Интеграл Бохнера в нормированных конусах

Степанов Алексей Николаевич
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра алгебры и функционального анализа (группа 601)
e-mail: stepanov.student@gmail.com

В последние десятилетия активно развивается теория абстрактных локально выпуклых (и, в частности, нормированных) конусов. Имеется множество примеров, которые указывают на важность теории выпуклых конусов для самых разных разделов анализа. Так, недавно И. В. Орловым в [1] было исследовано понятие выпуклого нормированного конуса и на базе этого понятия построено субдифференциальное исчисление отображений векторного аргумента с приложениями в вариационном исчислении.

Идея нашей работы — построить основы теории интеграла отображений $f : I \to X$ вещественного отрезка $I = [a; b]$ в нормированный конус X.

Отметим также, что многие объекты в анализе нельзя адекватно описать в терминах выпуклых конусов. Например, если рассматривать набор необязательно выпуклых подмножеств линейного пространства со стандартными операциями сложения по Минковскому и умножения на скаляр, то эти действия не будут удовлетворять привычному набору свойств. В частности, не будет выполняться второй дистрибутивный закон $((\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \; \forall \lambda, \mu \geqslant 0, \; \forall x, y \in X)$.

Ввиду этого возникает естественная идея попробовать исследовать структуры, похожие на выпуклые конусы, но теряющие либо второй закон дистрибутивности, либо закон сокращения (или оба эти свойства). В работе Ф. С. Стонякина [2] такие структуры названы *сублинейными конусами* и рассмотрено ослабление вышеупомянутого дистрибутивного закона — *выпуклый дистрибутивный закон* (CDL): $[x] = [y] \Leftrightarrow x = y$ (здесь $[x]$ — выпуклая оболочка элемента $x \in X$), а также аналогичный *аффинный дистрибутивный закон* (ADL) $(x) = (y) \Leftrightarrow x = y$, связанный с понятием аффинной оболочки элемента $x \in X$:

$$(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; y + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x, \; \alpha_k > 0, \beta_k > 0, \; \sum_{k=1}^{n} \beta_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Эти два закона приводят к новым алгебраическим структурам — *выпуклому сублинейному конусу* и *аффинному сублинейному конусу*. Если помимо этого ещё ввести норму в таких конусах с естественным условием её инвариантности на аффинной (выпуклой) оболочке всякого элемента $x \in X$, то можно говорить о *выпуклом сублинейном нормированном конусе (ВСНК)* или *аффинном сублинейном нормированном конусе (АСНК)*.

Наша цель — рассмотреть подходы к понятию интеграла отображений $f : I = [a; b] \to X$, где X — АСНК (или ВСНК). Сходимость последовательности $x_n \to x$ в X будем понимать как существование последовательностей $\left\{h_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{h_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ из X, таких что $x_n + h_n^{(1)} = x + h_n^{(2)}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|h_n^{(1)}\right\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left\|h_n^{(2)}\right\| = 0$.

Для отображений в бесконечномерные нормированные пространства выделяют несколько аналогов интеграла Лебега. Наиболее эффективен и близок к классическому интегралу Лебега интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет большинство свойств интеграла Лебега. Поэтому мы отталкиваемся именно от понятия интеграла Бохнера и введём аналог этого понятия для отображений $f : I \to X$. Начнём с определения интеграла Бохнера простых отображений. Через mes будем обозначать классическую меру Лебега на числовой прямой, I_k, A — измеримые по Лебегу подмножества I, $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A.

Definition 1. *Простое отображение* $f(t) := \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(t)$, *где* $c_k \in X$, $I = \bigcup\limits_{k=0}^{N} I_k$, $mes(I_0) = 0$, *назовем интегрируемой по Бохнеру, если его норма* $||f(t)|| : I \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Лебегу. В таком случае*

$$(B)\int\limits_A f(t)\,dt := \sum_{k=1}^{N} c_k mes(A \cap I_k).$$

Definition 2. *Отображение* $f : I \to X$ *будем называть интегрируемым по Бохнеру, если существует такая последовательность простых отображений* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, *что для почти всех* $t \in I$ $f_n(t) + h_n^{(1)}(t) = f(t) + h_n^{(2)}(t)$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_I ||h_n^{(1)}(t)||\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_I ||h_n^{(2)}(t)||\,dt = 0,$$

а также существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(B)\int\limits_I f_n(t)\,dt$. *В таком случае по определению для всякого измеримого по Лебегу множества* $A \subset I$

$$(B)\int\limits_A f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty}(B)\int\limits_A f_n(t)\,dt.$$

Theorem 1. *Отображение* $f : I \to X$ *интегрируемо по Бохнеру тогда и только тогда, когда* f *почти всюду есть предел последовательности простых отображений, и функция* $||f(t)||$ *суммируема по Лебегу.*

Если в полном сублинейном нормированном конусе (СНК) ввести сублинейный конус $B(I, mes)$ интегрируемых по Бохнеру отображений $f : I \to X$ относительно mes и отождествить равные почти всюду функции f и g из $B(I, mes)$, то $B(I, mes)$ становится полным СНК с нормой

$$||f(\cdot)|| := \int\limits_I ||f(t)||\,dt.$$

Доказано, что неопределённый интеграл Бохнера отображений в АСНК (ВСНК) является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы. Однако в отличие от вещественного случая уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера. Проблема представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера в нормированных пространствах была исследована Ф. С. Стонякиным в [3]. Было предложено специальное понятие компактной абсолютной непрерывности, которое позволило в некотором смысле снять проблему в классе банаховых пространств. Мы переносим некоторые из этих результатов на отображения в АСНК (ВСНК), отталкиваясь от следующей теоремы [2].

Theorem 2. *Всякий АСНК (ВСНК) X с законом сокращения линейно непрерывно инъективно изометрично вложен в некоторое линейное нормированное пространство E_X.*

Некоторой проблемой является отсутствие, вообще говоря, непрерывности обратного вложения. Эта проблема, в частности, создает некоторое препятствие для непосредственного переноса результатов [3], связанных с пространствами, порожденными выпуклыми компактами в рассматриваемый нами класс нормированных конусов.

Однако в АСНК (ВСНК) можно стандартным образом ввести понятие линейного ограниченного функционала (с условием $|\ell(x)| \leqslant C\|x\|$ для некоторой постоянной $C > 0$), и понятие сопряжённого пространства X^*_{lin} к X. Идея нашего подхода — замена абсолютно выпуклого компакта из [3] на специальную систему линейных функционалов. По теореме 2 X линейно инъективно изометрично вложен в нормированное пространство E_X и поэтому в X можно ввести метрику $\rho : X \times X \to \mathbb{R} : \ \rho(0, x) = ||x||$. Для соответствующего линейного изометричного вложения $\varphi : X \to E$ $\rho(x, y) := ||\varphi(x) - \varphi(y)||_E$. При таком выборе метрики ρ X можно считать метрическим пространством. Заметим также, что $||\varphi(x)||_E = ||x||_X$, то есть $E^* \subset X^*_{lin}$. Это позволяет доказать такой результат.

Theorem 3. *Пусть для отображения $F : I \to X$, X — полное метрическое пространство, существует такая нормирующая последовательность функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*_{lin}$, что для некоторой сходящейся к нулю числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ и $\forall C > 0 \ \exists \delta > 0 :$*

$$\left(\forall \bigcup_{k=1}^{p} [\alpha_k; \beta_k) \subset I : \ \sum_{k=1}^{p} (\beta_k - \alpha_k) < \delta\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\ell_n(F(\beta_k)) - \ell_n(F(\alpha_k))|}{\varepsilon_n} < C.$$

Тогда для почти всех $t \in I$ существует производная $F'(t) \in X$ и верно

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x F'(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Список литературы

[1] Орлов И. В., *Введение в сублинейный анализ. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, **53** (2014), 64 – 132.

[2] Стонякин Ф. С., *Сублинейные нормированные конусы: теоремы отделимости и смежные результаты. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, В печати.

[3] Стонякин Ф. С., *Компактные характеристики отображений в локально выпуклых пространствах и их приложения в векторном интегрировании. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Симферополь: 2011.*