Полнота множества ключевых импликаций формального контекста

Холодинская Татьяна Викторовна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра информатики (группа 602И)
e-mail: Pussyvcat@mail.ru

U - множество, которое в рамках рассматриваемой задачи считается универсальным (признаковое пространство).

$G \subseteq U$ – некоторое подмножество (выборка) точек пространства U.

$P = \{ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n \} : U \to \{ 0,\ 1 \}$ – множество элементарных предикатов, определённых на множестве U.

$K = \langle U,\ G,\ P \rangle$ – формальный контекст.

Пусть $p \in P$ – предикат из множества P.

$p^+ = \{ u \in U | p\ (u) = 1 \}$ – область истинности предиката p.

$p' = G \bigcap p^+$ – подмножество точек выборки G, попавших в область истинности предиката p.

Пусть $A \subseteq P$ – подмножество элементарных предикатов из множества P. Это подмножество можно рассматривать как элементарную конъюнкцию, а A^+– как область истинности этой конъюнкции. С другой стороны, подмножество A можно рассматривать как подмножество элементарных предикатов, определённых на множестве U, а множество A^+ – как общую область истинности элементарных предикатов подмножества A:

$A^+ = \bigcap_{a \in A} a^+$ – общая область истинности предикатов подмножества A.

$A' = G \bigcap A^+$ – подмножество точек выборки G, попавших в область A^+.

Пусть $g \in G$ – точка из множества G.

$g^+ = \{ p \in P | p\ (g) = 1 \}$ – обозначение множества элементарных предикатов, области истинности которых содержат точку g.

Пусть $B \subseteq G$ – подмножество точек из множества G.

$B^+ = \bigcap_{b \in B} b^+$ – подмножество элементарных предикатов, общих для всех предикатных образов точек из подмножества B.

На подмножествах множества P обычным образом определяется отношение порядка " $\leq$ ", как отношение включения " $\subseteq$ ":

Определение 1. Пусть $A,\ B \subseteq P$. $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Определение 2. Пусть $A,\ B \subseteq P$. Из предикатного подмножества A логически следует предикатное подмножество B (обозначение $A| = B$), если область истинности предиката A содержится в области истинности предиката B [1]:

$A| = B \Leftrightarrow A^+ \subseteq B^+$.

Определение 3. Пусть $A,\ B \subseteq P$. Из предикатного подмножества A в контексте K следует предикатное подмножество B (обозначение $A| \overset{K}{=} B$), если все точки выборки, попавшие в область истинности A^+, содержатся в области истинности B^+:

$A| \overset{K}{=} B \Leftrightarrow A' \subseteq B^+$.

Утверждение 1. Пусть $A,\ B \subseteq P$. Из предикатного подмножества A в контексте K следует предикатное подмножество B, тогда и только тогда, когда все точки выборки, попавшие в область истинности A^+, являются подмножеством точек выборки, попавших в область истинности B^+:

$A| \overset{K}{=} B \Leftrightarrow A' \subseteq B'$.

Утверждение 2. Если из предикатного подмножества A логически следует предикатное подмножество B, то из A в контексте K следует B:

$A| = B \Rightarrow A| \overset{K}{=} B$

Пусть $A \subseteq P$.

$A'^+ = \left\{ p \in P | A| \overset{K}{=} p \right\}$ – подмножество всех элементарных предикатов, следующих из предикатного подмножества A в контексте K.

ı^{+}" можно рассматривать как оператор, определённый на подмножества множества предикатов P:

$'^+ : 2^P \to 2^P$.

Свойства оператора ı^{+}":

1) $A \subseteq B \Rightarrow A'^+ \subseteq B'^+$, (монотонность)
2) $A \subseteq A'^+$, (экстенсивность)
3) $(\ A'^+\ )'^+ = A'^+$. (идемпотентность)

В силу наличия свойств 1) – 3) оператор ,,$^{+}$" называется оператором (контекстного) замыкания [2]. С учётом того, что оператор ,,$^{+}$" определяется контекстом K, его удобно называть «оператором контекстного замыкания».

Если $A'^{+} = A$, то A – (контекстно) замкнутое подмножество элементарных предикатов.

Определение 4. Пусть $A,\ B \subseteq P$. Предикатное подмножество A равносильно предикатному подмножеству B в контексте K (обозначение $A \overset{K}{\cong} B$), если подмножество точек выборки A', попавших в область истинности A^{+}, совпадает с подмножеством точек выборки B', попавших в область истинности B^{+}:

$$A \overset{K}{\cong} B \Leftrightarrow A' = B'.$$

Утверждение 5. Пусть $A,\ B \subseteq P$. Предикатное подмножество A равносильно предикатному подмножеству B тогда и только тогда, когда (контекстные) замыкания этих подмножеств совпадают:

$$A \overset{K}{\cong} B \Leftrightarrow A'^{+} = B'^{+}.$$

Отношение равносильности "$\overset{K}{\cong}$" является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает множество 2^{P} всех подмножеств элементарных предикатов на классы эквивалентности:

$$[\,A\,]_{K} = \left\{ B \subseteq P | B \overset{K}{\cong} A \right\}.$$

Класс $[\,A\,]_{K}$, вместе с унаследованным отношением порядка " $\subseteq$ ", множество упорядоченное, в котором:

a) A'^{+} – максимальный элемент,

b) Минимальных элементов в классе $[\,A\,]_{K}$ может быть больше одного.

Минимальные элементы класса называются ключевыми элементами класса.

$Key\,(\mathrm{K})$ – обозначение множества всех ключевых предикатных подмножеств формального контекста K.

Утверждение 6. Для любого предикатного подмножества A существует ключевое подмножество K такое, что $A \in [K,\ K'^{+}]$.

Определение 5. Пусть $A, B \subseteq P$. Импликация $A \to B$ содержится в контексте K, если все точки выборки G находятся в области истинности этой импликации.

Обозначение $Imp\ (\mathrm{K}\,)$ используется для обозначения всех импликаций контекста K (всех импликаций, содержащихся в контексте K). С использованием этого обозначения, определение 5 запишется в виде:

$$A \to B \in I\,mp\ (\mathrm{K}) \Leftrightarrow G \subseteq (A \to B)^{+}\,. \tag{0.1}$$

Очевидно, справедливы следующие утверждения:

$$A \to B \in I\,mp\ (\mathrm{K}) \Leftrightarrow G \subseteq \overline{A^{+}} \bigcup B^{+} \tag{0.2}$$
$$\Leftrightarrow G = \overline{A'} \bigcup B' \tag{0.3}$$
$$\Leftrightarrow A' \subseteq B' \tag{0.4}$$
$$\Leftrightarrow A| \overset{K}{\cong} B \tag{0.5}$$
$$\Leftrightarrow B \subseteq A'^{+} \tag{0.6}$$

Утверждение 7. $\forall A \subseteq P:\ A \to A'^{+} \in I\,mp\ (\mathrm{K}\,)$.
Это утверждение следует из (0.6).

Утверждение 8. $\forall K \in Key\,(\mathrm{K}\,):\ K \to K'^{+} \in I\,mp\ (\mathrm{K}\,)$.

Импликация $K \to K'^{+}$, где K – ключевое подмножество, называется ключевой импликацией.

$KeyI\,mp\,(\mathrm{K}\,) = \{\,K \to K'^{+}|\ K \in Key\,(\mathrm{K}\,)\,\}$ – обозначение для множества всех ключевых импликаций контекста K.

Утверждение 9. Если $i \in I\,mp\,(\mathrm{K}\,)$ и $i| = A \to B$, то $A \to B \in Imp\ (\mathrm{K}\,)$.
Доказательство.

$$\textit{Так как} i \in I\,mp\,(\mathrm{K}\,), G \subseteq i^{+}. \tag{0.7}$$
$$\textit{Так как} i| = A \to B, i^{+} \subseteq (A \to B)^{+}. \tag{0.8}$$

С учётом (0.7),(0.8) и транзитивности " $\subseteq$ ", выполняется включение $G \subseteq (A \to B)^+$. Следовательно, в соответствии с определением 5, $A \to B \in Imp\,(\mathrm{K})$.

Следствие 1. Любая импликация, являющаяся логическим следствием некоторой ключевой импликации, содержится в контексте К:
$k \in KeyImp\,(\mathrm{K})$ и $k| = A \to B \Rightarrow A \to B \in Imp\,(\mathrm{K})$.

Определение 6. Подмножество импликаций контекста К называется полным относительно данного контекста, если каждая импликация, содержащаяся в контексте К, является логическим следствием хотя бы одной (а значит и всех) импликации данного подмножества.

Утверждение 10. Если импликация $A \to B$ содержится в контексте К, то существует ключевая импликация, логическим следствием которой является импликация $A \to B$.

Доказательство.

Подмножество A является элементом класса $[A]_{\mathrm{K}}$, а значит, существует такое ключевое подмножество этого класса, что $A \in [K,\ K'^+]$ (утверждение 6). Следствием этого является цепочка включений:

$$K \subseteq A \Rightarrow A^+ \subseteq K^+ \Rightarrow \overline{K^+} \subseteq \overline{A^+}. \tag{0.9}$$

Так как $A \to B \in Imp\,(\mathrm{K})$, то, в силу утверждения (0.6),

$$B \subseteq A'^+. \tag{0.10}$$

А с учётом того, что $A'^+ = K'^+$, включение (16) примет вид

$$B \subseteq K'^+,$$

и, следовательно,

$$(K'^+)^+ \subseteq B^+, \tag{0.11}$$

Так как $A \to B \in Imp\,(\mathrm{K})$, то, с учётом (0.9), (0.11), получается

$$(K \to K'^+)^+ = \overline{K^+} \bigcup (K'^+)^+ \subseteq \overline{A^+} \bigcup B^+ = (A \to B)^+.$$

Таким образом, $(K \to K'^+)^+ \subseteq (A \to B)^+$ и, следовательно,

$$K \to K'^+| = A \to B. \tag{0.12}$$

Утверждение 11. Множество ключевых импликаций является полным в заданном контексте.

Доказательство.

Данное утверждение следует из определения полноты подмножества импликаций, утверждения 10 и следствия 2.

Список литературы

[1] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. Пособие для студ. высш. учеб. заведений – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448с.

[2] Биркгоф Г. Теория решёток. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 568с.