Исследования температурных напряжений в прямоугольной призме

Шпилевой Евгений Владимирович
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра прикладной математики (группа 601-П)
e-mail: shpilevoy92@list.ru

В работе рассматривается одна из типичных задач термоупругости, о нагреве прямоугольной призмы в условиях (обобщенного) плоского напряженного состояния.

Распределение температуры T(y) в данной задаче является функцией лишь одной координаты.

$$T(y) = \frac{1-y^2}{\eta},$$

где

$$\eta = \frac{a}{b}$$

(параметр,зависящий от соотношения сторон основания призмы). Частное решение дифференциального уравнения для термоупругого потенциала

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha * T(x,y)$$

выбираем в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha * T(x,y) = C\frac{1-y^2}{\eta},$$

при этом

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Соответственно аналитическое решение однородного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = 0$$

в форме рядов Фурье с неопределенными коэффициентами x_k,y_k должны удовлетворять следующим граничным условиям по границе области основания призмы При $x = 1$ и $x = -1$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} + C_1\frac{1-y^2}{\eta} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

При $y = \eta$ и $y = -\eta$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Из граничных условий следует бесконечная система для коэффициентов x_k и y_k

$$\eta = \frac{a}{b}$$

$$x_k = \frac{4k^3\eta^3}{\pi(\coth[k\pi\eta] + \frac{k\pi\eta}{sinh[k\pi\eta]^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2 + k^2/\eta^2)^2}$$

$$y_k = \frac{4k^3\eta^3}{\pi(\coth[k\pi\eta] + \frac{k\pi\eta}{sinh[k\pi\eta]^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2 + k^2/\eta^2)^2} + \frac{6\eta}{k\pi(\coth[k\pi\eta] + \frac{k\pi\eta}{sinh[k\pi\eta]^2}}$$

Решим данную бесконечную систему, используя средства программы Wolfram Mathematica 10.

Методом решения будет метод улучшенной редукции.

y/b	a=b	a=b	a=2b	a=2b
	$\sigma_{xx}(0,y)/S$	$\sigma_{xx}(0.5,y)/S$	$\sigma_{xx}(0,y)/S$	$\sigma_{xx}(0.5,y)/S$
0.0	-0.1409	-0.082	-0.3201	-0.2345
0.2	-0.1309	-0.077	-0.2831	-0.2099
0.4	-0.0953	-0.0582	-0.1709	-0.1333
0.6	-0.0163	-0.0133	0.204	0.0045
0.8	0.1369	0.08	0.2966	0.2196
1.0	0.4106	0.2589	0.6629	0.5353

В таблице представлены точные значения распределения нормального напряжения σ_{xx} по основанию(квадратному a=b и прямоугольному a=2b)

На рисунках представлены трехмерные графики распределения напряжений.

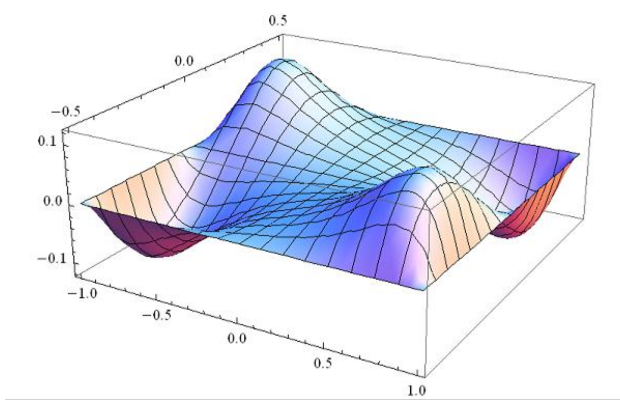

Рис. 1. График распределения сдвигового напряжения σ_{xy}, основание призмы прямоугольное

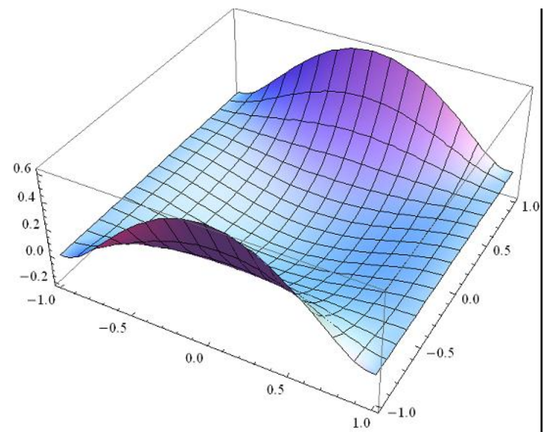

Рис. 2. График распределения нормального напряжения σ_{xx}, основание призмы прямоугольное.

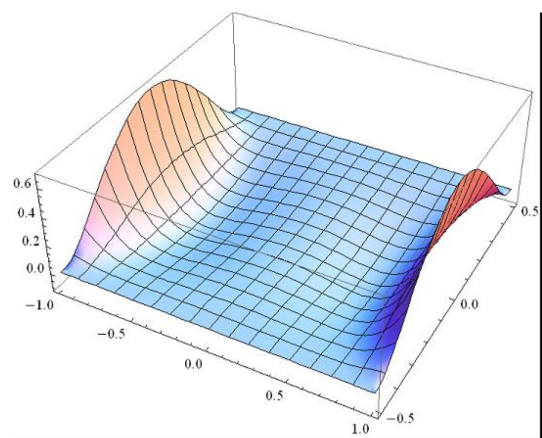

Рис. 3. График распределения нормального напряжения σ_{yy}, основание призмы прямоугольное.

Список литературы

[1] Мелешко В.В. *Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольних палстиинках.* – Прикладная математика. – 2005. – 41,№9.–С 101-117

[2] Тимошенко С.П. *Теория упругости.* – М.: ОНТИ, – 1934.