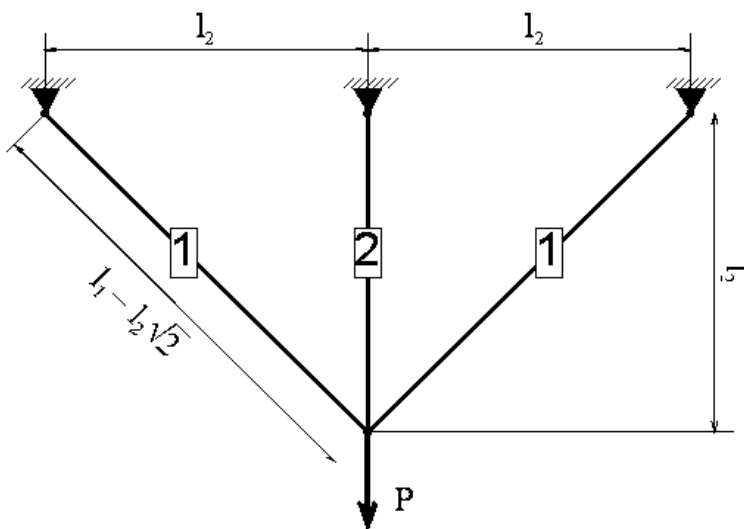
- [1] Википедия - свободная энциклопедия.  
[http://ru.wikipedia.org/wiki/Компьютерное\\_зрение.pdf](http://ru.wikipedia.org/wiki/Компьютерное_зрение.pdf)
- [2] Paul Viola, Michael J. Jones. *Robust Real-Time Face Detection*.  
<http://lear.inrialpes.fr/people/triggs/student/vj/viola-ijcv04.pdf>.
- [3] Курсы лаборатории компьютерной графики.  
<http://courses.graphicon.ru/>.
- [4] Распознавание. Скользящий контроль.  
<http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=CV>.
- [5] Graphics & Media lab (Лаборатория компьютерной графики при ВМК МГУ).  
<http://graphics.cs.msu.ru/index.html.ru>.
- [6] Воронцов К.В. Лекции по логическим алгоритмам классификации.  
<http://www.ccas.ru/voron/download/LogicAlgs.pdf.2006>.

## Математическая модель задачи оптимального проектирования трёхстержневой фермы

*Балуштин С. В.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (500-И)

Рассматривается задача оптимального проектирования простой трёхстержневой фермы, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ :



Боковые стержни имеют одинаковые свойства и материал (обозначен на рисунке номером 1). Центральный стержень выполнен из другого материала (обозначен номером 2). Проектными параметрами являются площади поперечного сечения стержней. Требуется так подобрать проектные параметры, чтобы ферма не разрушилась при заданной нагрузке (т.е. чтобы в стержнях не были превышены уровни напряжений, соответствующие пределу прочности материала) и при этом имела минимально возможный вес. Чтобы площади сечений не вырождались в нуль, для них задаются минимально допустимые значения (конструктивные ограничения).

Для рассматриваемой задачи имеют место следующие соотношения [1]:

(1) величина массы фермы

$$W = 2\rho_1 l_1 F_1 + \rho_2 l_2 F_2 = (2\sqrt{2}\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2) l_2.$$



Здесь через  $F_1$  и  $F_2$  обозначены площади поперечного сечения стержней,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности материалов стержней,  $l_1$  и  $l_2$  — длины стержней;

- (2) условие совместности деформаций:  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$  где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — деформации стержней;
- (3) условие равновесия сил:  $\sqrt{2}N_1 + N_2 = P$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — внутренние усилия в стержнях;
- (4) величины напряжений в стержнях:  $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1}$ ,  $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2}$ ;
- (5) зависимость между напряжениями и деформациями  $\sigma = E^{\text{сек.}} \cdot \varepsilon$ , где  $E^{\text{сек.}}$  — секущий модуль упругости материала, соответствующий данной точке кривой " $\sigma - \varepsilon$ " (зависимости между напряжениями и деформациями материала).

На основании вышеприведенных соотношений можно выписать систему

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}E_1^{\text{сек.}} \cdot F_1 + E_2^{\text{сек.}} \cdot F_2 = \frac{PE_1^{\text{сек.}}}{2\sigma_1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}E_1^{\text{сек.}} \cdot F_1 + E_2^{\text{сек.}} \cdot F_2 = \frac{PE_2^{\text{сек.}}}{\sigma_2}, \end{cases}$$

которую можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными, которыми являются площади поперечного сечения стержней.

Задача оптимального проектирования для рассматриваемой фермы

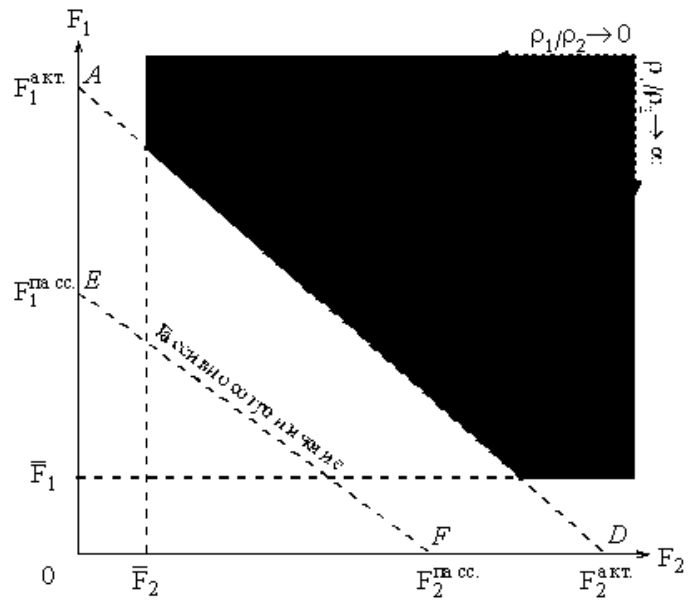
$$\begin{cases} W \rightarrow \min_{F_i} \\ \sigma_i \leq \bar{\sigma}_i \\ F_i \geq \bar{F}_i, \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2,$$

с учетом полученной выше системы уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 \rightarrow \min_{F_1, F_2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}E_1^{\text{сек.}} \cdot F_1 + E_2^{\text{сек.}} \cdot F_2 \geq \frac{PE_1^{\text{сек.}}}{2\sigma_1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}E_1^{\text{сек.}} \cdot F_1 + E_2^{\text{сек.}} \cdot F_2 \geq \frac{PE_2^{\text{сек.}}}{\sigma_2} \\ F_1 \geq \bar{F}_1 \\ F_2 \geq \bar{F}_2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данная задача является задачей линейного программирования. Область неизвестных для этой задачи имеет следующий вид:

Построенная задача линейного программирования может рассматриваться как математическая модель, которая позволяет компьютерную реализацию и



исследование оптимального решения при задании различных вариантов используемых материалов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. – М.: МГТУ, 1999. – 592 с.

## Суффиксные массивы и суффиксные деревья

Баринов В. С.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

В программировании мы встречаемся с проблемой обработки текста. Часто нам требуется что-то найти в тексте, в интернете, анализировать большой объем информации. Важную роль играют алгоритмы обработки текста в биологии, в области анализа ДНК. В основном все возникающие проблемы обработки текста сводятся к классическим задачам, таким как: точное совпадение строк, задача о подстроке для базы образцов, наибольшая общая подстрока двух строк, лексикографически наименьший циклический сдвиг и т. д.

Разумеется, все возникающие задачи можно решать "напрямую" делая именно то, что требуется в задаче. Но такие алгоритмы обычно имеют большую алгоритмическую сложность. И когда объем обрабатываемой информации большой (а в реальных задачах объемы бывают очень большими – миллиарды символов), то такие методы просто неприемлемы: время работы программы может быть больше жизни человека. Тут и возникает необходимость в поиске эффективного решения.

**Определение 1.** *Строкой или текстом  $T$  длины  $n$  будем называть массив  $T[1..n]$ , элементами которого являются символы некоторого конечного алфавита. Иногда длина строки обозначается как  $|T|$ .*

**Определение 2.** *Конкатенацией двух строк  $T_1[1..n]$  и  $T_2[1..m]$  называется строка  $R[1..r]$ , которая сначала содержит все буквы слова  $T_1$ , а потом все буквы слова  $T_2$ . Обычно пишут строки подряд, подразумевая, что их надо конкатенировать, например  $R = T_1T_2$ .*

**Определение 3.** *Строка  $P$  является подстрокой строки  $T$ , если существуют такие строки  $X$  и  $Y$ , что  $T = XPY$ .*

Простейшая задача на строках – задача поиска подстроки в строке: дан текст  $T$  и образец  $P$  – строка, которую мы будем искать как подстроку в тексте  $T$ . Нужно найти все позиции в тексте  $T$ , начиная с которых строка  $P$  входит в  $T$  как подстрока. Сложность алгоритма с наивным подходом  $O(|T||P|)$ , что при больших  $|T|$  и  $|P|$  будет давать очень большое время работы программы. Однако для этой задачи существуют алгоритмы сложности  $O(|T| + |P|)$ . Одним из таких является алгоритм Кнута-Морриса-Пратта (КМП).

Но это самая простая задача на строках, которая только может быть, и алгоритм КМП применим только для нее. Стоит нам немного обобщить задачу и

искать не один образец в тексте, а несколько, и мы получаем следующую картину: пусть у нас имеется набор образцов  $P_1, P_2, \dots, P_k$  и мы хотим узнать, входит ли хотя бы один из них как подстрока в текст  $T$ . Алгоритмическая сложность наивного подхода будет  $O(\sum_{i=1}^k (|P_i| \cdot |T|))$ . Но если мы будем  $k$  раз использовать КМП, то оценка будет лучше:  $O(\sum_{i=1}^k |P_i| + k|T|)$ . Но и этого мало, так как если образцов много, то величина  $k|T|$  может быть очень большой. Существует обобщение алгоритма КМП на набор слов с использованием структуры данных бор. Этот алгоритм носит название алгоритма Ахо-Корасик и его сложность  $O(\sum_{i=1}^k |P_i| + |T|)$ .

Понятно, что если сложность решения совпадает со сложностью входных данных, то это решение является оптимальным. Оказывается, что в большинстве задач на строках эта оценка достижима, правда, не всегда просто реализовать соответствующие алгоритмы программно.

**Определение 4.** *Бором  $B$  над словарем  $\{P_i\}$  является представление этого словаря в виде корневого дерева, где каждая вершина соответствует некоторому префиксу некоторого слова и составлен он из букв написанных на ребрах на пути от корня дерева до этой вершины.*

**Определение 5.** *Суффиксное дерево строки  $T$  – это бор всех суффиксов строки  $T$ .*

С помощью этой структуры можно решить большинство задач на строки. Все те задачи, которые перечислены в начале данной статьи, легко решаются с использованием суффиксного дерева. Основной проблемой, связанной с суффиксным деревом, является его эффективное построение. Существуют алгоритмы, которые его строят за время  $O(|T|)$ . Но все они сложны для понимания и трудоемки в программировании.

**Определение 6.** *Суффиксный массив строки  $T$  – массив всех суффиксов  $T$ , упорядоченный в алфавитном порядке.*

Суффиксный массив – это простая и удобная структура. Большинство задач также можно решить с его помощью. Правда, не всегда оценка сложности будет оптимальной, но запрограммировать его построение не составляет особого труда. Есть разные подходы с разной сложностью:

- Наивный подход, сложность  $O(|T|^2 \log(|T|))$ .
- Подход основанный на "корзинах" –  $O(|T| \log(|T|))$ .

- Алгоритм, предложенный Ю. Карэиненом и П. Сандерсом [2] в 2003 году. Сложность  $O(|T|)$ .

До статьи Карэинена и Сандерса был известен только один подход с линейной сложностью для построения суффиксного массива – сперва построить суффиксное дерево, а затем на его основе построить суффиксный массив. Однако стоит заметить, что техническая сложность программирования суффиксного дерева гораздо выше, чем у предложенного авторами алгоритма. Вообще, суффиксное дерево обладает большими возможностями, чем суффиксный массив, поэтому строить суффиксный массив из суффиксного дерева не имеет практического смысла.

Интерсно, что нигде в литературе не встречается алгоритмов построения суффиксных деревьев из суффиксных массивов. Однако предварительный анализ дает предпосылки для существования очень простого такого алгоритма. Это открывает возможности построения суффиксных деревьев гораздо более простыми методами. Более того, такой подход будет использовать гораздо меньше памяти и иметь довольно маленькую константу, но при той же алгоритмической сложности  $O(|T|)$ . То есть, мы получаем более простой и более быстрый алгоритм построения суффиксного дерева.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест *Алгоритмы: построение и анализ*. Пер. с англ. под ред. А. Шеня. – М.: МЦНМО: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 2-е изд.
- [2] Juha Kärkkäinen and Peter Sanders *Simple Linear Work Suffix Array Construction* Max-Planck-Institut für Informatik Stuhlsatzenhausweg 85, 66123 Saarbrücken, Germany

# Доминантная эргодическая теорема в классах зигмунда измеримых функций на полуоси

Бураева Э. Н.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

В данной работе рассматривается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в классах Зигмунда измеримых функций на полуоси.

Пусть  $\mu$  — мера Лебега на полупрямой  $[0, \infty)$  и  $S(0, \infty)$  — пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на  $(0, \infty)$ , для которых функция распределения  $n_f(\tau)$  не равна тождественно  $+\infty$  на  $(0, \infty)$ .

Функция  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  называется функцией Орлича, если  $\Phi(u)$  — непрерывная слева, неубывающая, нетривиальная, выпуклая функция, для которой:  $\Phi(0) = 0$ .

Множество вида:

$$L_\Phi = \left\{ f \in S(0, \infty) : \int \Phi\left(\frac{f}{a}\right) < \infty \text{ для некоторого } a > 0 \right\}$$

называется пространством Орлича.

Пространство  $L_\Phi$  является симметричным, относительно нормы:

$$\|f\|_\Phi = \inf \left\{ a > 0 : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1 \right\}.$$

Обозначим  $H(L_\Phi) = \{f \in L_1(0, \infty) + L_\infty(0, \infty) : f^{**} \in L_\Phi\}$

и положим  $\|f\|_{H(L_\Phi)} = \|f^{**}\|_{L_\Phi}$ .

Пространство  $(H(L_\Phi), \|\cdot\|_{H(L_\Phi)})$  также является симметричным и имеет место следующая цепочка вложений:

$$L_1(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty) \subset H(L_\Phi) \subset L_\Phi \subset L_1(0, \infty) + L_\infty(0, \infty)$$

Известно, что  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ , где  $\Phi_1(x) = x \int_0^\infty \frac{\Phi'_1(u)}{u} d\mu$ .

Пусть  $k > 0$ . Рассмотрим функцию вида:

$$\Phi_k(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq 1, \\ u(\log u)^k & , \quad u > 1. \end{cases}$$

Функция  $\Phi_k(u)$  является функцией Орлича при  $k \geq 1$ , которая удовлетворяет  $(\Delta_2)$ -условию на  $\infty$ , т.е. найдутся такие  $u_0 \in (0, \infty)$  и

$k \in \mathbf{R}$ , что для любого  $0 < u \leq u_0$

$$\Phi(2u) < k\Phi(u).$$

**Определение 1.** Пространство Орлица  $L_{\Phi_k}$  называется классом Зигмунда и обозначается:

$$L_{\Phi_k} = L \log^k L = L \ln^k L.$$

**Теорема 1.**  $H(L \log^n L) = L \log^{n+1} L$ .

Пусть  $T : L_1 + L_\infty \rightarrow L_1 + L_\infty$  — положительный линейный оператор, действующий в  $L_1$  и  $L_\infty$ , для которого:  $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq 1$ ,  $\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq 1$ . Оператор  $T$  называется положительным  $(L_1 - L_\infty)$ -сжатием, а множество всех таких операторов обозначается через  $PC$ . Для каждого оператора  $T \in PC$  рассматривается оператор  $B_T$ , задаваемый равенством:

$$B_T(f) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

**Теорема 2.** Если  $T \in PC$  и  $f \in L \log^{n+1} L$ , то  $B_T(f) \in L \log^n L$  и

$$\|B_T f\|_{L_{\Phi_n}} \leq \|f\|_{L_{\Phi_{n+1}}} = \|f^{**}\|_{L_{\Phi_{n+1}}}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов.* // М.: Наука, - 1978 - 400 С.
- [2] Буренков В. И. *Функциональные пространства. Пространства  $L_p$*  // М.: Изд. УДН, - 1987.- 80 С.
- [3] Красносельский М.А., Рунтцкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлица.* // М.:Физматгиз, - 1958. - 271 С.
- [4] Hardy G. H., Littlewood J. E. *A maximal theorem with function-theoretic application* // *Acta Math.*, No. 54, 81–116 (1930).
- [5] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. *Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces*, *Studia Mathem.*, No. 128 (2), 145–157 (1998).
- [6] Krengel U., *Ergodic Theorems*, de Gruyter *Stud. Math.*, de Gruyter, Berlin, 1985, 357p.
- [7] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. *Classical Banach Spaces. Function Spaces.* Springer 1979.
- [8] М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн. *Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий.* - Ученые записки ТНУ, Т.17 (56), № 2, с. 36 - 48, 2003.

# Использование NURBS для построения кривых и поверхностей

Варенник Е. Ю.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Рассмотрим функции называемые В-сплайнами. Для их определения воспользуемся рекуррентной формулой Кокса - Де Бура. Пусть  $\{u_0 = 0, \dots, u_m = 1\}$  - неубывающая последовательность действительных чисел, тогда  $i$ -ый В-сплайн степени  $p - 1$  задается следующим образом [1]:

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [u_i, u_{i+1}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$N_{i,p+1}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p+1} - u_i} N_{i,p}(u) + \frac{u_{i+p+2} - u}{u_{i+p+2} - u_{i+1}} N_{i+1,p}(u), \quad p = 2, 3, \dots \quad (1)$$

Порядком В-сплайна называется величина  $p$ , равная количеству отрезков на котором он не равен нулю.

**Свойства  $N_{i,p}$ :**

- (1) Каждый В-сплайн ненулевой только на  $p$  отрезках, называемых его носителями.
- (2) Каждая последовательность из  $m$  отрезков, образованных точками  $u_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , формирует полную систему В-сплайнов, которая состоит из  $m + p - 1$  функций при использовании узлов  $u_0, u_m$  кратности порядка  $p - 1$ .
- (3) Сумма полной системы В-сплайнов для  $\forall u \in [u_0, u_m]$  равна единице.
- (4) При значении  $u$ , равным  $u_0$  и  $u_m$  обращаются в ноль только первый и последний В-сплайны, соответственно.

Самым простым объектом, который можно построить при помощи В-сплайна, является В-сплайновая кривая в форме скалярного произведения [2]:

$$r(u) = \sum_{i=0}^{m+3} N_{4,i}(u) r_i. \quad (2)$$

**Свойства  $r(u)$ :**

- (1)  $r(0) = r_1$  и  $r(1) = r_{m+3}$ , по свойству (3) В-сплайнов.
- (2) Кривая (2) на участке, где используется В-сплайн без кратных узлов всегда проходит через точку  $q_i = \frac{1}{6}(r_{i-1} + r_{i+1}) + \frac{2}{3}r_i$ .



Свойство (2) служит основой для построения интерполирующей В-сплайновой кривой. Преимущество такого интерполирования связано с тем, что для любого количества точек используются лишь многочлены третьей степени  $N_{4,i}(u)$ .

Наиболее интересной задачей является построение В-сплайновой поверхности. Самый простой вариант - обобщение формулы (2) на трехмерный случай:

$$r(u, v) = \sum_{i=1}^{m+3} \sum_{k=1}^{n+3} N_{4,i}(u) N_{4,k}(v) r_{ik}. \quad (3)$$

Данный трехмерный объект обладает свойствами аналогичными кривой (2).

**Свойства  $r(u, v)$ :**

- (1)  $r(0, 0) = r_{1,1}$ ,  $r(0, 1) = r_{1,n+3}$ ,  $r(1, 0) = r_{m+3,1}$ ,  $r(1, 1) = r_{m+3,n+3}$ .
- (2) Функция находится внутри выпуклой оболочки, сформированной всеми  $r_{i,k}$ .

Кроме этого реализован частный случай такой поверхности - линейчатая поверхность. Это такая поверхность у которой для любого  $u$  сечением является отрезок:

$$r(u, v) = \sum_{i=1}^{m+3} [(1-v)r_{i0} + vr_{i1}] N_{4,i}(u). \quad (4)$$

В этом случае по  $v$  направлению всегда получаем отрезок прямой. Если  $N_{4,i}(u)$  брать с кратными узлами, то получится аппроксимирующий вариант. Если рассмотреть вариант без кратных узлов, то тогда можно построить интерполирующую поверхность (4) по тому же алгоритму, что и кривую.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Piegl L., Tiller W., *The NURBS Book (Monographs in Visual Communications)*. New York: Springer-Verlag - 1997. С.50-58.
- [2] Фокс А., Пратт М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве*. Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. С. 142 - 148.

## Объекты Вейерштрасса

*Джемилева М. Э.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Одним из самых интересных объектов в математике является непрерывная нигде не дифференцируемая функция Вейерштрасса, задаваемая следующим образом:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

где  $a$  – вещественное число, изменяющееся в пределах  $0 < a < 1$ , а  $b$  – целое нечетное число и  $ab > 1 + 3\pi/2$  [1].

Цель работы – введение некоторого класса новых объектов –  $W$ -объектов Вейерштрасса, конструируемых следующим образом.

Пусть  $C(\lambda)$  и  $S(\lambda)$  – новые функции Вейерштрасса, определяемые с помощью бесконечного ряда и зависящие от параметра  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ), имеют следующий вид:

$$C(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda \cdot \omega(n))}{R(n)}; \quad (1)$$

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda \cdot \omega(n))}{R(n)}. \quad (2)$$

Пусть  $F(\lambda)$  и  $G(\lambda)$  – новые функции Вейерштрасса, определяемые с помощью бесконечного произведения и зависящие от параметра  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ), имеют следующий вид:

$$F(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\cos(\lambda \cdot \omega(n))}{R(n)} \right); \quad (3)$$

$$G(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin(\lambda \cdot \omega(n))}{R(n)} \right). \quad (4)$$

Для функций (1)–(4) пара функций  $\{\omega(n); R(n)\}$  является порождающей парой.

Таким образом, пара функций  $\{C(\lambda); S(\lambda)\}$  порождает множество сумматорных  $W$ -объектов, а пара  $\{F(\lambda); G(\lambda)\}$  – множество мультипликаторных  $W$ -объектов. Для этих  $W$ -объектов размерность пространства размещения объекта равна 2.

Аналогично построим трехмерные объекты Вейерштрасса. Пусть тройка функций  $\{C(\lambda, \mu); S(\lambda, \mu); Z(\lambda, \mu)\}$  формирует множество трехмерных сумматорных  $W$ -объектов, каждая из которых зависит от двух параметров  $\lambda$  и  $\mu$  ( $0 \leq \lambda \leq 2\pi; 0 \leq \mu \leq 2\pi$ ) и строится с помощью бесконечного ряда:

$$C(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda \cdot \omega(n)) \cdot \cos(\mu \cdot \Omega(n))}{R(n)}; \quad (5)$$

$$S(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda \cdot \omega(n)) \cdot \sin(\mu \cdot \Omega(n))}{R(n)}; \quad (6)$$

$$Z(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda \cdot \omega(n))}{R(n)}. \quad (7)$$

Другая тройка функций  $\{F(\lambda, \mu); G(\lambda, \mu); H(\lambda, \mu)\}$  пусть формирует множество трехмерных мультипликаторных  $W$ -объектов, каждая из которых зависит от двух параметров  $\lambda$  и  $\mu$  ( $0 \leq \lambda \leq 2\pi; 0 \leq \mu \leq 2\pi$ ) и строится с помощью бесконечного произведения следующим образом:

$$F(\lambda, \mu) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin(\lambda \cdot \omega(n)) \cdot \cos(\mu \cdot \Omega(n))}{R(n)} \right); \quad (8)$$

$$G(\lambda, \mu) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin(\lambda \cdot \omega(n)) \cdot \sin(\mu \cdot \Omega(n))}{R(n)} \right); \quad (9)$$

$$H(\lambda, \mu) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\cos(\lambda \cdot \omega(n))}{R(n)} \right). \quad (10)$$

Для функций (5)–(10) порождающей тройкой являются функции  $\omega(n)$ ,  $\Omega(n)$  и  $R(n)$ .

Рассмотрим удобные для исследования функции  $\omega(n)$ ,  $\Omega(n)$ ,  $R(n)$ , удовлетворяющие вышеуказанным условиям ограниченности. Пусть  $\varphi(n)$  – любая функция из тройки  $\omega(n)$ ,  $\Omega(n)$ ,  $R(n)$ .

Нуль-параметрические: 1)  $\varphi(n) = n!$ ; 2)  $\varphi(n) = f(n)$  (числа Фибоначчи).

Однопараметрические: 3)  $\varphi(n) = n^\alpha$ ;  $\alpha > 1$ ; при целых  $\alpha$   $W$ -объекты замкнуты. 4)  $\varphi(n) = \alpha^n$ ;  $\alpha > 1$ ; при целых  $\alpha$   $W$ -объекты замкнуты.

5)  $\varphi(n) = \prod_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)$ ;  $0 \leq \alpha < 1$ ; при  $\alpha \neq 0$   $W$ -объекты незамкнуты.

Исследование объектов Вейерштрасса заключается в построении двумерных и трехмерных сумматорных и мультипликаторных  $W$ -объектов, порождаемых всеми  $\varphi(n)$ , а также в вычислении их фрактальной размерности.

Специальными случаями исследования являются симметричная пара функций  $\omega(n) = R(n)$  и симметричная тройка функций  $\omega(n) = \Omega(n) = R(n)$ .

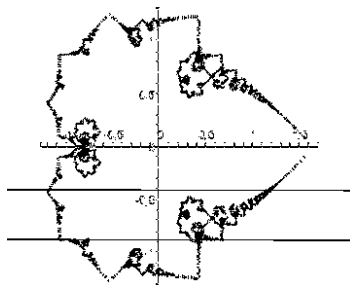


Рис. 1. Двумерный сумматорный W-объект при  $\varphi(n) = n^\alpha$  и  $\alpha = 2$ .

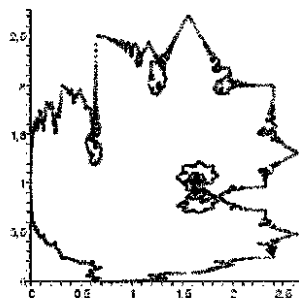


Рис. 2. Двумерный мультипликаторный W-объект при  $\varphi(n) = n^\alpha$  и  $\alpha = 2$ .

Например, пусть  $\varphi(n) = n^\alpha$ , тогда при  $\alpha = 2$  двумерный сумматорный W-объект имеет форму правильного симметричного листа (рис. 1), а двумерный мультипликаторный W-объект форму искривленного листа (рис. 2). Для данных объектов нами была вычислена их фрактальная размерность [2]. Установили, что размерность сумматорного W-объекта равна 1,26, а размерность мультипликаторного W-объекта – 1,25.

Интересными получились и трехмерные W-объекты при  $\varphi(n) = n^\alpha$  и  $\alpha = 2$ . Например, на рисунке 3 изображен сумматорный W-объект, который имеет сложную конусообразную форму.

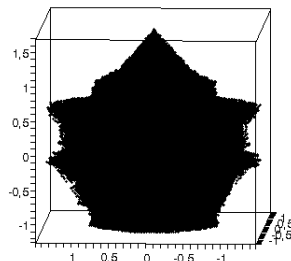


Рис. 3. Трехмерный сумматорный W-объект при  $\varphi(n) = n^\alpha$  и  $\alpha = 2$ .

Таким образом, введенные объекты Вейерштрасса, обладающие свойством фрактальности, являются новым классом непрерывных нигде не дифференцируемых функций, которые до сих пор еще не были исследованы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Thim J. *Continuous nowhere differentiable functions*. – ISRN:LTU-EX-03320-SE, 2003. – 94 с.
- [2] Жиков В. В. *Фракталы*. // Соросовский образоват. журнал – Т. 1, № 12. – 1996. – С. 109-117.

# Спектральные свойства $\mathbb{F}$ -линейных операторов

Ермакова Е. Е.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

*Аннотация.* В работе рассматриваются общие свойства спектра  $\mathbb{F}$ -линейного оператора, действующего в конечномерном  $\mathbb{H}$ -модуле. Для описания всех классов спектра таких операторов построен аналог характеристического многочлена.

В отличие от случая кватернионно линейных операторов, та часть спектра  $\mathbb{F}$ -линейного оператора, которая принадлежит полю  $\mathbb{F}$ , не может служить полным описанием спектра этого оператора в  $\mathbb{H}$  даже в конечномерном случае. Поэтому в работе исследуется задача описания всех классов сопряженности, принадлежащих спектру  $\mathbb{F}$ -линейного оператора, действующего в конечномерном  $\mathbb{H}$ -модуле.

Пусть  $\mathbb{H}$  — вещественная алгебра кватернионов размерности 4. Всюду в данной работе через  $\mathbb{F}$  будем обозначать поле в  $\mathbb{H}$ , являющееся расширением поля  $\mathbb{R}$ .  $1, f$ , — базис  $\mathbb{R}$ -алгебры  $\mathbb{F}$ , кватернионы  $1, f, \varepsilon, f\varepsilon$  образуют вещественный базис в  $\mathbb{H}$  так, что произвольный кватернион  $q$  можно представить в виде  $q = u + v\varepsilon$ , где  $u, v \in \mathbb{F}$ .

Пусть  $H$  — правый  $\mathbb{H}$ -модуль размерности  $n$ ,  $L(H^{\mathbb{F}})$  — множество всех  $\mathbb{F}$ -линейных (т.е. однородных относительно умножения на скаляр из поля  $\mathbb{F}$ ) операторов, действующий в модуле  $H$ . Здесь  $E_q(A)$  — собственный подмодуль оператора  $A$ , соответствующий собственному значению  $q \in \mathbb{H}$ ,  $\sigma_p(A)$  — множество всех его собственных значений. Напомним, что  $K_{\mathbb{F}^*}(q) = \{uq\bar{u} \mid u \in \mathbb{F}, |u| = 1\}$  — класс  $\mathbb{F}^*$ -сопряженности элемента  $q$  в мультипликативной группе  $\mathbb{H}^*$ . Имеет место следующее утверждение.

**Предложение 1.** Если  $q \in \sigma_p(A)$ , то  $K_{\mathbb{F}^*}(q) \subset \sigma_p(A)$ .

Отображение  $c$ , определенное на кватернионе  $q = q_1 + q_2\varepsilon$ ,  $q_1, q_2 \in \mathbb{F}$ , следующим образом:  $c(q) = q_1 - q_2\varepsilon$ , является внутренним автоморфизмом в  $\mathbb{H}$  и играет важную роль в описании собственных подмодулей.

**Предложение 2.** Если  $q \in \sigma_p(A)$ , то  $c(q) \in \sigma_p(A)$ , и  $E_{c(q)}(A) = R_f E_q(A)$ .

**Предложение 3.** Пусть  $q \in \sigma_p(A)$ , тогда  $E_q(A) \dot{+} E_{c(q)}(A)$  —  $\mathbb{F}$ -модуль.

**Предложение 4.** Для любого  $p \in K_{\mathbb{F}^*}(q)$  имеет место равенство

$$E_p(A) \dot{+} E_{c(p)}(A) = E_q(A) \dot{+} E_{c(q)}(A).$$

Таким образом,  $\mathbb{F}$ -модуль  $E_q(A) \dot{+} E_{c(q)}(A)$  не зависит от выбора представителя в  $K_{\mathbb{F}^*}(q)$  и называется *обобщенным собственным подмодулем*.

Итак, наша задача состоит в том, чтобы узнать, при каких  $p \in \mathbb{H}$  уравнение  $Ax = xp$  имеет ненулевые решения. Не нарушая общности, можно считать, что  $p$  удовлетворяет условиям  $p = p_1 + p_2\varepsilon$ ,  $p_1 \in \mathbb{F}$ ,  $p_2 \in \mathbb{R}_+$ . Для решения этой задачи необходимо перейти к матричной реализации оператора  $A$ :  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 R_f$ , где  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in M_n(\mathbb{H})$ . В свою очередь матрицы  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  допускают разложения  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0 + \mathcal{C}_0\varepsilon$ ,  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1\varepsilon$ , где  $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1 \in M_n(\mathbb{F})$ . Если представить вектор  $x \in \mathbb{H}^n$  как  $x = y + \varepsilon z$ , где  $y, z \in \mathbb{F}^n$ , то уравнение  $Ax = xp$  можно переписать в матричном виде:

$$\mathcal{A}^s w = w p_1 + C \bar{w} p_2, \quad (1)$$

где  $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{A}^s = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 f & -\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1 f \\ \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 f & \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 f \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{F})$ ,  $w = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2n}$ .

Если продолжить разложение далее:  $\mathcal{A}^s = \mathcal{A}_1^s + \mathcal{A}_2^s f$ , ( $\mathcal{A}_1^s, \mathcal{A}_2^s \in M_{2n}(\mathbb{R})$ );  $w = w_1 + w_2 f$ , ( $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_{2n}$ );  $p_1 = r_1 + r_2 f$ , ( $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ), то в этом случае равенство (1) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1^s w_1 - \mathcal{A}_2^s w_2 = w_1 r_1 - w_2 r_2 + C w_1 p_2 \\ \mathcal{A}_1^s w_2 + \mathcal{A}_2^s w_1 = w_1 r_2 + w_2 r_1 - C w_2 p_2 \end{cases}.$$

**Теорема 1.** В приведенных выше обозначениях число  $p = (r_1 + r_2 f) + p_2 \varepsilon$ , где  $p_2 \geq 0$ , является собственным значением  $\mathbb{F}$ -линейного оператора  $A$  тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1^s - C p_2 - r_1 E & -(\mathcal{A}_2^s - r_2 E) \\ \mathcal{A}_2^s - r_2 E & \mathcal{A}_1^s + C p_2 - r_1 E \end{bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) назовем *характеристическим уравнением*  $\mathbb{F}$ -линейного оператора  $A$ . Это уравнение дает возможность отыскания представителей всех классов сопряженности, принадлежащих спектру  $\mathbb{F}$ -линейного оператора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S.L.Adler, G.G.Emch *A rejoinder on quaternionic projective representations*, arXiv:hep-th/9704121v3 18 Apr 1997, 1–5

## Преимущества и недостатки компьютерного тестирования

*Ефанова Л. И.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

Тестирование играет важную роль в обратной связи в цепочке "преподаватель-обучаемый". При этом в очном тестировании преподавателем обучаемого возникают проблемы, связанные с субъективностью оценок преподавателей, невозможно одним преподавателем протестировать большой поток студентов. В связи с этим в рамках развития информационных технологий особенно актуальна автоматизация процесса тестирования - создание систем компьютерного тестирования, которые позволяли бы моделировать как знания, так и методики работы преподавателя, тем самым управляя процессом тестирования. Они не только обеспечивают значительную экономию времени преподавателя, но и позволяют быстро и объективно оценить реальные знания студента, то есть могут быть эффективно использованы студентом при самоподготовке к экзаменам и зачетам [1].

Чтобы увидеть насколько хорош такой метод контроля, рассмотрим его преимущества и недостатки.

Преимущества:

- Ориентированность на современные технические средства, на использование в образовательной среде компьютерных (автоматизированных) обучающих систем.
- Объективность оценивания.
- Экономия времени на проверку: система проверяет все сама.
- Сразу можно увидеть свой результат.
- Развитие мышления обучаемых, так как требуется не только выбрать правильный ответ, но и глубоко проанализировать его.
- Тестируемому некого стесняться - компьютер не может ни оценочно, ни эмоционально реагировать на не самые удачные ответы [2].

Недостатки:

- Относительная трудность создания хорошего теста.
- Сложная и неоднозначная система оценивания.
- Потеря индивидуального подхода. Тесты знаний апеллируют, прежде всего, к стандартному применению готовых знаний.
- Четко заданные временные рамки подходят не для всех.



- Невозможность, как правило, проанализировать ошибки, допущенные в самой работе.

Первые два недостатка можно компенсировать количеством специалистов, которые участвуют в создании теста. Остальные же - усовершенствованием систем тестирования, а именно применять тестовые задания с выбором и обоснованием ответов. Это, возможно, увеличит нагрузку на человеческий ресурс (проверяющих работы), но никак не перечеркнет все достоинства такого метода проверки знаний.

Вывод: На мой взгляд, лучший способ проверки знаний - это компьютерное тестирование. Ведь любые средства для проверки уровня достижений имеют свои границы применимости и недостатки. Использование тестирования для контроля знаний интересно и актуально. Особенно если учесть перечисленные рекомендации, сгладить недостатки этого метода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бобровников А.Э. *Принципы функционирования Web-сайта системы тестирования с фреймowo-иерархической структурой предметного наполнения в Internet.* // Информационные Технологии. –Т. 1, №11. – 2003
- [2] Янюшкин С.А., Янюшкин А.С. *Недостатки и ошибки компьютерного тестирования в вузах (на примере дисциплины "правоведение").* // Российская академия естественных наук. –Т. 1, №5. – 2008. – 1996. – С. 109-117.

## Матричный метод построения неприводимых представлений $*$ -алгебры, порожденной тремя проекторами с соотношениями

Ершова Ю. Ю.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

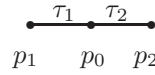
*В работе рассматривается применение матричного метода для описания неприводимых представлений  $*$ -алгебры, порожденной тремя проекторами с соотношениями типа Темперли-Либа и ортогональности.*

Задача описания  $*$ -представлений алгебр, порожденных  $n$  проекторами без соотношений, при  $n \geq 3$  является  $*$ -дикой (см. [1]). Ввиду важности этих алгебр, рассматривают  $*$ -алгебры, порожденные проекторами, связанными некоторыми дополнительными соотношениями.

**Определение 1.**  $A_{\Gamma, \tau}$  есть  $*$ -алгебра с  $\mathbf{1}$  над  $\mathbb{C}$  порожденная проекторами  $p_i$ ,  $i = \overline{0, 2}$  ( $p_i^2 = p_i^* = p_i$ ), с соотношениями

$$\begin{cases} p_i p_0 p_i = \tau_i p_i, & p_0 p_i p_0 = \tau_i p_0, & i = 1, 2, & 0 < \tau_i < 1, \\ p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0. \end{cases}$$

Такая алгебра ассоциирована с неориентированным графом с тремя вершинами без кратных ребер и петель



и является конечномерной.

Рассмотрим  $Q$  –  $*$ -колчан. Вершины колчана занумерованы произвольно  $i$  ( $i = \overline{0, 3}$ ), а множество стрелок  $\gamma_{ij}$ , начало которых вершина с номером  $i$ , конец – вершина с номером  $j$ , составляют стрелки  $\gamma_{i3} = \gamma_i$  и  $\gamma_{3i} = \gamma_i^*$ , ( $i = \overline{0, 2}$ ), при этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_i^* \gamma_i &= \varepsilon_i, & i &= \overline{0, 2}, \\ \gamma_i \gamma_i^* \gamma_0 \gamma_0^* \gamma_i \gamma_i^* &= \tau_i \gamma_i \gamma_i^*, & \gamma_0 \gamma_0^* \gamma_i \gamma_i^* \gamma_0 \gamma_0^* &= \tau_i \gamma_0 \gamma_0^*, & i &= 1, 2, \\ \gamma_1 \gamma_1^* \gamma_2 \gamma_2^* &= 0, & \gamma_2 \gamma_2^* \gamma_1 \gamma_1^* &= 0. \end{aligned}$$

С. А. Кругляком установлена эквивалентность категорий  $*$ -представлений алгебры  $A_{\Gamma, \tau}$  –  $Rep A_{\Gamma, \tau}$  и колчана  $Q$  –  $Rep Q$ .

Используя данный результат, сведем задачу полного описания неприводимых представлений  $A_{\Gamma, \tau}$  к матричной задаче описания неприводимых представлений соответствующего колчана.

По представлениям колчана  $Q$  получим неприводимые  $*$ -представления алгебры  $A_{\Gamma, \tau}$ :

- (1) при  $\tau_1 + \tau_2 = 1$  существует одно неприводимое представление размерности два:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 & \sqrt{\tau_1(1-\tau_1)} \\ \sqrt{\tau_1(1-\tau_1)} & 1-\tau_1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 & -\frac{\tau_2\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{1-\tau_1}} \\ -\frac{\tau_2\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{1-\tau_1}} & \frac{\tau_1\tau_2}{1-\tau_1} \end{pmatrix};$$

- (2) при  $\tau_1 + \tau_2 < 1$  существует одно неприводимое представление размерности три:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 & \sqrt{\tau_1(1-\tau_1)} & 0 \\ \sqrt{\tau_1(1-\tau_1)} & 1-\tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 & -\frac{\tau_2\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{1-\tau_1}} & \frac{\tau_2\sqrt{1-\tau_1-\tau_2}}{\sqrt{1-\tau_1}} \\ -\frac{\tau_2\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{1-\tau_1}} & \frac{\tau_1\tau_2}{1-\tau_1} & -\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2(1-\tau_1-\tau_2)}}{1-\tau_1} \\ \frac{\tau_2\sqrt{1-\tau_1-\tau_2}}{\sqrt{1-\tau_1}} & -\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2(1-\tau_1-\tau_2)}}{1-\tau_1} & \frac{1-\tau_1-\tau_2}{1-\tau_1} \end{pmatrix}.$$

Множество  $\Sigma_\tau$  – множество значений параметров  $\tau_1, \tau_2$ , при которых алгебра  $A_{\Gamma, \tau}$  имеет неприводимые  $*$ -представления. В процессе нахождения матриц представлений сразу получаем полное описание множества

$$\Sigma_\tau = \{\tau_1, \tau_2 | \tau_i \in (0, 1), i = 1, 2, \tau_1 + \tau_2 \leq 1\}.$$

Установлена эквивалентность построенных представлений представлениям данной алгебры, полученным в [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kruglyak S. A., Samoilenko Yu. S. *On complexity of description of representations of \*-algebras generated by idempotents* // Proc. Am. Math Soc. – **128** (2000), №6. – p.1655-1664.  
 [2] Иванов С. В., Москальова Ю. П. *Про \*-образення алгебр типу Темперлі-Ліба* // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". – 2005. – Вып. 19. – С. 191-198.

## Численная реализация параллельного алгоритма, вычисляющего напряжения в слоистой среде

*Жогло А. С.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ(500-П)

Применение параллельных вычислительных систем является стратегическим направлением развития вычислительной техники. Это обстоятельство вызвано не только принципиальным ограничением максимально возможного быстродействия обычных последовательных ЭВМ, но и практически постоянным наличием вычислительных задач, для решения которых возможностей существующих средств вычислительной техники всегда оказывается недостаточно.

Однако, до сих пор применение параллелизма не получило широкого распространения, из-за высокой, до недавнего времени, стоимости высокопроизводительных систем. Ситуация изменилась с появлением многоядерных процессоров, которые уже в 2006 г. использовались более чем в 70% компьютерных систем. В настоящее время сдерживание массового распространения параллелизма объясняется тем, что для проведения параллельных вычислений необходимо "параллельное" обобщение традиционной - последовательной - технологии решения задач на ЭВМ, что намного сложнее. Так, численные методы в случае многопроцессорных систем должны проектироваться как системы параллельных и взаимодействующих между собой процессов, допускающих исполнение на независимых процессорах [1, 2].

В данной работе рассматривается задача написания программы, реализующей параллельный алгоритм вычисления интеграла

$$I = \int_0^{\infty} f(u) du. \quad (1)$$

При решении задачи о плоской деформации многослойной среды, составленной из слоев, неограниченных в плане, применение метода интегральных преобразований Фурье приводит к вычислению интеграла вида (1), определяющего обратное преобразование Фурье.

Так, нормальное напряжение  $\sigma_y^{(k)}(x, y)$  в случае 1-й основной граничной задачи для  $n$ -слойного пакета со сцепленными слоями при симметричной нагрузке определяется выражением [3]:

$$\sigma_y^{(k)}(x, y) = \int_0^{\infty} F(u, \Delta, r) \cos\left(\frac{xu}{\lambda}\right) du, \quad (2)$$

где  $F(u, \Delta, r)$  – функция, определяемая элементами матриц

$$A^{(k)}, A^{(k)} = \prod_{j=1}^k a_j(\Delta_j, r_j),$$

$a_j(\Delta, r)$  – основная функциональная матрица 4-го порядка,

$\bar{q}_1(u), \bar{q}_2(u)$  – изображения Фурье действующих нагрузок,

$\Delta_k = \frac{E_{k+1}}{E_k}$ , где  $E_k$  – модуль Юнга,

$r_k = \frac{h_{k+1}}{h_k}$ , где  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,

$\lambda = \frac{h}{l}$ , где  $l$  – характерный параметр нагрузки.

Последовательный алгоритм вычисления интеграла (1) использует метод обрезания верхнего предела [4] по следующей схеме:

$$I = \int_0^A f(u) du \approx S = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} f(u) du, \quad (3)$$

где  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = H$ ,  $a_i = b_{i-1}$ ,  $b_i = a_i + H$ ,  $i = 2, \dots, k$ ; величина  $A = b_k$  определяется из условия:

$$\left| \int_{a_k}^{b_k} f(u) du \right| < \varepsilon, \quad (4)$$

В данной работе при построении параллельного алгоритма вычисления интеграла (1) существенным фактором являлось наличие двухядерного процессора, что определило количество процессов:  $N = 2$ .

Приведенный выше алгоритм (3) был разделен на две части:  $S_1$  и  $S_2$ , вычисляемые отдельными процессами, причем  $S = S_1 + S_2$ , где

$$S_1 = \sum_{i=1,3,\dots}^{k_1} \int_{a_i}^{b_i} f(u) du, \quad S_2 = \sum_{i=2,4,\dots}^{k_2} \int_{a_i}^{b_i} f(u) du, \quad (5)$$

при выполнении в каждом процессе условия, аналогичного условию (4).

Алгоритм (5) был реализован в последовательном и параллельном варианте, параллельная программа написана в среде программирования C#.

Каждый интеграл  $\int_{a_i}^{b_i} f(u) du$  в (3) и в (5) вычислялся с применением квадратурной формулы Симпсона с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Вычисления показали, что применение параллельного алгоритма дает заметный выигрыш во времени. Счет ведется приблизительно в 1,5 раза быстрее чем при использовании последовательного алгоритма.

**Замечание 2.** Так как напряжение в слоях  $\sigma_y^{(k)}(x, y)$  — функция параметров  $\Delta_k, r_k, \lambda$ , которая вычисляется в различных точках  $(x_j, y_j)$ , поэтому можно распараллелить не вычисление интеграла (1) по алгоритму (5), а вычисление величины  $\sigma_y^{(k)}(x, y)$  при различных значениях  $\Delta_k, r_k, \lambda, x_j, y_j$ , используя алгоритм (3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Эндрюс Г. Р. *Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования*. — М.: Вильямс, 2003. — 512 с.
- [2] Богачев К. Ю. *Основы параллельного программирования*. — М.: Бинум. Лаборатория знаний, 2003. — 342 с.
- [3] Шевляков Ю. А. *Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред*. — Киев-Одесса.: Вища школа, 1977. — 216 с.
- [4] Калиткин Н. Н. *Численные методы*. — М.: Наука, 1978. — 508 с.

# Описание множества допустимых параметров существования \*-представлений \*-алгебр, ассоциированных с графами Кокстера

*Иванова Ю.Е., Иванов С.В., к.ф.-м.н., ТНУ*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

*В данной статье рассматриваются \*-алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ , ассоциированные с графами Кокстера и порожденные системой образующих с соотношениями типа Темперли-Либа и ортогональности. Для \*-алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ , ассоциированной с конкретным графом Кокстера, выписаны формулы нетривиального неприводимого \*-представления и получены оценки множества параметров  $\tau$ , при которых существуют нетривиальные неприводимые \*-представления \*-алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ .*

В работе [1] рассмотрены \*-алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ , ассоциированные с графами-деревьями  $\Gamma$  и порожденные образующими  $p_i$ , где  $i \in V\Gamma$  - множество вершин графа  $\Gamma$ , с соотношениями:

$$\begin{aligned} p_i p_j p_i &= \tau_{ij} p_i, p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, & \text{если } \{i, j\} \in E\Gamma; \\ p_i p_j &= p_j p_i = 0, & \text{если } \{i, j\} \notin E\Gamma; \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E\Gamma$  - множество ребер графа  $\Gamma$ ,  $\tau : E\Gamma \rightarrow (0; 1)$  - некоторая расстановка чисел на ребрах графа. Для таких алгебр приведен и доказан алгоритм разметки дерева с использованием которого можно получить формулы нетривиального неприводимого \*-представления \*-алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ .

Графом Кокстера  $\Gamma$  называют конечный неориентированный граф  $\Gamma = (V, R)$  без кратных ребер и петель, где  $V = 1, \dots, n$ ,  $n = |\Gamma|$  - множество вершин,  $R$  - множество ребер  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ , где  $i, j \in V$ ,  $i \neq j$ , все ребра  $R$  которого делятся на несколько типов

$$R = \bigsqcup_{m=3}^{\infty} R_m, \quad (2)$$

где  $R_m$  - множество ребер графа, обозначенных числами  $m$ .

Рассмотрим граф Кокстера  $\Gamma$  (Рис. 1), для которого  $R = R_3$  и \*-алгебру  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ , ассоциированную с этим графом. Для существования нетривиального неприводимого \*-представления \*-алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$  необходимым и достаточным условием является корректное выполнение алгоритма разметки, заключающееся в том, что полученные в процессе выполнения алгоритма метки

должны быть положительными, за исключением последней, которая должна быть неотрицательной.

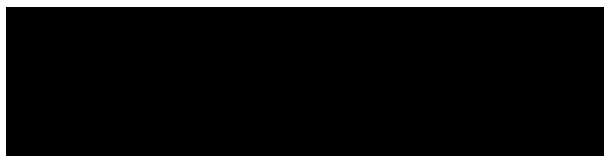


Рис.1 Это распределение ученых по их далекости от жизни

Проведем разметку дерева  $\Gamma$ , приведенного на Рис.1. После выполнения всех пунктов алгоритма дерево  $\Gamma$  получает следующие метки:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 - \frac{\tau_1}{a_1} = 1 - \tau_1, a_3 = 1 - \frac{\tau_1}{a_2} = 1 - \frac{\tau_1}{1 - \tau_1} = \frac{1 - 2\tau_1}{1 - \tau_1},$$

$$a_4 = 1 - \frac{\tau_2}{a_3} = \frac{1 - 2\tau_1 - \tau_2(1 - \tau_1)}{1 - 2\tau_1}, a_5 = 1 - \frac{\tau_2}{a_4} = \frac{1 - 2\tau_1 - \tau_2(2 - 3\tau_1)}{1 - 2\tau_1 - \tau_2(1 - \tau_1)} \quad (3)$$

С учетом условия корректности выполнения алгоритма получаем следующую систему ограничений на параметры  $\tau_1$  и  $\tau_2$ :

$$\begin{aligned} 1 - \tau_1 &> 0, \\ \frac{1 - 2\tau_1}{1 - \tau_1} &> 0, \\ \frac{1 - \tau_1}{1 - 2\tau_1 - \tau_2(1 - \tau_1)} &> 0, \\ \frac{1 - 2\tau_1}{1 - 2\tau_1 - \tau_2(2 - 3\tau_1)} &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение этой системы относительно  $\tau_1$  и  $\tau_2$  представлено графически на Рис.2.

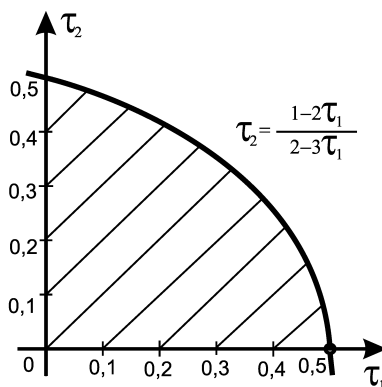


Рис.2



Таким образом, получены ограничения на параметры  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Неприводимое  $*$ -представление  $*$ -алгебры  $A_{\Gamma, \tau, \perp}$ , ассоциированной с деревом  $\Gamma$  существует тогда и только тогда, когда параметры  $\tau_1$  и  $\tau_2$  принадлежат области, представленной на Рис.2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иванов С.В., Москальова Ю.П. *Про  $*$ -образы алгебр типа Темперли-Либа.* // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". - 2006. - Вып.20. - С.113 - 122.

## Факторизация $A$ –самосопряженных матриц в алгебре $M_n(\mathbb{H})$

Караватская М. В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (500 ГРУППА)

В работе рассматриваются классы матриц в алгебре  $M_n(\mathbb{H})$ , порожденные неклассической инволюцией в  $\mathbb{H}$ . Решается задача факторизации таких матриц, рассматриваются следствия полученного разложения Такаги.

Пусть  $\mathbb{H}$  — вещественная алгебра кватернионов размерности 4 с каноническим базисом  $1, i, j, k$ . В этом случае каждый кватернион  $q$  представим в виде  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ ,  $q_t \in \mathbb{R}$ .

Линейный оператор  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  называется инволюцией в  $\mathbb{H}$ , если выполняются условия: (i)  $J^2 = I$ ; (ii)  $J(xy) = J(y)J(x)$ .

Можно доказать, что в вещественной алгебре  $\mathbb{H}$ , с точностью до изоморфизма, существует ровно две инволюции для кватерниона  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  определяемые равенством:

$$\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k, \hat{q} = q_0 + q_1i - q_2j + q_3k.$$

Композиция этих инволюций задает отображение  $q^c = q_0 - q_1i + q_2j - q_3k$ .

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{H})$ ,  $A = \|a_{st}\|$ . Введем следующие обозначения:

$$\bar{A} = \|\bar{a}_{st}\|, \hat{A} = \|\hat{a}_{st}\|, A^c = \|a_{st}^c\|.$$

Заметим, что операции  $A^* := \bar{A}^T$ ;  $A^a := \hat{A}^T$  являются инволюциями в вещественной алгебре  $M_n(\mathbb{H})$ . Помимо обычной классификации матриц в алгебре  $M_n(\mathbb{H})$  относительно инволюции  $(*)$ , рассмотрим классы матриц относительно инволюции  $(^a)$ .

Матрица  $A$  назовем  $a$ –самосопряженной, если  $A = A^a$ . Основная цель настоящей работы — рассмотреть проблему факторизации таких матриц и ее следствия. Так, для  $a$ –самосопряженной матрицы получен аналог так называемого разложения Такаги.

**Теорема 1.** Если матрица  $A \in M_n(\mathbb{H})$  является  $a$ –самосопряженной, то она допускает разложение вида:

$$A = U\Sigma U^a,$$

где  $U$ –унитарная матрица, столбцы которой образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы  $AA^c$ ,  $\Sigma$ – неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой являются

неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы  $AA^c$ , соответствующих этим собственным векторам.

Пусть  $H$  — правый  $\mathbb{H}$ -модуль размерности  $n$ ,  $x, y \in H$ . В этом модуле определим внутреннее произведение  $[x, y] := y^a x$ .

Для данного внутреннего произведения имеет место аналог процесса ортогонализации Грамма-Шмидта.

**Лемма 1.** Пусть заданы векторы  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{H}^n$ ,  $k \leq n$ . Тогда существуют векторы  $y_1, y_2, \dots, y_k \in \mathbb{H}^n$  такие, что  $\langle y_1, \dots, y_k \rangle_{\mathbb{H}} = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_{\mathbb{H}}$ , причем  $[y_t, y_s] = 0$ ,  $t \neq s$ ,  $[y_t, y_t] = \begin{cases} 1, & t \leq r \\ 0, & t > r \end{cases}$ , где  $r = \text{rank} X^a X$ , а  $X = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k\|$ .

Кроме того, в работе доказан аналог условия ортогональности собственных векторов самосопряженных матриц.

**Лемма 2.** Собственные векторы  $x, y \in \mathbb{H}^n$   $a$ -самосопряженной матрицы  $A \in M_n(\mathbb{H})$ , отвечающие комплексным собственным значениям из различных классов сопряженности, удовлетворяют соотношению  $[x, y] = 0$ .

В отличие от самосопряженных матриц мы можем, вообще говоря, говорить о диагонализуемости  $a$ -самосопряженной матрицы только как о дополнительном свойстве. Опираясь на спектральные свойства кватернионных матриц, а также на леммы 1, 2, получен следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{H})$  является  $a$ -самосопряженной и диагонализуемой, т.е.  $A = S\Lambda S^{-1}$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица. Тогда матрица  $S$  является  $a$ -унитарной ( $S^{-1} = S^a$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р.Хорн, Ч.Джонсон *Матричный анализ*, М:Мир, 1989, 655 с.
- [2] S. De Leo *Hypercomplex Group Theory*, arXiv:physics/9703033 v1 31 March 1997, 1–18

## Использование алгоритмов машинного обучения для выбора оптимальной стратегии выигрыша в покер-системах

*Лесков Д. М.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

На сегодняшний день покер является одной из самых распространенных карточных игр в мире. Существует множество компьютерных игр и программ, связанных с покером, но в тоже время Покер-систем способных противостоять человеку создано очень мало. Одна из таких компьютерных программ Polaris, разработанная группой Computer Poker Research Group (CPRG) из канадского университета University of Alberta [1]. Данная модель игры была разработана для лимитированной версии покера Техасского Холдема [2] и не использовала машинное обучение [3]. Последующая версия системы Polaris претерпела как минимум два важных изменения - была существенно расширена игровая покерная модель (теперь соперникам стало гораздо сложнее использовать слабости программы), а также в систему был добавлен элемент обучения - теперь программа может учиться на действиях и ошибках соперников. Кроме того, Polaris теперь может приспосабливаться к сопернику и выбирать разные стратегии [4] в зависимости от того, кто против него играет.

Данная статья посвящена разработке и использованию алгоритмов машинного обучения для выбора оптимальной стратегии выигрыша в Покер системах. В отличие от программы Polaris данная система разрабатывается для безлимитного Техасского Холдема [2].

При разработке покерной системы были поставлены следующие цели и задачи:

- Разработать стратегию игры в покер для программной реализации на основе изученной информации.
- Проанализировать стратегии при различных уровнях риска (поведения) игры компьютера.
- Применить алгоритмы машинного обучения для повышения игры компьютера.
- Реализовать покер-систему в сфере Delphi удовлетворяя вышеперечисленные цели.

Для анализа стратегии необходимо определить наиболее оптимальную формулу риска, учитывая количество игроков за столом. Этого можно достичь, исследуя игру нескольких компьютеров, с разным поведением, друг с другом. Это позволило бы улучшить стратегию игры компьютера.

В ходе игры компьютера необходимо вести статистику игры для каждого из игроков, сидящих за покерным столом. Опираясь на полученные статистические данные, компьютер должен будет определить лучшего игрока за столом. В дальнейшем изучая игру этого игрока, принимать решение необходимо опираясь не только на ранее заданную стратегию, но и на приобретённый опыт в похожих ситуациях. Это позволит узнать, насколько изначальная стратегия компьютера верна и эффективна. Так же применение этой статистики в игре увеличит шансы компьютера распознать блеф других игроков.

В качестве алгоритмов машинного обучения для реализации вышепоставленной задачи можно использовать следующие алгоритмы: дерево принятия решений, генетический алгоритм, байесовская сеть (или Байесовская сеть доверия), нейронные сети (ИНС) [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <http://sbuki.blogspot.com/>.
- [2] <http://www.erapokera.com/>.
- [3] <http://teormin.ifmo.ru/education/machine-learning/>.
- [4] <http://ru.pokerstrategy.com/>.

## Колебания нагруженной струны с переменными характеристиками

Певнева С. В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

*В данной работе с помощью операторных методов математической физики исследована спектральная задача о малых поперечных колебаниях нагруженной струны с переменными характеристиками.*

Рассмотрим на промежутке  $(0, l)$  задачу о колебаниях закрепленной на концах струны, в нескольких точках  $x = a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) которой помещены сосредоточенные массы  $m_i$  (бусинки – материальные точки с массой). Математическая модель данной задачи может быть записана в следующем виде

$$-\frac{d}{dx} \left( p_i(x) \frac{du_i}{dx} \right) + q_i(x) u_i(x) = \lambda r_i(x) u_i(x), \quad x \in (a_{i-1}, a_i), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = l,$$

с краевыми условиями

$$u_1(0) = u_n(l) = 0, \quad (2)$$

а также со следующими условиями сопряжения

$$u_i(a_i - 0) = u_{i+1}(a_i + 0), \quad (3)$$

$$T_i [p_i(a_i) u_i'(a_i - 0) - p_{i+1}(a_i) u_{i+1}'(a_i + 0)] = m_i \lambda u_i(a_i \pm 0),$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

В задаче (1)–(3) функции  $p_i(x)$ ,  $q_i(x)$ , и  $r_i(x)$  заданы и неотрицательны; далее предполагаем, что  $p_i(x)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $(a_{i-1}, a_i)$  для любого  $i$ , а  $q_i(x)$  и  $r_i(x)$  – непрерывны на этом отрезке. Предполагаем также, что  $p_i(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q_i(x) \geq q_0 > 0$ .

Данная задача сводится к спектральной задаче вида  $Au = \lambda u$ , где  $A$  – оператор с дискретным спектром, действующий в некотором гильбертовом пространстве. Особенностью данной задачи является то, что уравнение задается в  $n$  областях и за счет наличия бусинок, появляется дополнительный спектральный параметр  $\lambda$  в условиях сопряжения.

Исходя из особенности задачи, в качестве основного гильбертового пространства  $\mathcal{H}$  здесь естественно взять пространство

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^n L_2(a_{i-1}, a_i; r_i(x)) \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}$$

с весами  $r_i(x)$  и скалярным произведением

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} r_i(x) u_i(x) v_i(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{T_i} u(a_i) v(a_i),$$

где  $\hat{u} = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), u_1(a_1), \dots, u_{n-1}(a_{n-1})\}$ . Соответственно норма, порожденная данным скалярным произведением, имеет вид

$$\|\hat{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} r_i(x) |u_i(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{T_i} |u(a_i)|^2.$$

Закон, по которому должен действовать оператор  $A$ , заданный на плотном множестве в  $\mathcal{H}$ , получается из уравнения (1), если его обе части разделить на  $r_i(x)$ , а также из учета условий сопряжения; тогда

$$A\hat{u}(x) := \left( \left( -\frac{1}{r_i(x)} \frac{d}{dx} \left( p_i(x) \frac{du_i}{dx} \right) + q_i(x) u_i(x) \right)_{i=1}^n ; \right. \\ \left. \left( \frac{T_i}{m_i} (p_{i+1}(a_i) u'_{i+1}(a_i) - p_i(a_i) u'_i(a_i)) \right)_{i=1}^{n-1} \right).$$

Что касается выбора области определения  $\mathcal{D}(A)$  оператора  $A$ , то он определяется дифференциальным выражением для оператора  $A$ , краевыми условиями, а также условиями сопряжения

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ \hat{u}(x) \in \bigoplus_{i=1}^n C^2[a_{i-1}; a_i] \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{R} \mid u_1(0) = u_n(l) = 0, \right. \\ \left. u_i(a_i) = u_{i+1}(a_i) \right\}.$$

Введенный оператор симметричен и положительно определен в  $\mathcal{H}$ ,  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$  и энергетическое пространство  $\mathcal{H}_A$  компактно вложено в  $\mathcal{H}$ . Исходя из полученных свойств, можно сформулировать следующий результат

**Теорема 1.** *Задача о колебаниях нагруженной струны с переменными характеристиками (1)–(3), имеет дискретный положительный спектр*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

и систему собственных функций  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , полную и ортогональную в  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}_A$ , при этом выполнены следующие формулы ортогональности

$$(u_k, u_j) = \delta_{kj}, \quad (u_k, u_j)_{\mathcal{H}_A} = \lambda_k \delta_{kj}.$$

Автор выражает благодарность Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постановку задачи и руководство работой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // Учебное пособие. – 6-е изд., – М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [2] Загора Д.А., Копачевский Н.Д. Задачи и указания к их решению по курсу "Операторные методы математической физики" // – Симферополь, ТНУ, 2004, 86с.
- [3] Копачевский Н.Д. Операторные методы математической физики // – Симферополь, ТНУ, 2001, 105с.



## Об оценках решения бесконечной системы в осесимметричной задаче термоупругости для кругового цилиндра

Пужкая Я. Ю.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

В работах [1, 2] рассмотрено напряженное состояние кругового цилиндра конечной длины, вызванное осесимметричным температурным полем

$$T(\rho, \zeta) - T_0 = T_{00} + T_2 \rho^2, \quad (1)$$

где  $T_{00}, T_2$  - постоянные. Решение соответствующей краевой задачи методом суперпозиции приведено [1, 2] к оценкам решения следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} t_n X_n = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}; \\ s_j Y_j = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} - \frac{a+\nu}{i-\nu} \alpha_T T_2 \frac{4}{\lambda_j^2}; \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим решение системы (2) методом лимитант [2]. Суть метода состоит в оценке выражений

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\frac{C_n}{t_n} + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^M Y_j \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}}{\psi_n + \frac{1}{t_n} \sum_{n=1}^M \frac{k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}}, \quad (n = N + 1, N + 2, \dots) \\ W_j &= \frac{\frac{D_j}{s_j} + \frac{1}{t_n} \sum_{n=1}^N X_n \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}}{\phi_j + \frac{1}{s_j} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2}}, \quad (j = M + 1, M + 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Данное исследование было проведено для кубообразного цилиндра ( $\zeta_0 = 1$ ) при  $\nu = \frac{1}{3}$  для девяти первых неизвестных, и было показано, что все неизвестные определяются с точностью до 2,5% (табл. 1).

Таблица 1

$n, j$	$X_n^-$	$X_n^+$	$\Delta, \%$	$Y_n^-$	$Y_n^+$	$\Delta, \%$
1	0.26407	0.26461	0.1	1.20495	1.20589	0.04
2	0.60268	0.60458	0.2	0.88477	0.88707	0.1
3	0.70770	0.71103	0.2	0.80087	0.80463	0.2
4	0.74337	0.74814	0.3	0.77112	0.77635	0.3
5	0.75696	0.76320	0.4	0.75866	0.76535	0.5
6	0.76226	0.76996	0.5	0.75284	0.76078	0.5
7	0.76409	0.77319	0.6	0.74995	0.75950	0.6
8	0.76437	0.77482	0.7	0.74843	0.75931	0.7
9	0.76392	0.77566	0.8	0.74758	0.75974	0.8
>9	0.74389	0.77908	2.5	0.74389	0.77908	2.5

**Теорема 1.** Для парной бесконечной системы существуют предельные выражения лимитант

$$V_k^{*p} = \frac{b_k + \sum_{n=1}^p a_{k,n} \check{Y}_n}{\rho_k + \sum_{m=1}^p a_{k,m} (1 - \check{Y}_m)}, \quad W_k^{*p} = \frac{\beta_k + \sum_{n=1}^p \alpha_{k,n} \check{X}_n}{r_k + \sum_{m=1}^p \alpha_{k,m} (1 - \check{X}_m)}, \quad k = p+1, p+2, \dots$$

При этом точные нижние и верхние грани предельных лимитант

$$h^{*p} = \inf_{k \geq p+1} \{V_k^{*p}, W_k^{*p}\}, \quad H^{*p} = \sup_{k \geq p+1} \{V_k^{*p}, W_k^{*p}\}$$

оценивают решение бесконечной системы следующими неравенствами:

$$\check{X}_k + h^{*p} \tilde{X}_k \leq X_k \leq \check{X}_k + H^{*p} \tilde{X}_k, \quad \check{Y}_k + h^{*p} \tilde{Y}_k \leq Y_k \leq \check{Y}_k + H^{*p} \tilde{Y}_k, \quad k = \overline{1, p};$$

$$h^{*p} \leq X_k \leq H^{*p}, \quad h^{*p} \leq Y_k \leq H^{*p}, \quad k = p+1, p+2, \dots \quad (4)$$

На основании теоремы 1 было проведено вычисление системы (2) (табл. 2).

Таблица 2

$n, j$	$X_n^-$	$X_n^+$	$\Delta, \%$	$Y_n^-$	$Y_n^+$	$\Delta, \%$
1	0.264497	0.264553	0.01	1.2055	1.20556	0.004
2	0.603843	0.604118	0.02	0.886054	0.886398	0.02
3	0.709628	0.710254	0.04	0.802846	0.803573	0.05
4	0.745974	0.747072	0.07	0.773723	0.774959	0.08
5	0.760175	0.76185	0.1	0.761795	0.763641	0.1
6	0.766006	0.768338	0.2	0.756468	0.759001	0.2
7	0.768285	0.771327	0.2	0.753979	0.757247	0.2
8	0.768943	0.772725	0.2	0.7528	0.756827	0.3
9	0.768833	0.773365	0.3	0.752254	0.757042	0.3
>9	0.751933	0.773723	1.4	0.751933	0.773723	1.4

Сравнение результатов вычисления неизвестных по методу лимитант (табл. 1) и по модифицированному методу (табл. 2) позволяет заключить, что использование модифицированного метода значительно уменьшает объем вычислений и приводит к более точным результатам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гринченко В.Т. *Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров*. -К: Наук. думка, 1978. 264 с.
- [2] Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. -К: Наук. думка, 1970. 240 с.
- [3] Чехов В.М., Пан А.В. *Про граничні вирази лімітант Кояловича*// Доповіді НАН України. -2007. - № 3. - С.31-36.

## Построение треугольных порций поверхностей с использованием алгоритма кастельжо и вырожденной порции поверхности Безье

*Сатанина М. Н.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (ГРУППА 500-П)

### 1. Алгоритм Кастельжо по построению треугольных порций.

Алгоритм Кастельжо построения треугольных порций поверхностей основан на использовании барицентрических координат на плоскости. Пусть в пространстве  $E^3$  задан треугольник  $\triangle ABC$  и произвольная точка  $P$ . В этом случае барицентрические координаты любой точки  $P$ , лежащей внутри  $\triangle ABC$  равны:

$$v = \frac{S_1}{S} \quad \nu = \frac{S_2}{S} \quad \omega = \frac{S_3}{S}. \quad (1)$$

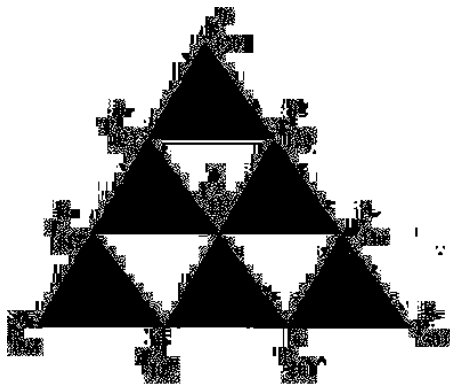
где  $S = S_{\triangle ABC}$ ,  $S_1 = S_{\triangle PBC}$ ,  $S_2 = S_{\triangle APC}$ ,  $S_3 = S_{\triangle ABP}$ . Очевидно, что  $v + \nu + \omega = 1$ .

Рассмотрим пример построения треугольной порции, каждая граница которой является кривой Безье  $n$ -го порядка.

**Определение 1.** *Кривая Безье  $n$ -го порядка — параметрическая кривая, задаваемая выражением*

$$r(u) = \sum_{i=0}^n C_n^i b_i (1-u)^{n-i} u^i \quad (2)$$

Можно показать, что для построения такой порции необходимо  $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  точек. Пусть  $n=3$ , соответственно  $N=10$ . Произведем построение, алгоритм которого показан на рисунке ??.



В инцидентном треугольнике  $\triangle ABC$  выберем конкретную точку  $P(v^*, \nu^*, \omega^*)$ . Для комбинации  $(v^*, \nu^*, \omega^*)$  в каждом заштрихованном треугольнике формируем точки, которые в свою очередь формируют новое семейство точек, которые также разбиваются на треугольники аналогичным способом. В новых треугольниках также ищем точки, соответствующие  $(v^*, \nu^*, \omega^*)$  и так далее, пока не останется одна единственная точка. Она и будет точкой, принадлежащей искомой поверхности, то есть точкой, инцидентной заданной порции поверхности, с соответствующими барицентрическими координатами. Перебирая все комбинации  $(v, \nu, \omega)$ , получим поверхность, соответствующую базисному треугольнику [1].



#### Формирование треугольных массивов управляющих точек

Аналогично возможно построение для любого  $n$ .

Для того, чтобы не решать задачу определения точки в каждом текущем треугольнике, поступают следующим образом: выбирают базисный треугольник с координатами вершин  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ . Тогда можно построить линейное преобразование, переводящее произвольный треугольник в базисный и обратно. Перебирая все точки базисного, можно получить все точки произвольного треугольника.

2. Построение треугольных порций поверхности по Безье.

Бикубическая порция поверхности по Безье имеет следующий вид [2]:

$$r(\bar{u}, \bar{v}) = (1, u, u^2, u^3) * M * B * M^T * (1, v, v^2, v^3)^T, \quad (3)$$

где  $M$  - матрица, составленная из коэффициентов полинома Бернштейна, а  $B$  — матрица управляющих точек.



Управляющие точки  $B$  (слева: общий случай, справа: вырожденный)

Рассмотрим, как можно получить треугольные порции поверхности, оставаясь в рамках выбранной математической модели (порции поверхности по Безье). Этого можно достичь путем вырождения одной из сторон четырехугольной порции в точку (см. рис. ??). В этом случае границами будут являться те же самые кривые Безье  $n$ -ой степени, что и в рассмотренном ранее случае. Поэтому можно получить геометрический эквивалент порций по Кастельжо, задав значения средних точек соответствующим образом.

В настоящее время проводится исследование эффективности этих двух алгоритмов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Денискин Ю.И. *Геометрическое моделирование криволинейных объектов с использованием барицентрических координат*. эл. жур. "Прикладная Геометрия" Выпуск 1, номер 1, декабрь 1999, Московский Авиационный институт.
- [2] I.D.Faux, M.J.Pratt *Computational Geometry For Design And Manufacture*. Department of Mathematics, Cranfield Institute of Technology С. 117 - 119.

## Об обратимости оператор-функции, аналитической в некоторой точке

Семкина Е. В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 404)

*В работе получены явные формулы для вычисления коэффициентов разложения в ряд Маклорена оператор-функции  $A^{-1}(\lambda)$  через коэффициенты разложения в ряд Маклорена оператор-функции  $A(\lambda)$ .*

Пусть  $A(\lambda)$  — самосопряжённая оператор-функция в односвязной и симметричной относительно вещественной оси области  $\Lambda$ , допускающая представление  $A(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$ , где  $A_+(\lambda)$  голоморфна и голоморфно обратима в  $\Lambda$ , а  $\sigma(Z) \subset \Lambda$  (см., например, [1]). Тогда существуют самосопряжённые операторы  $F, F^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ , которые симметризуют оператор  $Z$  справа и слева соответственно:

$$(ZF)^* = ZF, \quad (F^{-1}Z)^* = F^{-1}Z.$$

По теореме В.И. Ломоносова (см. [2]), если  $\Gamma \subset \Lambda$  — произвольный контур, охватывающий  $\sigma(Z)$ , то операторы  $F, F^{-1}$  определяются формулами:

$$F := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} A^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad F^{-1} := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda I - Z^*)^{-1} A(\lambda) (\lambda I - Z)^{-1} d\lambda$$

Отсюда видно, что при вычислении симметризаторов необходимо иметь не только заданные оператор-функции, но и обратные к ним. Таким образом возникает задача о нахождении обратной оператор-функции.

Пусть  $A(\lambda)$  — оператор-функция, аналитическая в точке  $\lambda = 0$  и  $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{L}(E)$  — коэффициенты разложения  $A(\lambda)$  в ряд Маклорена ( $E$  — банахово пространство):

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots \quad (1)$$

Пусть  $B_0, B_1, \dots \in \mathcal{L}(E)$  — коэффициенты разложения в ряд Маклорена оператор-функции  $A^{-1}(\lambda)$ :

$$A^{-1}(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots \quad (2)$$

Из соотношений (1), (2) получаем тождества:

$$A(\lambda) \cdot A^{-1}(\lambda) \equiv A^{-1}(\lambda) \cdot A(\lambda) \equiv I \quad (3)$$

Подставляя разложения для  $A(\lambda)$  и  $A^{-1}(\lambda)$  в тождества (3):

$$(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots) \cdot (B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots) \equiv$$

$$\equiv (B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots) \cdot (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots) \equiv I$$

и приравнявая коэффициенты при равных степенях  $\lambda$ , получим две симметричных системы уравнений относительно коэффициентов  $B_0, B_1, \dots$

Определим рекуррентно две последовательности операторов:

$$\delta_k := A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n A_0^{-1} \delta_{k-n}, \quad \bar{\delta}_k := A_k - \sum_{n=1}^{k-1} \bar{\delta}_n A_0^{-1} A_{k-n}. \quad (4)$$

**Лемма 1.** *Верна следующая формула*

$$B_k = -A_0^{-1} \delta_k A_0^{-1} = -A_0^{-1} \bar{\delta}_k A_0^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

**Лемма 2.** *Матрица  $(k+1) \times (k+1)$  вида*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & A_0 \\ 0 & \dots & A_0 & A_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0 & A_1 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

где  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\exists A_0^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ , имеет обратную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} -A_0^{-1} \delta_k A_0^{-1} & -A_0^{-1} \delta_{k-1} A_0^{-1} & \dots & A_0^{-1} \\ -A_0^{-1} \delta_{k-1} A_0^{-1} & \dots & A_0^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

**Определение 1.** *Пусть матрица разбита на 4 блока следующим образом:*

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right),$$

причём блок  $A_{11}$  обратим. Тогда определителем Шура этой матрицы называется оператор

$$\det_S \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}.$$



Далее введём следующие обозначения:

$$\Delta_1 := A_1, \Delta_2 := \left( \begin{array}{c|c} A_0 & A_1 \\ \hline A_1 & A_2 \end{array} \right), \Delta_k := \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & \dots & 0 & A_0 & A_1 \\ 0 & \dots & A_0 & A_1 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0 & \dots & A_{k-3} & A_{k-2} & A_{k-1} \\ \hline A_1 & \dots & A_{k-2} & A_{k-1} & A_k \end{array} \right).$$

**Лемма 3.** В приведённых обозначениях верна следующая формула:

$$\delta_k = \det_S \Delta_k = A_k - (A_1, A_2, \dots, A_{k-1}) \cdot \left( \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & A_0 \\ 0 & \dots & A_0 & A_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{k-2} \end{array} \right)^{-1} \cdot \left( \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{k-1} \end{array} \right),$$

$$k = 3, 4, \dots \quad (7)$$

В процессе решения поставленной задачи получены следующие результаты. Для оператор-функции  $A(\lambda)$ , аналитической в точке  $\lambda = 0$ , с коэффициентами разложения  $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{L}(E)$ , при условии, что существует  $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ , каждый из коэффициентов  $B_k$  разложения обратной оператор-функции  $A^{-1}(\lambda)$  выражается с помощью коэффициентов  $A_1, \dots, A_k$  и  $A_0^{-1}$  по формуле

$B_k = -A_0^{-1} \delta_k A_0^{-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\delta_k$  – определитель Шура соответствующей матрицы  $k$ -го порядка.

Автор благодарит Копачевского Н.Д. за постановку задачи, проявленное внимание и руководство работой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н. Д. *Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций*. – Симферополь: ООО "Форма 2009. – 128 с.
- [2] Вирозуб А.И., Мацаев В.И. *О спектральных свойствах одного класса самосопряжённых оператор-функций* // *Функциональный анализ и его приложения*. – 1974. – 8, №1. – с.1 –10.

## Разработка вычислителя Fuzzy Calculator на базе нечеткой логики

*Солодилова В. В.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

В ряде задач, связанных, например, с проведением расчетов экономической эффективности сделок, их возможных издержек, многие числовые показатели могут быть определены только приблизительно, неточно. Для расчетов с такими неточными, нечетко определенными числами был разработан программируемый Fuzzy Calculator (FC). Он позволяет наряду с обычными вычислениями над точными, четкими числами, производить математические расчеты с нечеткими числовыми величинами [2,5].

Пусть  $X = \{x\}$  – универсальное множество, описывающее всю проблемную область. Нечеткое множество  $A \subseteq X$  – это набор пар  $\{(x, \mu^A(x))\}$ , где  $x \in X$  и  $\mu^A : X \rightarrow [0, 1]$  – функция принадлежности, которая представляет собой субъективную меру соответствия элемента  $x$  нечеткому множеству  $A$  [2]. Функция  $\mu^A(x)$  принимает значения от нуля (обозначает абсолютную непринадлежность) до единицы (абсолютная принадлежность элемента  $x$  нечеткому множеству  $A$ ). Нечеткое число – это нечеткое множество  $A$ , определенное на множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$ , если его функция принадлежности нормальна и выпукла [2], т. е.

$\sup \mu^A(x) = 1, x \in \mathbb{R}, x \leq y \leq z \Rightarrow \mu^A(y) \geq \min(\mu^A(x), \mu^A(z))$ . Само нечеткое число может быть описано словесно. Кроме того, оно может быть представлено графически. Горизонтальная ось такого графика – диапазон обычных чисел, а вертикальная – степень уверенности в их истинности (от 0 до 1).

Fuzzy Calculator используется при выполнении арифметических операций над нечеткими числами. Он предназначен для пользователей, сталкивающихся с необходимостью учета числовых величин, точные значения которых не определены или неизвестны, но о которых все же существуют некоторые соображения относительно их порядка и/или характера [5].

Программно Fuzzy Calculator реализован с помощью Microsoft Visual Studio C#2005. Для работы с нечеткими множествами используется класс Fuzzy.

```
public class Fuzzy
{
    public ArrayList a, mu; //Arravs for set of pairs (x, mu(x))
    public double step;    //Approximation step
```

```

        public void Clear(); //Initialization
        public void Sort (); //Sorting tool
        public Fuzzv(); //Constructor
    public bool getNumberFromString(string str); //Input tool
    public double getValue(double v); //Get mu(x)
        public static Fuzzv operator +(Fuzzv x, Fuzzv y);
        public static Fuzzv operator -(Fuzzv x, Fuzzv y);
        public static Fuzzv operator *(Fuzzv x, Fuzzv y);
        public static Fuzzv operator /(Fuzzv x, Fuzzv y);
    }

```

Коллекции  $a$ ,  $mu$  используются для хранения нечеткого числа в виде множества пар  $(x, mu(x))$ , переменная  $step$  используется для аппроксимации нечеткого числа по дискретным точкам. Арифметические операции выполняются с помощью перегруженных операторов. Для примера рассмотрим оператор сложения.

```

public static Fuzzy operator +(Fuzzy x, Fuzzy y) {
    Fuzzy res = new Fuzzy();
    for (double z = (double)x.a[0] + (double)y.a[0]; z <=
        (double)x.a[x.a.Count - 1] + (double)y.a[y.a.Count - 1];
        z += x.step)
    {
        double X, Y, val = -1e100;
        for (X = (double)x.a[0]; X <= (double)x.a[x.a.Count - 1];
            X += x.step)
        {
            Y = z - X;
            if (Y > (double)y.a[y.a.Count - 1]) continue;
            if (Y < (double)y.a[0]) break;

            val = Math.Max(val, Math.Min(x.getValue(X), y.getValue(Y)));
        }
        if (val < 1e-99) continue;
        res.a.Add(z);
        res.mu.Add(val);
    }
    res.Sort();
    return res;
}

```

}

Для каждой точки  $z$  из области определения нечеткого числа  $X + Y$  вычисляется значение  $\mu(z)$  (с шагом  $step$ ). Эти значения представляют собой нечеткое множество, которое является результатом операции. Оно будет записано в объекте  $res$  и возвращено функцией. Интерфейс программы представлен на рис.1.

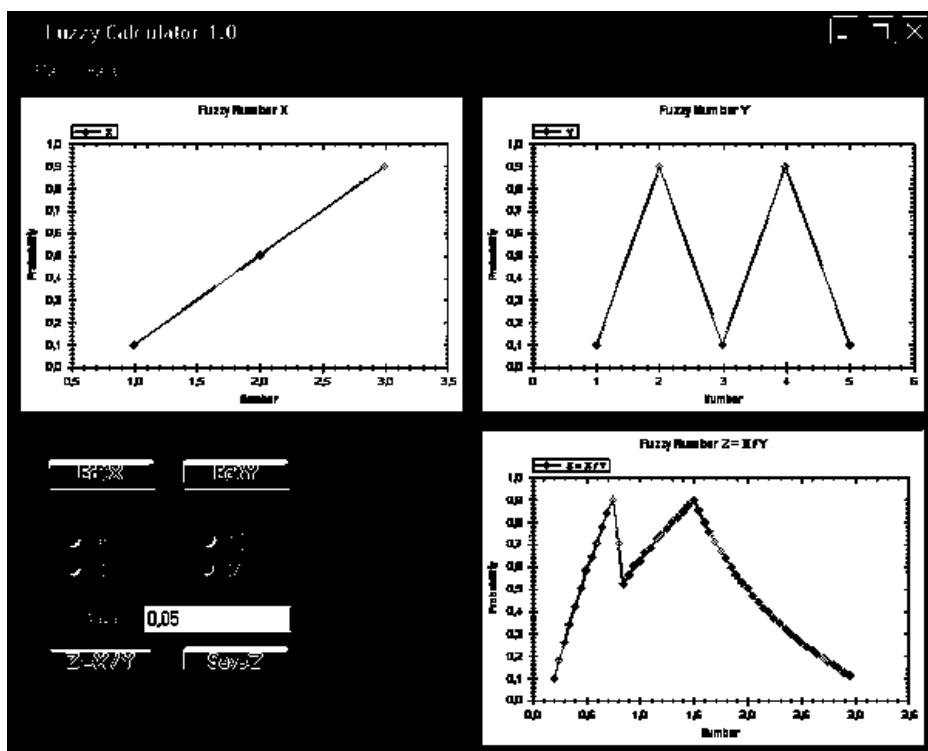


Рис.1. Интерфейс

Ввод данных производится из файла или с клавиатуры по нажатию кнопок *Edit X*, *Edit Y*. Подразумевается, что данными являются два нечетких множества, к которым нужно применить одну из реализованных операций. По нажатию кнопок ввода вызывается диалоговое окно (рис.2).

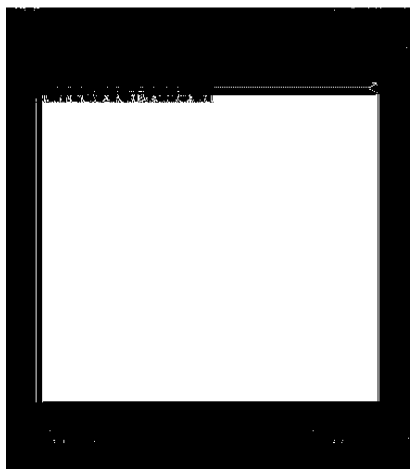


Рис. 2. Ввод данных



Рис. 3. Сохранение результата

Для ввода нечеткого множества из файла необходимо нажать кнопку *Open File*, выбрать файл, нажать *OK*. Для ввода нечеткого числа с клавиатуры необходимо ввести его в текстовое поле и нажать *OK*. Формат ввода: ввод должен состоять из одной строки; в строке должно содержаться четное количество чисел; каждая пара чисел должна являться парой  $(x, \mu(x))$ ; числа должны быть разделены ровно одним пробелом; не должно быть лидирующих и последующих пробелов; не должно быть двух пар с одинаковым числом  $x$ . Вычисление происходит следующим образом. После ввода нечеткие числа  $X$  и  $Y$  отображаются на графиках (синим и зеленым цветом соответственно). Если числа введены верно, нужно выбрать арифметическую операцию, шаг аппроксимации [6] и нажать кнопку с изображением выбранной операции ( $Z = X + Y, \dots$ ). В результате в объекте *publicFuzzy z* будет содержаться результат операции. Результат отобразится на графике красным цветом.

Результат можно сохранить либо скопировать в буфер обмена нажатием кнопки *Save Z*. Для сохранения нечеткого числа в файл необходимо нажать *Save File*, выбрать название файла, нажать *OK* (рис.3). Стоит помнить, что для нечетких чисел, содержащих ноль, результат операции умножения и деления может иметь разрыв в точке ноль.

Данная программа использует алгоритм поточечной аппроксимации [6] с заданным шагом без оптимизации. Поэтому алгоритм будет неэффективен на больших объемах данных либо при вычислениях с большой точностью.

Плюсом данного алгоритма является его идеальная работа на дискретных наборах данных. Для таких задач рекомендуется использовать шаг  $step=1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Заде Л. *Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений*. - М.: Мир. - 1976.- 167 с.
- [2] Ротштейн А.П., Кательников Д.И. *Идентификация нелинейных объектов нечёткими базами знаний - Кибернетика и системный анализ.-1998.-№5.-С.53-61.*
- [3] Бочарников В.П., Минаев Ю.Н., Свешников С.В. и др. *Если вы не уверены в числах, используйте Fuzzy Calculator, Компьютерное обозрение №12(36), 1996. - С.20-21.*
- [4] Бочарников В.П. *Fuzzy-технология: математические основы. Практика моделирования в экономике. Санкт-Петербург, 1995 г.*
- [5] Вороновский Г.К., Махотило К.В., Петрашев С.Н, Сергеев С.А. *Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности - Харьков: Основа.- 1997.-212 с.*
- [6] Иваницкий А.Ю., Морозов В.А., Кармазин В.Н. *Метод поточечной невязки для несовместных систем уравнений и неравенств с приближенными данными*

# Метод Лагранжа в пространствах Фреше и его применение к вариационным задачам

Стародубцева Е. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

В вариационном исчислении рассматриваются два важных типа задач нахождения экстремума вариационного функционала: задачи с подвижной границей и изопериметрические задачи на условный экстремум, в которых условие связи задается с помощью второго вариационного функционала.

Как оказалось, эти два типа экстремальных задач можно объединить, записав в задаче с подвижной границей условие связи с помощью вариационного функционала.

## 1. Вариационная задача с подвижными границами.

Рассмотрим более общую задачу:

$$\Phi(x_1, y) \mapsto \text{extr}, \quad \text{при условии } G(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y') dx = 0, \quad (1)$$

где заданная функция  $g$  принадлежит классу  $C^1$ . При этом мы рассматриваем класс функций  $y(\cdot) \in C^1[x_0; \infty]$ , которые образуют пространство Фреше. Применяя метод Лагранжа определения условного экстремума в пространстве Фреше, приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial y} = 0; \quad G = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Система (2) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} f(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + \lambda \cdot g(x_1, y(x_1), y'(x_1)) &= 0; \\ \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) h + \left( \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} h' \right) \right] dx &= 0; \quad \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y') = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы приводит к следующим двум необходимым условиям экстремума:

$$\left\{ \begin{array}{l} g|_{x_1} \cdot L(f) - f|_{x_1} \cdot L(g) = 0; \quad (\text{совместное уравнение Эйлера–Лагранжа}) \\ \left( g|_{x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}|_{x_1} + f|_{x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}|_{x_1} \right); \quad (\text{обобщенное условие трансверсальности}) \end{array} \right. \quad (3)$$

## 2. Вариационный функционал с параметром.

Рассмотрим вариационную задачу с подвижной границей на условный экстремум при условии, что  $x_1$  содержится также под знаком интегралов ( $f = f(x_1; x, y, y')$ ,  $g = g(x_1; x, y, y')$ ):

$$\Phi(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x_1; x, y, y') dx \quad \mapsto \text{extr}; \quad G(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x_1; x, y, y') dx. \quad (4)$$

Применяя метод Лагранжа с функционалом  $\lambda(\cdot) \in Y^*$ , получаем:

$$\begin{cases} (f + \lambda(g))|_{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (f + \lambda(g)) dx = 0; \\ \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (f + \lambda(g)) h + \frac{\partial}{\partial y'} (f + \lambda(g)) h' \right] dx. \end{cases}$$

Последняя система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \left[ f|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_1} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y'}|_{x_1} \right)^{-1} \cdot (g|_{x_1}) \right] + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_1} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y'}|_{x_1} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \right) dx = 0 \\ \text{(обобщенное условие трансверсальности)} \\ L(f - \frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_1} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y'}|_{x_1} \right)^{-1} \cdot (g)) = L(f) - \frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_1} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y'}|_{x_1} \right)^{-1} \cdot L(g) = 0. \\ \text{(совместное уравнение Эйлера–Лагранжа)} \end{cases}$$

Выражаю признательность научному руководителю профессору И.В. Орлову за постановку задачи и внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И.В. *Теоремы об обратной и неявной функции в пространствах Фреше для сильных производных* //Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т. 6, № 1. – 2009. – С. 142-164.
- [2] Орлов И.В. *Учебно-методическое пособие "Специальный курс лекций "Дифференциальное исчисление в пространствах Фреше* — Таврический национальный университет, 2007.(Электронная версия)
- [3] Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* — Физматгиз, 1961. — 228 с.
- [4] Будылин А.М. *Вариационное исчисление.*— Электронное учебное пособие, 2001.



# Компактные субдифференциалы отображений в ЛВП и их связь с интегралом Бохнера

Столякин Ф. С.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
(ГРУППА 500)

*Введено новое понятие компактного субдифференциала отображений в локально выпуклые пространства (ЛВП). Доказано, что каждое сильно абсолютно непрерывное и почти всюду компактно субдифференцируемое отображение представимо в виде интеграла Бохнера.*

Цель работы — исследование достаточных условий представимости в виде неопределённого интеграла Бохнера сильно абсолютно непрерывных отображений  $F$  отрезка  $I = [a; b]$  в ЛВП  $E$ . Для решения этой задачи используется недавно предложенное понятие *компактного субдифференциала* или *K-субдифференциала* [1], определяемое следующим образом

$$\partial_K F(x) = K - \lim_{\delta \rightarrow +0} \left( \overline{\text{co}} \left\{ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \mid 0 < |h| < \delta \right\} \right),$$

где  $K - \lim$  означает топологическое стягивание множеств под знаком предела к их компактному пересечению, а  $\overline{\text{co}}A$  обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества  $A \subset E$ . Если  $\partial_K F(x)$  существует, то  $F$  называется *K-субдифференцируемым* в точке  $x$ .

Если  $F$  дифференцируемо в точке  $x_0$ , то  $\partial_K F(x_0) = \{F'(x_0)\}$ . Однако возможны всюду *K-субдифференцируемые* отображения, которые нигде не имеют обычной производной.

В работе [2] была получена для отображений  $F : [a; b] \rightarrow E$  обобщённая формула Лагранжа

$$F(b) - F(a) \in \left( \int_{[a;b] \setminus e} \varphi(x) dx \right) \cdot B, \quad (1)$$

в предположении непрерывности  $F$  на  $[a; b]$ , дифференцируемости на  $[a; b] \setminus e$ , нулевой слабой меры  $F(e)$  и локальной оценки  $F'(x) \in \varphi(x) \cdot B$ , где  $\varphi(x) \geq 0$  суммируема на  $[a; b] \setminus e$ ,  $B$  замкнуто и выпукло в  $E$ . В данной работе оценка (1) распространена на компактно субдифференцируемые отображения и получен следующий результат. Далее  $E$  — произвольное отделимое ЛВП.

**Теорема 1.** *Если отображение  $F : [a; b] \rightarrow E$  непрерывно на  $[a; b]$  и *K-субдифференцируемо* на  $[a; b] \setminus e$ ,  $F(e)$  имеет скалярную меру нуль,*

$\partial_K F(x) \subset \varphi(x) \cdot B$  при  $x \in [a; b] \setminus e$ , где  $\varphi(x) \geq 0$  суммируема на  $[a; b] \setminus e$ ,  $B$  замкнуто и выпукло в  $E$  то верна оценка (1).

Исследован ряд свойств сечений (селекторов)  $\widehat{\partial}_K F : I \rightarrow E$  многозначных отображений  $\partial_K F : I \rightarrow 2^E$ , включая почти сепарабельнозначность. Это позволило получить следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $F : I = [a; b] \rightarrow E$  сильно абсолютно непрерывно и почти всюду  $K$ -субдифференцируемо на  $I$ . Тогда любое сечение  $\widehat{\partial}_K F \in \partial_K F$  интегрируемо по Бохнеру на  $I$  и верно равенство

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x \widehat{\partial}_K F(t) dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (2)$$

С использованием оценки (1) доказано, что в (2) селектор  $\widehat{\partial}_K F$ , вообще говоря, не может быть заменён обычной производной  $F'$ .

Автор выражает признательность научному руководителю И.В. Орлову за постановку задачи и внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И.В., Столякин Ф.С. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика. Фундаментальные направления — Объём 18 с. — В печати.
- [2] Орлов И. В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств // Математическая физика, анализ, геометрия (МАГ). — 2001. — 8, № 4. — С. 419–439.

## Дискретные двумерные квадрики типа «парабола-прямая»

*Сульниченко А. В.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ГРУППА 500-П

Одним из разделов теории динамических систем с дискретным временем являются дискретные двумерные квадрики, т.е. дискретные системы с квадратичной правой частью. Из геометрических соображений все эти системы можно классифицировать по кривым, задаваемым полиномами второй степени. Таким образом, можно выделить следующие случаи: эллипс - эллипс, эллипс - гипербола, эллипс - парабола, эллипс - прямая, . . . , парабола - прямая.

Хеноном был исследован частный случай дискретных двумерных квадратиков с постоянным якобианом, зависящим от двух параметров. Им были исследованы условия, при которых происходят бифуркации "складка" и "удвоение периода" а также обнаружен странный аттрактор, обладающий самоподобными свойствами [1].

Целью нашей статьи будет нахождение и классификация финальных траекторий для более общего случая – дискретных двумерных квадратиков типа "парабола - прямая" которые задаются отображением (1).

$$\begin{cases} x_{n+1} = R \sin(\xi)(x_n^2 - 2y_n) + x_n \\ y_{n+1} = R \cos(\xi)(x_n \sin(\alpha) + y_n \cos(\alpha) - a) + y_n \end{cases} \quad (1)$$

В результате итерирования этого отображения финальные траектории могут быть четырех типов: конечное число точек, гладкая кривая, аттрактор хеноновского типа и странный аттрактор.

Были обнаружены значения параметров, при которых происходит бифуркация "удвоение периода" то есть по мере изменения параметра финальная траектория представляет собой конечное число точек  $(1, 2, 4, \dots, 2^n)$ . Это процесс изображён на рисунке 1.

Также нами был обнаружен аттрактор хеноновского типа, в котором точки концентрируются вдоль основных направлений (линий). На рисунке 2.а) изображен сам аттрактор, его размерность Минковского [2, с. 127-137] приближенно равняется 1.53. На рисунках б), в) и г) показаны увеличенные изображения прямоугольников с предыдущих рисунков, проявляющие самоподобную структуру аттрактора. Данной траектории соответствуют положительный и отрицательный показатели Ляпунова ( $\lambda_1 = 0.091$ ,  $\lambda_2 = -0.1844$ ).

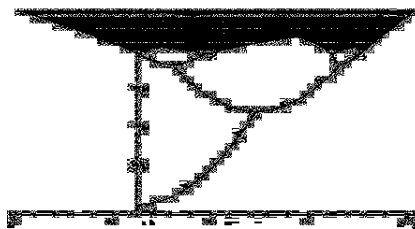


Рис. 1. Бифуркация "удвоение периода" для дискретных двумерных квадратик "парабола-прямая"

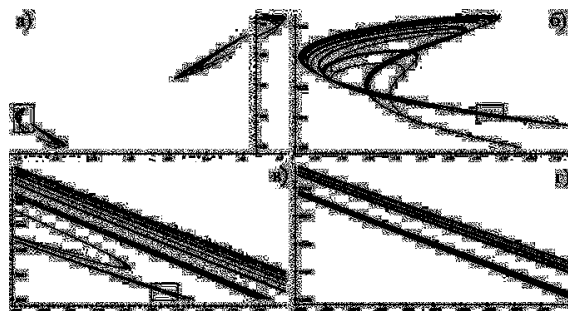


Рис. 2. Аттрактор хеноновского типа ( $R = -1.02$ ,  $a = 0.100007$ ,  $\alpha = 0.1988\pi$ ,  $\xi = 0.916666666667\pi$ )

Еще одним вариантом финальных траекторий, является странный аттрактор, в котором нельзя выявить основных направлений, вдоль которых концентрируются точки. Аттрактор данного типа состоит из отдельных точек, которые не образуют линий. Финальная траектория такого типа изображена на рисунке 3. Размерность Минковского для данного аттрактора составляет 1.57, что подтверждает его фрактальную структуру. Оба показателя Ляпунова для данной траектории являются положительными и составляют  $\lambda_1 = 0.0802$ ,  $\lambda_2 = 0.0176$ .

Экспериментальным путём было установлено, что для траекторий этого типа показатели Ляпунова всегда положительны, этим они отличаются от траекторий хеноновского типа, у которых один показатель Ляпунова положительный, а другой отрицательный.

Таким образом, нами были рассмотрены отдельные аспекты теории хаоса применимо к дискретным динамическим квадратикам типа "парабола-прямая".

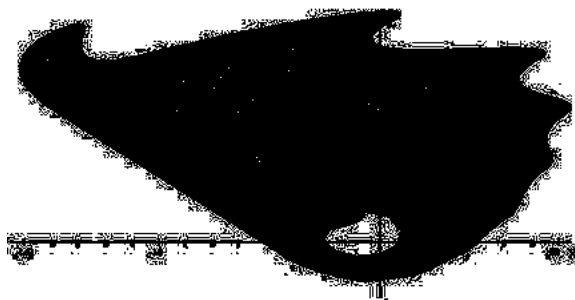


Рис. 3. Странный аттрактор ( $R = -1.02$ ,  $a = 0.100007$ ,  
 $\alpha = 1.647\pi$ ,  $\xi = 0.916666666667\pi$ )

Получены финальные траектории, возникающие при итерировании этих систем, как встречающиеся ранее для других динамических систем (бифуркация "удвоение периода" странный аттрактор хеноновского типа), так и обнаруженный впервые для дискретных двумерных квадратичных типа финальной траектории, в которой точки распределены более и менее равномерно по всей площади аттрактора и не скапливаются вдоль основных направлений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Henon M. *A two-dimensional mapping with a strange attractor.* // Commun. Math. Phys., 1976.
- [2] Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.* – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

## Доминантная эргодическая теорема в пространствах Лоренца измеримых функций

Цеунова М. В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (ГРУППА 500)

*В данной работе рассматривается аналог доминантной эргодической теоремы в пространствах Лоренца измеримых функций на полуоси.*

Пусть  $\mu$  — мера Лебега на полупрямой  $[0, \infty)$  и  $S(0, \infty)$  — метрическое пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на  $(0, \infty)$ , для которых функция распределения  $n_f(\tau)$  не равна тождественно  $+\infty$  на  $(0, \infty)$ .

Пространством Лоренца называется множество измеримых функций вида:

$$L_{p,q} = \left\{ f \in S(0, \infty) : \left( \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

с нормой:

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left( \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ если } 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty.$$

Если  $q = \infty$ , то

$$L_{p,\infty} = \{f : \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty\},$$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Пространство  $L_{p,q}$  является симметричным пространством. Поэтому имеет место следующее соотношение:

$$L_1 \cap L_\infty \subset L_{p,q} \subset L_1 + L_\infty.$$

**Определение 1.** Оператор  $\sigma_\tau : S(0, \infty) \rightarrow S(0, \infty)$  определяемый равенством:

$$\sigma_\tau f(t) = f\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau > 0,$$

называется оператором растяжения.

Оператор растяжения  $\sigma_\tau$  ограниченно действует в любом симметричном пространстве, в частности в пространстве  $L_{p,q}$ :

$$\sigma_\tau : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}.$$

При этом норма оператора  $\sigma_\tau$  равна:

$$\|\sigma_\tau\|_{L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}} = \tau^{\frac{1}{p}}.$$

**Определение 2.** Положительный линейный оператор

$$T : L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) \rightarrow L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$$

называется положительным  $(L_1 - L_\infty)$ -сжатием или абсолютным сжатием, если:

1.  $T$  действует в  $L_1(0, +\infty)$  и  $L_\infty(0, +\infty)$ ;
2.  $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq 1$ ,  $\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq 1$ .

Множество всех положительных  $(L_1 - L_\infty)$ -сжатий обозначается через  $PC$ . Для каждого оператора  $T \in PC$  рассматривается оператор  $B_T$ :

$$B_T f = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

**Теорема 1.** 1) Если  $p > 1$ ,  $f \in L_{p,q}$  и  $T \in PC$ , то  $B_T f \in L_{p,q}$  для любого  $1 \leq q \leq \infty$ .

2) Если  $1 \leq q \leq p$ , то для  $f \in L_{p,q}$ ,  $T \in PC$  имеет место неравенство:

$$\|B_T f\|_{L_{p,q}} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L_{p,q}}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов.* // М.: Наука, - 1978 - 400 С.
- [2] Edgar G.A., Sucheston L. *Stopping times and directed processes.* // Cambridge: University press, - 1992. - 430 P.
- [3] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. *Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces*, *Studia Mathem.*, No. 128 (2), 145–157 (1998).
- [4] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. *Classical Banach Spaces. Function Spaces.* Springer 1979.
- [5] М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн. *Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий.* - Ученые записки ТНУ, Т.17 (56), № 2, с. 36 - 48, 2003.

## Методы повышения эффективности дискретных процедур распознавания

*Яшина О. С.*

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. Вернадского  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ (ГРУППА 500-И)

Стандартная постановка задачи распознавания такова [1]: исследуется некоторое множество объектов  $M$ , его объекты описываются системой признаков  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . О множестве  $M$  известно, что оно представимо как объединение непересекающихся подмножеств (т.е. классов, на которые его требуется разбить)  $K_1, \dots, K_l$ . Также имеется конечный набор объектов (прецедентов)  $\{S_1, \dots, S_m\}$  из  $M$ , о которых известна их классовая принадлежность. Такое множество называется обучающей выборкой. Требуется по описанию некоторого объекта (набору значений его признаков) классифицировать его.

Для задач распознавания на основе прецедентов невозможно в общем случае построение математических моделей. В случае, когда информация целочисленная и число допустимых значений каждого признака невелико, к ним применяются методы, использующие аппарат дискретной математики. Преимуществом рассматриваемых логических процедур является то, что они дают возможность получения результата при наличии малых обучающих выборок и при отсутствии информации о распределении значений признаков.

Основной задачей при построении дискретных процедур распознавания является поиск информативных фрагментов описаний объектов. Информативными называются такие фрагменты, которые отражают определенные закономерности в описаниях обучающих объектов, т.е. наличие или, наоборот, отсутствие этих фрагментов в классифицируемом объекте позволяет судить о его принадлежности тому или иному классу [1].

При построении дискретных процедур возникает несколько проблем – наличие шумящих признаков (принимающие слишком много значений, их значения редко встречаются во всех классах) и наличие объектов в обучающей выборке, лежащих на границе между классами.

Для повышения эффективности логических процедур распознавания в работах [1-3] проводится предварительный анализ обучающей выборки с целью оценивания ее основных информативных характеристик: информативности признаков, их значений, выделение наиболее представительных (типичных) объектов. При оценивании информативности используется алгоритм голосования по представительным наборам и метод оценки, основанный на вычислении близости между объектами по отдельным признакам. Выделение наиболее



типичных объектов проводится для разбиения обучающей выборки на базовую (с типичными объектами) и контрольную (в нее входят объекты, лежащие на границе классов) подвыборки. По базовой строится множество представительных наборов, по контрольной вычисляются их веса.

В нашей работе для оптимизации классификации используется подход, упоминаемый в работе [4]. Оценку признаков мы основываем на использовании понятия классификационной мощности, которое определяется следующим образом. Пусть нам дана функция  $y$ , зависящая от набора булевых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , если через  $\pi(y)$  обозначить число позитивных наблюдений, то есть таких наблюдений, для которых значение  $y$  равно 1, а через  $v(y)$  - число негативных наблюдений, для которых  $y = 0$ , тогда *классификационной мощностью*  $y$ ,  $CP(y)$ , назовём

$$CP(y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi(y)}{|\Omega^+|} + \frac{v(y)}{|\Omega^-|} \right)$$

где  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  - множества всех позитивных и негативных наблюдений (соответственно).

Рассматриваемый подход состоит в итеративной процедуре создания искусственных переменных. На первом шаге каждой паре булевых переменных  $x$  и  $y$  ставится в соответствие 16 новых бинарных переменных  $f_1(x, y), \dots, f_{16}(x, y)$ , где  $f_i(x, y), i = 1, \dots, 16$  - все булевы функции от двух переменных. Для ограничения числа генерируемых таким образом переменных используется процедура фильтрации. Таким образом создаются искусственные булевы переменные, называемые булевыми разделителями. Эта процедура продолжается итеративно для новых переменных до тех пор, пока возможно создание новых переменных. В результате мы получим некоторые булевы функции (называемые далее улучшенными булевыми классификаторами), зависящие от начальных переменных. Каждый из полученных улучшенных булевых классификаторов, взятый отдельно, может быть использован как самостоятельная новая система классификации, точность которой не уступает точности существующих техник машинного обучения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дюкова Е. В., Песков Н. В. *Построение распознающих процедур на базе элементарных классификаторов.* // Математические вопросы кибернетики. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - Вып. 14. - С. 57-92
- [2] Воронцов К.В. *Лекции по логическим алгоритмам классификации.* <http://www.ccas.ru/voron/download/LogicAlgs.pdf>.2006.

- [3] Журавлев Ю. И., Гуревич И. Б. *Распознавание образов и распознавание изображений* // Распознавание, классификация, прогноз. — 1989. — Т. 2. — С. 5–73.  
<http://www.ccas.ru/frc/papers/zhuravlev89gurevich.pdf>
- [4] Peter L. Hammer, Irina I. Lozina *Boolean Separators and Approximate Boolean Classifiers*.  
[http://rutcor.rutgers.edu/pub/rrr/reports2006/14\\_2006.pdf](http://rutcor.rutgers.edu/pub/rrr/reports2006/14_2006.pdf)
- [5] Бушманов О. Н., Дюкова Е. В., Журавлев Ю. И., Кочетков Д. В., Рязанов В. В. *Система анализа и распознавания образов* // Распознавание, классификация, прогноз. — 1989. — Т. 2. — С. 250–273.  
<http://www.ccas.ru/frc/papers/bushmanov89obraz.pdf>
- [6] Дюкова Е. В., Песков Н. В. *Построение распознающих процедур на базе элементарных классификаторов* // Математические вопросы кибернетики / Под ред. О. Б. Лупанов. — М.: Физматлит, 2005. — Т. 14.  
<http://www.ccas.ru/frc/papers/djukova05construction.pdf>
- [7] Журавлев Ю. И. *Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации* // Проблемы кибернетики. — 1978. — Т. 33. — С. 5–68.  
<http://www.ccas.ru/frc/papers/zhuravlev78prob33.pdf>
- [8] Журавлев Ю. И. *Об алгебраических методах в задачах распознавания и классификации* // Распознавание, классификация, прогноз. — 1988. — Т. 1. — С. 9–16.  
<http://www.ccas.ru/frc/papers/zhuravlev88rkr.pdf>
- [9] Журавлев Ю. И. *Об алгоритмах распознавания с представительными наборами (о логических алгоритмах)* // ЖВМиМФ. — 2002. — Т. 42, № 9. — С. 1425–1435.  
<http://www.ccas.ru/frc/papers/zhuravlev02jvm.pdf>

## СОДЕРЖАНИЕ

1. <b>Ахрамович М. В.</b> Современные формы теоремы Банаха-Штейнгауза	3
2. <b>Асанов Р. Р.</b> Поиск объектов на изображении с помощью алгоритмов машинного обучения	6
3. <b>Балухтин С. В.</b> Математическая модель задачи оптимального проектирования трёхстержневой фермы	8
4. <b>Баринов В. С.</b> Суффиксные массивы и суффиксные деревья	11
5. <b>Бураева Э. Н.</b> Доминантная эргодическая теорема в классах зигмунда измеримых функций на полуоси	14
6. <b>Варенник Е. Ю.</b> Использование NURBS для построения кривых и поверхностей	16
7. <b>Джемилева М.Э.</b> Объекты Вейерштрасса	18
8. <b>Ермакова Е. Е.</b> Спектральные свойства $\mathbb{F}$ -линейных операторов	22
9. <b>Ефанова Л. И.</b> Преимущества и недостатки компьютерного тестирования	24
10. <b>Ершова Ю. Ю.</b> Матричный метод построения неприводимых представлений $*$ -алгебры, порожденной тремя проекторами с соотношениями	26
11. <b>Жогло А. С.</b> Численная реализация параллельного алгоритма, вычисляющего напряжения в слоистой среде	28
12. <b>Иванова Ю. Е., Иванов С. В.</b> Описание множества допустимых параметров существования $*$ -представлений $*$ -алгебр, ассоциированных с графами кокстера	31
13. <b>Караватская М. В.</b> Факторизация $A$ -самосопряженных матриц в алгебре $M_n(\mathbb{H})$	34
14. <b>Лесков Д. М.</b> Использование алгоритмов машинного обучения для выбора оптимальной стратегии выигрыша в покер-системах	36
15. <b>Певнева С. В.</b> Колебания нагруженной струны с переменными характеристиками	38
16. <b>Пухкая Я. Ю.</b> Об оценках решения бесконечной системы в осесимметричной задаче термоупругости для кругового цилиндра	41
17. <b>Сатанина М. Н.</b> Построение треугольных порций поверхностей с использованием алгоритма Кастельжо и вырожденной порции поверхности Безье	44
18. <b>Семкина Е. В.</b> Об обратимости оператор-функции, аналитической в некоторой точке	47
19. <b>Солодилова В. В.</b> Разработка вычислителя Fuzzy Calculator на базе нечеткой логики	50

20. Стародубцева Е. А. Метод Лагранжа в пространствах Фреше и его применение к вариационным задачам .....	55
21. Стонякин Ф. С. Компактные субдифференциалы отображений в ЛВП и их связь с интегралом Бохнера .....	57
22. Сульниченко А. В. Дискретные двумерные квадратики типа «парабола-прямая» .....	59
23. Цеунова М. В. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Лоренца измеримых функций .....	62
24. Яшина О. С. Методы повышения эффективности дискретных процедур распознавания .....	64

