Визуализация методов численного решения систем алгебраических уравнений

Амонтьев Павел Алексеевич
Крымский федеральный университет имени. В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра информатики (группа 601-И)
e-mail: simffer@mail.ru

В самых различных задачах возникает необходимость решать системы нелинейных уравнений. Конечно, когда речь идёт о нелинейных уравнениях в общем случае, нет ни теорем о существовании, ни теорем о единственности решения. Тем не менее, имея дело с системой

$$f(x) = 0,$$

предполагаем, что искомое решение существует. Оно, быть может, не единственно, и метод, который будет рассмотрен ниже, не имеет целью найти все решения; обычно достаточно будет какого-то одного. Более того, предположим, что из каких-то содержательных соображений известно примерное расположение этого решения, некоторая не очень большая область, в которой оно находится. Таким образом, лучше говорить не о решении систем нелинейных уравнений, а об уточнении весьма грубого приближения к некоторому решению.

Рассмотрим как можно решить систему алгебраических уравнений. В случае, если система линейная, целесообразно прибегнуть к таким методам, как метод Гаусса, метод Крамера или метод Ричардсона. Однако, если вид функции нам неизвестен, воспользуемся одним из итерационных методов численного решения. В частности, рассмотрим метод Ньютона. Этот метод основывается на принципах метода простой итерации.

Классический метод Ньютона или касательных заключается в том, что если x_n - некоторое приближение к корню x_* уравнения $f(x) = 0, f \in C^1$, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции $f(x)$, проведенной в точке x_n.

Уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x_n имеет вид: $f'(x_j) = \frac{y-f(x_n)}{x-x_n}$.

В уравнении касательной положим $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

Тогда алгоритм последовательных вычислений в методе Ньютона состоит в следующем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Сходимость метода касательных квадратичная, порядок сходимости равен 2. Таким образом, сходимость метода касательных Ньютона очень быстрая. Если корень x_* является корнем второй кратности и выше, то порядок сходимости падает и становится линейным [1].

К недостаткам метода Ньютона следует отнести его локальность, поскольку он гарантированно сходится при произвольном стартовом приближении только если везде выполнено условие $|ff''|/(f'^2) < 1$, в противной ситуации сходимость есть лишь в некоторой окрестности корня.

Также недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления производных на каждом шаге.

Недостатком почти всех итерационных методов нахождения корней является то, что они при однократном применении позволяют найти лишь один корень функции, к тому же, мы не знаем какой именно. Чтобы найти другие корни, можно было бы брать новые стартовые точки и применять метод вновь, но нет гарантии, что при этом итерации сойдутся к новому корню, а не к уже найденному, если вообще сойдутся [2].

В особенностях наличия/отсутствия и расположения корней уравнения, а также работы метода Ньютона и других итерационных методов, позволяет разобраться визуализация графиков функций, а также последовательности шагов итерационного метода. Рассмотрим визуализацию на примере уравнения

$$5^x - 6x - 3 = 0$$

При начальном приближении $x_0 = 1.3$ уже третий шаг метода Ньютона даёт приемлемое приближение для одного из корней уравнения, как видно из

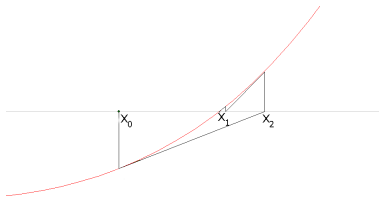

Рис. 1. Метод Ньютона сходится

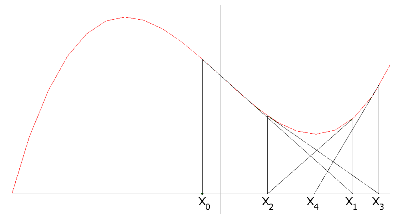

Рис. 2. Метод Ньютона не сходится

Рис. 1. В то же время на Рис. 2 показано, как при использовании для уравнения

$$3x^3 - 5x + 5 = 0$$

начального приближения $x_0 = -0.14$ при применении метода Ньютона наблюдаются проблемы со сходимостью.

В двумерном случае метод Ньютона тоже имеет геометрический смысл метода касательных, только теперь касательные принимают смысл не линий на плоскости, а плоскостей в трёхмерном пространстве. Например, для системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(y - x) + 1.6x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

на Рис. 3 показано расположение графиков соответствующих функций в плоскости $x - y$, а также один шаг метода Ньютона при начальных значениях $x = -0.9$, $y = 0.2$. Из этой диаграммы трудно понять, почему метод Ньютона

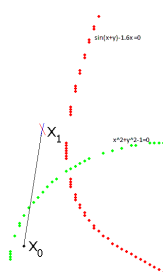

Рис. 3. Метод Ньютона в плоскости $x - y$

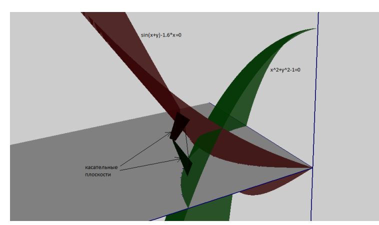

Рис. 4. Метод Ньютона в пространстве

выбрал именно такое направление и длину шага. Разобраться в этом поможет трёхмерная визуализация, в которой по третьей оси задаются значения функций левых частей уравнений. Она показана на Рис. 4.

На этом рисунке можно видеть, что такое направление и длина шага задаётся пересечением плоскостей, касательных к графикам соответствующих функций, с координатной плоскостью. Таким образом, трёхмерная визуализация позволяет геометрически пояснить поведение метода Ньютона в случае систем уравнений.

Список литературы

[1] Амосов, А.А., Дубинский, Ю.А., Копченова, Н.П. *Вычислительные методы для инженеров.* – М.: Мир, 1998. – 544с.

[2] Волков, Е.А. *Численные методы.* – М.: Физматлит, 2003. – 248с.