# Об устойчивости решений рекуррентных уравнений

*Сошенкова Екатерина Викторовна*
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)
e-mail: soshenkova@mail.ua

Разностные уравнения вида

$$x(k+1) = F(k, x(k)), \tag{1}$$

где $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $F(k, \cdot)\colon x \mapsto F(k, x)$ — известная вектор-функция, при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ определенная и непрерывная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, широко используются для описания эволюции во времени разнообразных процессов, состояние которых наблюдается в дискретные моменты времени, в теории управления, в математической биологии, при организации вычислительных экспериментов и т.п. Уравнения вида (1) нередко называют рекуррентными.

Пара $(k_0, x^0) \in \mathbb{N}_0 \times D$ однозначно определяет конечную или бесконечную последовательность

$$x(k_0+1) = F(k_0, x^0), \quad x(k_0+2) = F(k_0+1, x(k_0+1)), \dots$$

— решение $x(k_0, x^0)$ разностного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(k_0) = x^0$. Таким образом, уравнение (1) определяет некоторое семейство вещественных функций целочисленного аргумента $x(k_0, x^0)\colon k \mapsto x(k; k_0, x^0)$.

Пусть $F(k, 0) = 0$ для всякого $k \in \mathbb{N}_0$, тогда уравнение (1) имеет нулевое решение. Обозначим через $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < r\}$ — открытый шар радиуса $r$ с центром в нуле ($\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$). Нулевое решение уравнения (1) называется

- *устойчивым*, если для всякого $k_0 \geq 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $x^0 \in B_\delta$ $x(k; k_0, x^0) \in B_\varepsilon$ для всех $k \geq k_0$;
- *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и для всякого $k_0 \geq 0$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всякого $x^0 \in B_{\delta_0}$ $\lim_{k\to\infty} \|x(k; k_0, x^0)\| = 0$;
- *экспоненциально устойчивым*, если оно асимптотически устойчиво и так, что $\|x(k; k_0, x^0)\| \leq C \exp(-\gamma(k - k_0))$ для некоторых положительных постоянных $C$ и $\gamma$;
- *неустойчивым*, если оно не является устойчивым.

Проблема устойчивости решений разностных уравнений является первоочередной и в этом вопросе можно увидеть много общего с обыкновенными дифференциальными уравнениями, начиная с определения устойчивости. Как и в теории дифференциальных уравнений, основным методом исследования устойчивости разностных уравнений вида (1) является второй метод Ляпунова. Основные теоремы второго метода имеют очевидные аналоги для разностных уравнений, а именно, достаточно заменить производную $\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} f(t,x)$ функции $v(t,x)$ в силу системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t,x)$ на приращение $\Delta v(k,x) = v(k, F(k,x)) - v(k,x)$ функции $v(k,x)$ вдоль решения разностного уравнения.

Пусть уравнение (1) — линейное с постоянными коэффициентами, т. е. имеет вид

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{2}$$

где $A$ — постоянная матрица. Легко видеть, что общее решение уравнения (2) имеет вид: $x(k,c) = A^k c$, где $c$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Как известно, все решения системы (2) имеют одинаковый тип устойчивости, поэтому принято говорить об устойчивости линейной системы (2).

Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус матрицы $A$. Опираясь на известную теорему о том, что в $\mathbb{R}^n$ существует базис из собственных и присоединенных векторов матрицы $A$, нетрудно доказать, что

- если $\rho(A) < 1$, то система (2) экспоненциально устойчива;
- если $\rho(A) > 1$, то система (2) неустойчива;
- если $\rho(A) = 1$ и все собственные значения, равные 1 по модулю, имеют одинаковые алгебраическую и геометрическую кратности, то система (2) устойчива.

Формулировки и доказательства упомянутых результатов можно найти в [1]. Имеется также много учебников и монографий, посвященных разностным уравнениям на английском языке, в частности, [2]– [3].

Рассмотрим квазилинейную систему

$$x(k+1) = Ax(k) + g(k, x(k)), \tag{3}$$

где $g(k,x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$, т. е. $\lim_{\|x\|\to 0} g(k,x)/\|x\| = 0$ равномерно по $k \in \mathbb{N}_0$. Теорема об устойчивости по первому приближению [1] утверждает, что нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, если $\rho(A) < 1$ и неустойчиво, если $\rho(A) > 1$.

Если $\rho(A) = 1$, то говорят, что имеет место *критический случай устойчивости*. В критическом случае анализ линейного приближения не позволяет сделать какое-либо заключение об устойчивости нулевого решения. Характер устойчивости в этом случае можно сделать, используя инструменты второго метода Ляпунова.

Рассмотрим два иллюстративных примера исследования устойчивости в критическом случае.

**Пример 1.** Пусть уравнение (3) скалярное:

$$x(k+1) = x(k) + bx^m(k) + g(k, x(k)), \tag{4}$$

где $g(k,x) = o(|x|^m)$ при $|x| \to 0$. Покажем, что при четном $m$ нулевое решение этого уравнения неустойчиво при любом $b \neq 0$, а при нечетном $m \geq 3$ — асимптотически устойчиво при $b < 0$ и неустойчиво при $b > 0$.

Пусть $m = 2q$, $q = 1, 2, \ldots$. Тогда знакопеременная функция $v(x) = x$ имеет знакоопределенное приращение

$$\Delta v(k, x) = x + bx^m + g(k, x) - x = bx^m + g(k, x).$$

По теореме Ляпунова о неустойчивости нулевое решение уравнения (4) неустойчиво.

Теперь пусть $m = 2q + 1$, $q = 1, 2, \ldots$. Положим $v(x) = x^2$, тогда

$$\Delta v(k,x) = (x + bx^m + g(k,x))^2 - x^2 = 2bx^{m+1} + 2xg(k,x) + b^2x^{2m} + \\ + [g(k,x)]^2 = 2bx^{m+1} + o(|x|^{m+1}).$$

Отсюда на основании теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости следует наше утверждение.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь квадратичную автономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + f_{20}x_1^2(k) + f_{11}x_1(k)x_2(k) + f_{02}x_2^2(k), \\ x_2(k+1) &= \alpha x_2(k) + g_{20}x_1^2(k) + g_{11}x_1(k)x_2(k) + g_{02}x_2^2(k), \end{aligned} \tag{5}$$

где $|\alpha| < 1$, $f_{ij}, g_{ij} \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы снова имеем дело с критическим случаем.

Определим семейство знакопеременных функций

$$v(x) = x_1 + cx_2^2,$$

где $c$ — константа. Приращение функции $v$ вдоль решения системы (5) имеет вид

$$\Delta v(x) = x_1 + f_{20}x_1^2 + f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 + \left(\alpha x_2 + g_{20}x_1^2 + g_{11}x_1x_2 + g_{02}x_2^2\right)^2 - \\ - (x_1 + x_2^2) = f_{20}x_1^2 + f_{11}x_1x_2 + [2f_{02} + c(\alpha^2 - 1)]x_2^2 + \ldots,$$

где многоточие обозначает сумму одночленов степени 3 и выше. Главная часть приращения есть квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f_{20} & f_{11}/2 \\ f_{11}/2 & f_{02} + c(\alpha^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

На основании критерия Сильвестра знакоопределенности симметричных матриц делаем следующий вывод. Если $f_{20} > 0$, то при достаточно большом по модулю $c < 0$ матрица положительно определена. Если $f_{20} < 0$, то при достаточно большом $c > 0$ матрица отрицательно определена. По теореме Ляпунова о неустойчивости [1] нулевое решение системы (5) неустойчиво при любом $f_{20} \neq 0$. В случае, когда $f_{20} = 0$ требуется дополнительное исследование.

Метод функций Ляпунова позволяет не только определить характер устойчивости нулевого решения системы (5), но и указать гарантированную область притяжения (или отталкивания) в окрестности нуля.

При исследовании более сложных задач целесообразно преобразовывать уравнения системы посредством последовательности нелинейных замен переменных, приводящих систему к нормальной форме Пуанкаре [4].

### Список литературы

[1] Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем: учебное пособие. — СПб: Нии Химии СПбГУ, 2003. — 112 с.

[2] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications. — N.Y.: Marcel Dekker, 2000. — 971 pp.

[3] Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. — Springer, 2005. — 539 pp.

[4] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука,1978. — 304 с.

# Интеграл Бохнера в нормированных конусах

*Степанов Алексей Николаевич*

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра алгебры и функционального анализа (группа 601)

e-mail: stepanov.student@gmail.com

В последние десятилетия активно развивается теория абстрактных локально выпуклых (и, в частности, нормированных) конусов. Имеется множество примеров, которые указывают на важность теории выпуклых конусов для самых разных разделов анализа. Так, недавно И. В. Орловым в [1] было исследовано понятие выпуклого нормированного конуса и на базе этого понятия построено субдифференциальное исчисление отображений векторного аргумента с приложениями в вариационном исчислении.

Идея нашей работы — построить основы теории интеграла отображений $f : I \to X$ вещественного отрезка $I = [a; b]$ в нормированный конус $X$.

Отметим также, что многие объекты в анализе нельзя адекватно описать в терминах выпуклых конусов. Например, если рассматривать набор необязательно выпуклых подмножеств линейного пространства со стандартными операциями сложения по Минковскому и умножения на скаляр, то эти действия не будут удовлетворять привычному набору свойств. В частности, не будет выполняться второй дистрибутивный закон $((\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x\ \forall \lambda, \mu \geqslant 0,\ \forall x, y \in X)$.

Ввиду этого возникает естественная идея попробовать исследовать структуры, похожие на выпуклые конусы, но теряющие либо второй закон дистрибутивности, либо закон сокращения (или оба эти свойства). В работе Ф. С. Стонякина [2] такие структуры названы *сублинейными конусами* и рассмотрено ослабление вышеупомянутого дистрибутивного закона — *выпуклый дистрибутивный закон* ($CDL$): $[x] = [y] \Leftrightarrow x = y$ (здесь $[x]$ — выпуклая оболочка элемента $x \in X$), а также аналогичный *аффинный дистрибутивный закон* ($ADL$) $(x) = (y) \Leftrightarrow x = y$, связанный с понятием аффинной оболочки элемента $x \in X$ :

$$(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; y + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x,\ \alpha_k > 0, \beta_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Эти два закона приводят к новым алгебраическим структурам — *выпуклому сублинейному конусу* и *аффинному сублинейному конусу*. Если помимо этого ещё ввести норму в таких конусах с естественным условием её инвариантности на аффинной (выпуклой) оболочке всякого элемента $x \in X$, то можно говорить о *выпуклом сублинейном нормированном конусе (ВСНК)* или *аффинном сублинейном нормированном конусе (АСНК)*.

Наша цель — рассмотреть подходы к понятию интеграла отображений $f : I = [a; b] \to X$, где $X$ — АСНК (или ВСНК). Сходимость последовательности $x_n \to x$ в $X$ будем понимать как существование последовательностей $\left\{h_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{h_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ из $X$, таких что $x_n + h_n^{(1)} = x + h_n^{(2)}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|h_n^{(1)}\right\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left\|h_n^{(2)}\right\| = 0$.

Для отображений в бесконечномерные нормированные пространства выделяют несколько аналогов интеграла Лебега. Наиболее эффективен и близок к классическому интегралу Лебега интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет большинство свойств интеграла Лебега. Поэтому мы отталкиваемся именно от понятия интеграла Бохнера и введём аналог этого понятия для отображений $f : I \to X$. Начнём с определения интеграла Бохнера простых отображений. Через $mes$ будем обозначать классическую меру Лебега на числовой прямой, $I_k$, $A$ — измеримые по Лебегу подмножества $I$, $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества $A$.

**Definition 1.** *Простое отображение* $f(t) := \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(t)$, *где* $c_k \in X$, $I = \bigcup\limits_{k=0}^{N} I_k$, $mes(I_0) = 0$, *назовем интегрируемой по Бохнеру, если его норма* $||f(t)|| : I \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Лебегу. В таком случае*

$$(B)\int\limits_A f(t)\,dt := \sum_{k=1}^{N} c_k mes(A \cap I_k).$$

**Definition 2.** *Отображение* $f : I \to X$ *будем называть интегрируемым по Бохнеру, если существует такая последовательность простых отображений* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, *что для почти всех* $t \in I$ $f_n(t) + h_n^{(1)}(t) = f(t) + h_n^{(2)}(t)$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_I ||h_n^{(1)}(t)||\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_I ||h_n^{(2)}(t)||\,dt = 0,$$

*а также существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(B)\int\limits_I f_n(t)\,dt$. *В таком случае по определению для всякого измеримого по Лебегу множества* $A \subset I$

$$(B)\int\limits_A f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty}(B)\int\limits_A f_n(t)\,dt.$$

**Theorem 1.** *Отображение* $f : I \to X$ *интегрируемо по Бохнеру тогда и только тогда, когда* $f$ *почти всюду есть предел последовательности простых отображений, и функция* $||f(t)||$ *суммируема по Лебегу.*

Если в полном сублинейном нормированном конусе (СНК) ввести сублинейный конус $B(I, mes)$ интегрируемых по Бохнеру отображений $f : I \to X$ относительно $mes$ и отождествить равные почти всюду функции $f$ и $g$ из $B(I, mes)$, то $B(I, mes)$ становится полным СНК с нормой

$$||f(\cdot)|| := \int\limits_I ||f(t)||\,dt.$$

Доказано, что неопределённый интеграл Бохнера отображений в АСНК (ВСНК) является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы. Однако в отличие от вещественного случая уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера. Проблема представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера в нормированных пространствах была исследована Ф. С. Стонякиным в [3]. Было предложено специальное понятие компактной абсолютной непрерывности, которое позволило в некотором смысле снять проблему в классе банаховых пространств. Мы переносим некоторые из этих результатов на отображения в АСНК (ВСНК), отталкиваясь от следующей теоремы [2].

**Theorem 2.** *Всякий АСНК (ВСНК) $X$ с законом сокращения линейно непрерывно инъективно изометрично вложен в некоторое линейное нормированное пространство $E_X$.*

Некоторой проблемой является отсутствие, вообще говоря, непрерывности обратного вложения. Эта проблема, в частности, создает некоторое препятствие для непосредственного переноса результатов [3], связанных с пространствами, порожденными выпуклыми компактами в рассматриваемый нами класс нормированных конусов.

Однако в АСНК (ВСНК) можно стандартным образом ввести понятие линейного ограниченного функционала (с условием $|\ell(x)| \leqslant C\|x\|$ для некоторой постоянной $C > 0$), и понятие сопряжённого пространства $X^*_{lin}$ к $X$. Идея нашего подхода — замена абсолютно выпуклого компакта из [3] на специальную систему линейных функционалов. По теореме 2 $X$ линейно инъективно изометрично вложен в нормированное пространство $E_X$ и поэтому в $X$ можно ввести метрику $\rho : X \times X \to \mathbb{R} : \rho(0, x) = ||x||$. Для соответствующего линейного изометричного вложения $\varphi : X \to E$ $\rho(x, y) := ||\varphi(x) - \varphi(y)||_E$. При таком выборе метрики $\rho$ $X$ можно считать метрическим пространством. Заметим также, что $||\varphi(x)||_E = ||x||_X$, то есть $E^* \subset X^*_{lin}$. Это позволяет доказать такой результат.

**Theorem 3.** *Пусть для отображения $F : I \to X$, $X$ — полное метрическое пространство, существует такая нормирующая последовательность функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*_{lin}$, что для некоторой сходящейся к нулю числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_n > 0)_{n=1}^{\infty}$ и $\forall C > 0\ \exists \delta > 0 :$*

$$\left(\forall \bigcup_{k=1}^{p} [\alpha_k; \beta_k) \subset I : \sum_{k=1}^{p} (\beta_k - \alpha_k) < \delta\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\ell_n(F(\beta_k)) - \ell_n(F(\alpha_k))|}{\varepsilon_n} < C.$$

*Тогда для почти всех $t \in I$ существует производная $F'(t) \in X$ и верно*

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x F'(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

## Список литературы


[1] Орлов И. В., *Введение в сублинейный анализ. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, **53** (2014), 64 – 132.

[2] Стонякин Ф. С., *Сублинейные нормированные конусы: теоремы отделимости и смежные результаты. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, В печати.

[3] Стонякин Ф. С., *Компактные характеристики отображений в локально выпуклых пространствах и их приложения в векторном интегрировании. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Симферополь: 2011.*