Задачи восстановления по данным косвенных измерений

Рустем Диана Ремзиевна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)
e-mail: ladydianochka@mail.ru

Задачи восстановления имеют различную природу. В задаче восстановления изображения предполагается наличие некоторой модели косвенных измерений в виде интегральных уравнений типа свертки. В этом случае под восстановлением понимается нахождение решения уравнения при наличии априорной информации, заданного уровня погрешности оператора и правой части. В более широком смысле необходимо восстановить модель (идентификация модели) и решение. Такого типа задачи некорректны и для их приближенного решения разрабатываются регуляризирующие алгоритмы [1].

Актуальными являются и более простые задачи, в которых восстанавливаются некоторые характерные точки искомой функции (точки экстремума, участки монотонности и т.п.); экстремальные задачи восстановления параметров и др.

В работе рассматриваются примеры таких задач из оптики: восстановление точек отражения, огибающих или особенностей (каустика); теории катастроф и др. Класс задач выбран исходя из методических соображений. Здесь должен содержаться набор характерных задач от простейших до задач, связанных с теорией катастроф [1-3].

В задаче Герона луч света из точки A падает на вертикальную поверхность l и регистрируется в точке B. Требуется восстановить точку отражения C от поверхности l. Если расположение прямой l известно, то ее можно совместить с осью OX, а точку $A(0,a)$ расположить на оси OY, тогда точка $B(b,d)$ расположена в верхней полуплоскости, искомая $C(x,0)$ расположена на оси OX.

Соответствующая экстремальная задача (ЭЗ)

$$\rho(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(b-x)^2+d^2} \to extr$$

имеет решение

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+d^2}} = 0,$$

из которого находится x, т.е. точка $C(x,0)$ и устанавливается, что угол падения равен углу отражения.

Если зеркальная поверхность l задается уравнением $y=f(x)$, то решение сводится к ЭЗ

$$\rho(x) = \sqrt{x^2+(a-f(x))^2} + \sqrt{(b-x)^2+(d-f(x))^2} \to extr$$

необходимые условия имеют вид:

$$\frac{x-(a-f(x))f'(x)}{\sqrt{x^2+(a-f(x))^2}} - \frac{(b-x)+(d-f(x))f'(x)}{\sqrt{(b-x)^2+(d-f(x))^2}} = 0.$$

Локально качественная картина аналогична классическому случаю. Рассмотрены примеры кривых второго порядка; параллельного пучка прямых и др.

Для параллельного пучка лучей, падающего на окружность радиуса 1 с центром в точке $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ из достаточно удаленной точки $D(-d,0)$ и отражающейся в точку (ξ,η) длина пути

$$\rho_{\xi\eta}(y) = \left(d-\frac{1}{2}+\sqrt{1-y^2}\right)^{1/2} + \left((\xi+\frac{1}{2}-\sqrt{1-y^2})^2+(\eta-y)^2\right)^{1/2}$$

зависит от y: точка отражения на окружности C имеет координаты $\left(\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{2},\ y\right)$. Раскладывая $\rho_{\xi\eta}(y)$ в ряд до четвертого порядка по y и до первого порядка по ξ и η, получаем

$$\rho_{\xi\eta}(y) \approx F_{\xi\eta}(y) = -\frac{1}{4}(1+5\xi)y^4 + \frac{1}{2}\eta y^3 + \xi y^2 - 2\eta y + (d+1-\xi).$$

Из симметрии, относительно оси OX в точке $\xi = 0, \eta = 0$, получаем, что семейство $\rho_{\xi\eta}(y)$ сильно эквивалентно в некоторой окрестности точке $(0,0)$, универсальной деформации F функции $-\frac{y^4}{4}$ (локальная геометрия сборки Уитни) [2].

Огибающая семейства параллельных лучей, отраженных от окружности, является нефроидой (эпициклоида специального вида). Задача восстановления особенностей для различных поверхностей требует применение теории огибающей и теории катастроф [2,3].

Дальнейшее обобщение заключается в восстановлении поверхности отражения. Например, для обобщенной задачи Герона. По координатам A и точек $B_1,\ B_2$ находятся координаты точек $C_1,\ C_2$, лежащих на прямой $y = ax + b$. А затем параметры прямой a, b находятся из системы двух алгебраических уравнений. Восстанавливая локально искомую функцию, при наличии априорной информации и достаточного числа косвенных измерений, приближенно восстанавливается искомая функция на необходимом отрезке (множестве).

Идентификация особенностей, например в виде нефроиды, локально определяет отражающую поверхность в виде окружности (цилиндрической поверхности).

Более сложный класс задач возникает в случае неизвестного характера отражающей поверхности и при косвенных измерениях с движущихся объектов с помощью антенных устройств. Такого рода задачи представляют практический интерес в задачах дистанционного зондирования поверхности.

Список литературы

[1] Лукьяненко В.А. *Экстремальные задачи. Спецкурс.* – Симферополь: ТНУ, 2012. – 120с.

[2] Арнольд В.И. *Теория катастроф.* – М.: Изд-во МГУ. – 1983.

[3] Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения.* – М.: Мир, 1980. – 608с.