Эволюционные и спектральные задачи, порожденные несимметрическими полуторалинейными формами

Якубова Алие Рустемовна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)
e-mail: tehnotat@mail.ru

1. Введение

1.1. **Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм.** Пусть Ω - произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Введем сепарабельные гильбертовы пространства F, E и G со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_F$, $(\cdot,\cdot)_E$ и $(\cdot,\cdot)_G$ соответственно, для которых выполнены следующие условия:

(1)
$$F \hookrightarrow E, \quad ||u||_E \leqslant a||u||_F, \qquad \forall\, u \in F. \tag{1.1}$$

(2) На F задан оператор γ, который называется абстрактным оператором следа и ограниченно действует из F в G, причем
$$\begin{aligned} &\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G, \quad \mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G, \\ &||\gamma u||_G \leqslant b||u||_F, \qquad b > 0, \quad \forall\, u \in F. \end{aligned} \tag{1.2}$$

(3) Ядро $\ker\gamma =: N$ оператора γ плотно в E
$$\overline{N} = E. \tag{1.3}$$

Теорема 1. *(первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм (см.* [1]*). Пусть выполнены условия (1.1) – (1.3) для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия ограниченности и равномерной аккретивности для формы $\Phi(\eta, u)$. Тогда имеет место следующая формула Грина:*
$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \tag{1.4}$$
$$Lu \in F^*,\ \gamma\eta \in G_+,\ \partial u \in (G_+)^*.$$

2. Краевые задачи, порожденные несимметрической формой

2.1. Первая краевая задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.1}$$

$$L_\varepsilon v := v - \Delta v + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \partial_\varepsilon v := \partial_0 v - \varepsilon\sigma\gamma v, \tag{2.2}$$

$$\sigma := \sum_{k=1}^{m} c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad \partial_\varepsilon v \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

где $L_\varepsilon v \in (H^1(\Omega))^*$, а $\partial_0 u := (\partial v/\partial n)_\Gamma$.

Теорема 2. *Задача (2.1), (2.2) имеет слабое решение $v = v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f \in (H^1(\Omega))^*. \tag{2.3}$$

Это решение выражается формулой

$$v_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f, \quad A_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H^1(\Omega))^*), \tag{2.4}$$

где A_ε – оператор полуторалинейной формы $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$.

2.2. Вторая краевая задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.5}$$

Теорема 3. *Задача (2.5.) имеет слабое решение $w \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.6}$$

Это решение дается формулой

$$w = w_\varepsilon = V_\varepsilon \psi, \quad V_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma); H^1_{h,\varepsilon}(\Omega)). \tag{2.7}$$

2.3. Полная краевая задача Неймана - Ньютона.

$$L_\varepsilon u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon u = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.8}$$

Опираясь на решения задачи (2.1), (2.2), а также задачи (2.5), приходим к следующему выводу.

Теорема 4. *Задача (2.8) имеет слабое решение* $u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.3) и (2.6):*

$$f \in (H^1(\Omega))^*, \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.9}$$

При этом оно представляется в виде

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f + V_\varepsilon \psi, \tag{2.10}$$

где A_ε^{-1} *и* V_ε *– операторы, описанные в теоремах 2 и 3 соответственно.*

2.4. **Однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона.**

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma u := u|_\Gamma = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \tag{2.11}$$

Теорема 5. *Задача (2.11) имеет слабое решение* $u = u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие:*

$$f \in (H_0^1(\Omega))^*. \tag{2.12}$$

В этом случае

$$u_\varepsilon = A_{0,\varepsilon}^{-1} f, \qquad A_{0,\varepsilon}^{-1} \in \mathcal{L}((H_0^1(\Omega))^*; H_0^1(\Omega)). \tag{2.13}$$

3. Спектральные задачи, порожденные полуторалинейной формой

3.1. **Спектральная задача Дирихле.**

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.1}$$

Задачу (3.1) можно переписать в операторной форме

$$(A_0 - i\varepsilon B_0)u = \lambda u, \qquad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(\Omega), \tag{3.2}$$

где $A_0 u := u - \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) := H^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, A_0- неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$; $B_0 u := \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}-$ неограниченный самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$.

Теорема 6. *Задача (3.2), а потому и исходная задача (3.1) имеют дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots,$ *расположенных в правой полуплоскости и имеющих предельную точку* $\lambda = \infty$. *Все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в секторе* $|arg\lambda| < \delta$ *для любого* $\delta > 0$. *Система корневых (собственных и присоединенных) элементов задачи (3.2)* *полна в энергетическом пространстве* $\mathcal{H}_{A_0} = H_0^1(\Omega)$ *оператора* A_0. *Собственные значения* λ_k *задачи (3.2) имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k(A_0)[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{3.3}$$

Теорема 7. *Спектр задачи (3.1) расположен в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \lambda \geqslant \lambda_1(A_0) : \ |\mathrm{Im}\lambda|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|B_0 A_0^{-1/2}\|^2 \cdot \mathrm{Re}\lambda \Big\}, \tag{3.4}$$

а корневые элементы этой задачи образуют базис Абеля - Лидского порядка $\alpha > m/2$ *в пространстве* $H_0^1(\Omega)$.

3.2. **Спектральная задача Неймана - Ньютона.**

$$L_\varepsilon v = \lambda v \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon v = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.5}$$

Теорема 8. *Задача (3.5) имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *Все собственные значения этой задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|arg\lambda| < \delta$ *при любом* $\delta > 0$. *Система корневых элементов задачи (3.5) полна в энергетическом пространстве* $\mathcal{H}_A = H^1(\Omega)$ *оператора* A. *Собственные значения* λ_k *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k(A)[1 + o(1)] = d_m \mathrm{k}^{-2/m}[1 + o(1)], \quad (k \to \infty).$$

Корневые элементы исходной задачи образуют в пространстве $H^1(\Omega)$ *также базис Абеля - Лидского порядка* $\alpha > m/2$.

Теорема 9. *Спектр задачи (3.5) расположен в правой полуплоскости, в параболической области*

$$\Lambda_\varepsilon := \Big\{ \mathrm{Re}\lambda \geqslant c_\varepsilon \lambda_1(A) : \ |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \Big(\varepsilon \|BA^{-1/2}\| \cdot c_\varepsilon^{-1/2} \Big) (\mathrm{Re}\lambda)^{1/2} \Big\}. \tag{3.6}$$

3.3. **Спектральная задача Стеклова.**

$$L_\varepsilon w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \partial_\varepsilon w = \lambda \gamma w \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.7}$$

Эта задача сводится к задаче на собственные значения

$$(I + \varepsilon S)\eta_\varepsilon = \lambda C \eta_\varepsilon, \tag{3.8}$$

а также к спектральной проблеме

$$(I + T(\varepsilon))^{-1} C_h \eta_h = \mu \eta_h, \quad \eta_h \in L_{2,h}(\Omega), \tag{3.9}$$

$$L_{2,h}(\Omega) := \{\eta \in L_2(\Omega) : \eta = A^{1/2} w, w \in H_h^1(\Omega)\}.$$

Теорема 10. *Спектральная задача Стеклова (3.7) имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенный в правой полуплоскости и состоящий из конечнократных собственных значений* λ_k *с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *При любом* $\delta > 0$ *все собственные значения* λ_k, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* $|arg\lambda| < \delta$. *Система корневых элементов* $\{\eta_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи (3.8), после проектирование на подпространство* $L_{2,h}(\Omega)$, *т.е. система* $\{\eta_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *корневых элементов задачи (3.9), является полной в* $L_{2,h}(\Omega)$. *Поэтому система корневых элементов* $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $w_{\varepsilon,h,k} = A^{-1/2}\eta_{\varepsilon,h,k}$, *полна в* $H_h^1(\Omega)$. *Собственные значения* λ_k *задачи (3.7) имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k = \lambda_k^{-1}(C_h)[1 + o(1)] = d_m^{-1}\mathrm{k}^{1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad (k \to \infty),\ \Omega \in \mathbb{R}^m. \qquad (3.10)$$

Кроме полноты, система корневых элементов $\{w_{\varepsilon,h,k}\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *образует базис Абеля - Лидского порядка* $\alpha > m - 1$ *в пространстве* $H_h^1(\Omega)$.

Рассмотрены также спектральные задачи Стефана, С.Г. Крейна, Аграновича, Чуешова и начально-краевые задачи, порождающие эти спектральные.

Автор благодарит Копачевского Н. Д. за постановку задач и руководство работой.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи* // Украинский матем. вестник. – 2004. – Т.1. – № 1. – С. 69 – 97.

[2] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях* // Международный научный журнал «Спектральные и эволюционные задачи». – 2011. – Т.21 – № 1. – С. 2 – 39.

[3] Копачевский Н.Д. *Спектральная теория операторных пучков* //Специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА 2009. – 128 С.

[4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и ее приложения* // Специальный курс лекций. – Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.», – 2011, – 136 с.