О некоторых задачах с параметрами в курсе алгебры основной школы

Трушина Александра Павловна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)
e-mail: aleksa-evpacity@rambler.ru

Как известно, решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики. При их решении учащиеся должны хорошего владеть теоретическим материалом и стандартными методами решения уравнений и неравенств. Но, помимо этого, от учеников требуется умение проводить разнообразные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решения и не приобрести лишних. Задача с параметром представляет собой целую серию однотипных задач, соответствующих всевозможным числовым значениям параметра. Добавление параметра значительно усложняет задачу, так как увеличивается ее размерность, появляется "глубина". Решение такой задачи требует системного подхода, целостного представления ситуации. Для решения уравнений (неравенств) с параметрами необходимо умение проводить разветвлённые логические построения. При этом необходимо четко и последовательно следить за сохранением равносильности решаемых уравнений (неравенств), учитывая области определения входящих в них выражений. Таким образом, решая различные задачи с параметрами, школьники развивают логическое мышление, математическую культуру и систематизируют знания, полученные ранее. Задачи с параметрами представляют собой богатейший материал для полноценной математической деятельности учащихся. С их помощью можно проверить глубину знаний математики учащихся в основной школе, выявить склонности к исследовательской деятельности, нестандартность мышления.

Использование стандартных методов при решении задач с параметрами иногда приводит к необходимости выполнения очень громоздких вычислений, что существенно затрудняет решение. Такая ситуация, как правило, способствует началу творческих поисков других путей решения, их исследование, направленное на нахождение наиболее рационального, наиболее "красивого"способа решения. Под исследованием в науке понимается изучение какого-либо объекта с целью выявления закономерностей его возникновения, развития, преобразования. В процессе исследования синтезируются имеющиеся знания, накопленный опыт, а также методы и способы изучения объектов.

Данную тему особенно полезно изучить ученикам, которые собираются поступать в высшее учебное заведение и будут сдавать ЕГЭ по математике, особенно если этот экзамен для поступления должен быть профильным. В составе ЕГЭ задание №18 является уравнением, неравенством или системой с параметром. Это задание одно из самых сложных, и оценивается максимально в 4 первичных балла. Данное задание вызывает трудности у учащихся, не знающих особенностей решения задач с параметрами.

Рассмотрим решение иррационального уравнения с параметром.

Пример. Решите уравнение

$$\sqrt{7x+5}-\sqrt{x-7}=a$$

относительно переменной x при всех значениях параметра a.

Решение. Найдём область допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения, для этого нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x+5\geq 0 \\ x-7\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{5}{7} \\ x\geq 7 \end{cases}$$

Тогда ОДЗ исходного уравнения будет $x \geq 7$. Оценим при этом значения квадратных корней из исходного уравнения, получим: $\sqrt{7x+5} \geq \sqrt{54}$, $\sqrt{x-7} \geq 0$, тогда $\sqrt{7x+5}+\sqrt{x-7} > 0$. Если теперь домножить последнее выражение на сопряжённое, получим выражение $(\sqrt{7x+5}+\sqrt{x-7})(\sqrt{7x+5}-\sqrt{x-7}) = 7x+5-x+7 = 6x+12 > 0$, при $x \geq 7$, из чего следует, что выражение $\sqrt{7x+5}-\sqrt{x-7} > 0$. Тогда и левая часть исходного уравнения также должна быть больше нуля, то есть $a > 0$. Введём замену $t = \sqrt{x-7} \geq 0$. Тогда $x = t^2 + 7$, и уравнение приводится к виду:

$$\sqrt{7(t^2+7)+5} = a + t.$$

Возведём полученное уравнение в квадрат и упростим его, при этом получим:

$$6t^2 - 2at + 54 - a^2 = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) будет иметь решение только в том случае, если $D \geq 0$. В данном случае, так как коэффициент при первой степени переменной t чётный, то вместо дискриминанта можно находить $\frac{D}{4}$, это облегчит вычисление.

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6(54 - a^2) = 7a^2 - 324 \geq 0,$$

тогда $a^2 \geq \left|\sqrt{\frac{324}{7}}\right|$, $a \geq |\frac{18}{\sqrt{7}}|$, но так как $a > 0$ получим, что исходное уравнение будет иметь решение при $a \geq \frac{18}{\sqrt{7}}$, при этом $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{7a^2-324}}{6}$, а сами корни исходного уравнения будут находиться по формуле: $x_{1,2} = \frac{2}{9}(a^2-9) \pm \frac{a}{18}\sqrt{7a^2-324}$.

При $a = \frac{18}{\sqrt{7}}$ уравнение (1) имеет корень $t = \frac{3}{\sqrt{7}}$, а $x = \frac{58}{7}$.

При $\frac{18}{\sqrt{7}} < a \leq 3\sqrt{6}$ уравнение (1) имеет корни $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{7a^2-324}}{6}$, а исходное уравнение $x_{1,2} = \frac{2}{9}(a^2-9) \pm \frac{a}{18}\sqrt{7a^2-324}$.

Если же $a > 3\sqrt{6}$, то нам подходит только неотрицательный корень, то есть тогда:

$$x = \frac{2}{9}(a^2-9) + \frac{a}{18}\sqrt{7a^2-324}.$$

Ответ. При $a < \frac{18}{\sqrt{7}}$ исходное уравнение не имеет решений; при $a = \frac{18}{\sqrt{7}}$, $x = \frac{58}{7}$; при $\frac{18}{\sqrt{7}} < a \leq 3\sqrt{6}$, $x_{1,2} = \frac{2}{9}(a^2-9) \pm \frac{a}{18}\sqrt{7a^2-324}$; при $a > 3\sqrt{6}$, $x = \frac{2}{9}(a^2-9) + \frac{a}{18}\sqrt{7a^2-324}$.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что решение задач с параметрами развивает системное, логическое мышление. Являясь прекрасным материалом для исследовательской работы, решение уравнений (неравенств) с параметром развивает такие умения как наблюдение, сравнение, обобщение и другие, учит творчески мыслить, способствует развитию гибкости мыслительного процесса и, что очень важно, развивает теоретическое мышление.

Список литературы

[1] А.Егоров, Ж.Раббот *Иррациональные уравнения.* – Ж-л "КВАНТ"№ 6, – 2001.

[2] Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. *Школа решения задач с параметрами.* – М.: 2009–212с.