Факторы типа (II_1)

Смаилова Эльзара Рефатовна

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)

e-mail: elzara.mamatova@mail.ru

В работе рассматриваются факторы типа (II_1), построенные по дискретной группе преобразований.

Пусть H —гильбертово пространство, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ — подалгебра фон Неймана, $\mathcal{M}'$ — коммутант, а $\mathcal{M}''$ — бикоммутант $\mathcal{M}$. Центром алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ называется множество $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

Для любой алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет место вложение:

$$\mathbb{C}_H = \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq Z(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Если $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется коммутативной. В этом случае имеет место вложение $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$.

Если $Z(\mathcal{M}) = \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}\}$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *фактором*.

Обозначим через $P(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{M} : P^2 = P^* = P\}$ множество всех ортопроекторов алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Для любого фактора $\mathcal{M}$ существует функция $D : P(\mathcal{M}) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $D(P) = 0$, если $P = 0$; $D(P) > 0$, если $P \neq 0$.
2) $D(P) = \infty$ тогда и только тогда, когда проектор P – бесконечен.
3) Если $P \sim Q$, то $D(P) = D(Q)$.
4) Если $P \perp Q$, то $D(P \oplus Q) = D(P) + D(Q)$
5) Если $P \prec Q$ и P – конечен, то $D(P) < D(Q)$.

Функция $D(P)$, удовлетворяющая условиям 1), 3), 4), называется относительной размерностью или размерностной функцией. Область изменения размерностной функции, после соответствующей нормировки, есть одно из следующих множеств:

(I_n) $\quad \triangle = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
(I_∞) $\quad \triangle = \{1, 2, 3, \ldots\}$
(II_1) $\quad \triangle = [0, 1]$
(II_∞) $\quad \triangle = [0, \infty]$
(III) $\quad \triangle = \{0, \infty\}$

Говорят, что $\mathcal{M}$ — фактор типа $(I_n), (I_\infty), (II_1), (II_\infty)$ или (III), если множество значений $\triangle$ размерностной функции $D_\mathcal{M}$ имеет соответствующий вид. Факторы типа $(I_n), (I_\infty)$ называют *дискретными*. Факторы типа $(II_1), (II_\infty)$ называют *непрерывными*. Факторы типа $(I_n), (II_1)$ называют *конечными*. Факторы типа $(I_\infty), (II_\infty)$ называют *бесконечными*. Факторы типа (III) называют *вполне бесконечными*.

Пусть $\mathcal{M}$ — фактор конечного типа, A — эрмитов оператор из $\mathcal{M}$, $P(\lambda)$—спектральная функция оператора A. Тогда $P(\lambda) \in \mathcal{M}$ для любого λ и функция

$D_{\mathcal{M}}(P(\lambda))$ является неубывающей функцией от λ. Если $\|A\|_{\mathcal{M}} < C$, то $P(\lambda)$ и $D_{\mathcal{M}}(P(\lambda))$ постоянны вне интервала $[-C, C]$. Поэтому существует число

$$T_{\mathcal{M}}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dD_{\mathcal{M}}(P(\lambda)) = \int\limits_{-C}^{C} \lambda dD_{\mathcal{M}}(P(\lambda)),$$

которое называется *относительным следом оператора* A.

Если $\mathcal{M}$ — фактор конечного типа, то существует одна и только одна функция $T(A)$, определенная для всех эрмитовых операторов A из $\mathcal{M}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1') $T(1) = 1$;
2') $T(\alpha A) = \alpha T(A)$ для всех вещественных α;
3') $T(A + B) = T(A) + T(B)$, если A и B перестановочны;
4') $T(A) \geq 0$, если A — положительно определенный оператор;
5') $T(U^{-1}AU) = T(A)$, если U — унитарный оператор из $\mathcal{M}$.

Эта функция есть относительный след $T_{\mathcal{M}}(A)$.

Утверждение 4. *Если существует функция $T(A)$, определенная для всех эрмитовых операторов из фактора $\mathcal{M}$, удовлетворяющая условиям $1' - 4'$ и дополнительным условиям:*

$6'^*$) *$T(AB) = T(BA)$, если $A, B \in \mathcal{M}$, AB и BA — эрмитовы операторы;*
$7'^*$) *$P = 0$, если $T(P) = 0$ и P – оператор проектирования,*

то $\mathcal{M}$ — фактор конечного типа, а $T(A)$ — относительный след в $\mathcal{M}$.

Построение примеров Факторов всегда привлекало внимание специалистов по алгебрам фон Неймана. Первые примеры были построены Дж.Мюрреем и Дж. фон Нейманом. Более подробный обзор можно найти в статье Лодкина А.А., Рубштейна Б.А. Мы рассматриваем пример фактора типа (II_1), построенного по дискретной группе преобразований.

Пример фактора типа (II_1)**.** Пусть $\mathfrak{G}$ — счетная дискретная группа всех преобразований $S(x) = ax + b, a > 0$ с рациональными коэффициентами a и b, с единичным элементом $E(x) = x$, удовлетворяющая условию: если $S \neq E$, то класс $\mathfrak{G}_S$ всех элементов вида $S_2^{-1}SS_2$, $S_2 \in \mathfrak{G}$, бесконечен. Ясно, что для любого $S \in \mathfrak{G}$ обратный элемент имеет вид $S^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$.

Образуем гильбертово пространство $\mathcal{H}$, элементами которого являются векторы $x = \{x_S, S \in \mathfrak{G}\}$, $x_S \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{S \in \mathfrak{G}} | x_S |^2 < \infty$, причем скалярное произведение двух векторов $x = \{x_S, S \in \mathfrak{G}\}$ и $y = \{y_S, S \in \mathfrak{G}\}$ определяется формулой $(x,y) = \sum\limits_{S \in \mathfrak{G}} x_S \overline{y_S}$.

Введем в пространстве $\mathcal{H}$ операторы $U_{S_0}, V_{S_0}, S_0 \in \mathfrak{G}$, полагая

$$U_{S_0}\{x_S, S \in \mathfrak{G}\} = \{x_{SS_0}, S \in \mathfrak{G}\},$$

$$V_{S_0}\{x_S, S \in \mathfrak{G}\} = \{x_{S_0^{-1}S}, S \in \mathfrak{G}\}.$$

Так как

$$U_{S_0}V_{S_0}\{x_S\} = U_{S_0}\{x_{S_0^{-1}S}\} = \{x_{S_0^{-1}SS_0}\}$$

и

$$V_{S_0}U_{S_0}\{x_S\} = V_{S_0}\{x_{SS_0}\} = \{x_{S_0^{-1}SS_0}\},$$

то операторы U_{S_0} и V_{S_0} —коммутируют. Кроме того, U_{S_0} и V_{S_0} — унитарные операторы в $\mathcal{H}$. Действительно,

$$U_{S_0}U_{S_0}^*\{x_S\} = U_{S_0}U_{S_0^{-1}}\{x_S\} = U_{S_0}\{x_{SS_0^{-1}}\} = \{x_{SS_0^{-1}S_0}\} = \{x_S\},$$

$$U_{S_0}^*U_{S_0}\{x_S\} = U_{S_0^{-1}}U_{S_0}\{x_S\} = U_{S_0^{-1}}\{x_{SS_0}\} = \{x_{SS_0S_0^{-1}}\} = \{x_S\}.$$

Следовательно, $U_{S_0}U_{S_0}^* = U_{S_0}^*U_{S_0} = I_{\mathcal{H}}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}$.

Аналогично,

$$V_{S_0}V_{S_0}^*\{x_S\} = V_{S_0}V_{S_0^{-1}}\{x_S\} = V_{S_0}\{x_{S_0S}\} = \{x_{S_0^{-1}S_0S}\} = \{x_S\},$$

$$V_{S_0}^*V_{S_0}\{x_S\} = V_{S_0^{-1}}V_{S_0}\{x_S\} = V_{S_0^{-1}}\{x_{S_0^{-1}S}\} = \{x_{S_0S_0^{-1}S}\} = \{x_S\}.$$

Следовательно, $V_{S_0}V_{S_0}^* = V_{S_0}^*V_{S_0} = I_{\mathcal{H}}$.

Пусть $\mathcal{M}_1$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов A, перестановочных со всеми операторами V_{S_0}, а $\mathcal{M}_2$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов B, перестановочных со всеми операторами U_{S_0}. Так как U_{S_0} и V_{S_0} коммутируют, то

$$U_{S_0} \in \mathcal{M}_1, \quad V_{S_0} \in \mathcal{M}_2 \ \text{ для любого } S_0 \in \mathfrak{G}. \tag{1}$$

Всякий ограниченный оператор A в $\mathcal{H}$ можно представить в виде ограниченной числовой матрицы $\| A_{S,S_1} \|_{S,S_1 \in \mathfrak{G}}$. Если $A \in \mathcal{M}_1$, то условие перестановочности с операторами V_{S_0} дает $A_{S_0S,S_0S_1} = A_{S,S_1}$. Полагая $S_0 = S^{-1}$, получим: $A_{S,S_1} = A_{E,S^{-1}S_1}$. Обозначим $A_{S_2} = A_{E,S_2}$. Тогда $A_{E,S^{-1}S_1} = A_{S^{-1}S_1}$.

Итак, матрица оператора $A \in \mathcal{M}_1$ должна иметь вид $\| A_{S^{-1}S_1} \|_{S,S_1 \in \mathfrak{G}}$. Аналогично, матрица оператора $B \in \mathcal{M}_2$ должна иметь вид $\| B_{SS_1^{-1}} \|_{S,S_1 \in \mathfrak{G}}$.

Теорема 1. *$*$-Алгебры $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ являются факторами.*

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}'_2 = \mathcal{M}_1$. Для этого заметим, что каждая матрица $A =\| A_{S^{-1}S_1} \|$ перестановочна с каждой матрицей $B =\| B_{SS_1^{-1}} \|$. Действительно,

$$AB = \left\| \sum_{S_2} A_{S^{-1}S_2} B_{S_2 S_1^{-1}} \right\|, \quad BA = \left\| \sum_{S_2} B_{SS_2^{-1}} A_{S_2^{-1}S_1} \right\|.$$

Полагая в первой сумме $S_2 = SS_2'^{-1}S_1$, получаем:

$$\sum_{S_2} A_{S^{-1}S_2} B_{S_2 S_1^{-1}} = \sum_{S_2'} A_{S^{-1}SS_2'^{-1}S_1} B_{SS_2'^{-1}S_1S_1^{-1}} = \sum_{S_2'} A_{S_2'^{-1}S_1} B_{SS_2'^{-1}},$$

следовательно, $AB = BA$. Отсюда

$$\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}'_2. \tag{2}$$

С другой стороны, из соотношений (1) вытекает, что

$$\mathcal{M}_1 = \{R(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset \mathcal{M}'_2, \quad \mathcal{M}_2 = \{R(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset \mathcal{M}'_1, \tag{3}$$

где $R(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$ — минимальная алгебра фон Неймана, содержащая $(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$, а $R(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$ — минимальная алгебра фон Неймана, содержащая $(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G})$.

Сравнивая соотношения (3) и (2), видим, что

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}'_2 = R(U_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G}), \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}'_1 = R(V_{S_0} : S_0 \in \mathfrak{G}).$$

Найдем пересечение $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. Если оператор A принадлежит этому пересечению, то его матрица $\| A_{S,S_1} \|$ должна удовлетворять обоим условиям

$$A_{S_0S,S_0S_1} = A_{SS_0,S_1S_0} = A_{S,S_1}.$$

Из первого условия, как было показано выше, следует, что $A_{S,S_1} = A_{S^{-1}S_1}$. Из второго условия получим:

$$A_{S,S_1} = A_{SS_0,S_1S_0} = A_{S_0^{-1}S^{-1}S_1S_0},$$

т.е. $A_{S_0^{-1}S^{-1}S_1S_0} = A_{S^{-1}S_1}$. Следовательно, функция A_S постоянна на каждом классе $\mathfrak{G}_{S_0}$. С другой стороны, в силу ограниченности матрицы $\|A_{S,S_1}\|$, должно выполняться неравенство

$$\sum_{S_2 \in \mathfrak{G}} |A_{S_2}|^2 = \sum_{S_2 \in \mathfrak{G}} |A_{E,S_2}|^2 < \infty. \tag{4}$$

Так как, согласно условию, класс $\mathfrak{G}_{S_0}$ бесконечен при $S_0 \neq E$, то выполнение условия (4) возможно только в том случае, когда постоянное значение функции A_S на каждом классе $\mathfrak{G}_{S_0}$ равно нулю. Таким образом, $A_{S_2} = 0$ при $S_2 \neq E$. Следовательно, $A_{S,S_1} = \delta_{S,S_1} A_E$, где

$$\delta_{S,S_1} = \begin{cases} 1, & S = S_1, \\ 0, & S \neq S_1. \end{cases}$$

Это означает, что $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}'_2 \cap M_2$, т.е. что $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — факторы. □

Теорема 2. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ *— факторы класса* (II_1).

Доказательство. Рассмотрим, например, фактор $\mathcal{M}_1$. Каждому оператору A из $\mathcal{M}_1$ с матрицей $\|A_{S^{-1}S_1}\|$ поставим в соответствие число $T(A) = A_E$ и докажем, что полученная таким образом функция $T(A)$ удовлетворяет условиям утверждения 4. Во-первых, очевидно, что $T(1) = 1$, $T(\alpha A) = \alpha T(A)$, $T(A+B) = T(A)+T(B)$, так что условия 1', 2', 3' относительного следа выполнены. Далее, если A — положительно определенный эрмитов оператор из $\mathcal{M}_1$, то $A = B^* B$, где $B \in \mathcal{M}_1$. Пусть оператору A соответствует матрица $\|A_{S^{-1}S_1}\|$, а оператору B — матрица $\|B_{S^{-1}S_1}\|$. Тогда $A_{S^{-1}S_1} = \sum\limits_{S_2} \overline{B}_{S_2^{-1}S} B_{S_2^{-1}S_1}$, следовательно, при $S = S_1 = E$

$$T(A) = A_E = \sum_{S_2} \| B_{S_2}^{-1} \|^2 \geq 0,$$

причем знак равенства возможен только тогда, когда $B_{S_2} \equiv 0$, т.е. когда $A = 0$. Условия 4' и 7'* тем самым проверены. Аналогично можно доказать, что $T(AB) = T(BA)$ для любых $A, B \in \mathcal{M}_1$.

Таким образом, функция $T(A)$ удовлетворяет всем условиям утверждения 4. Следовательно, $\mathcal{M}_1$ — фактор конечного класса. С другой стороны, случай (I_n) здесь невозможен, так как $\mathcal{M}_1$ содержит бесконечное множество линейно независимых элементов U_{S_0}. Следовательно, $\mathcal{M}_1$ — фактор класса (II_1).

Аналогично доказывается, что $\mathcal{M}_2$ — фактор класса (II_1). □

Список литературы

[1] Наймарк М.А. *Нормированные кольца.* – М., – 1968 – С. 664.

[2] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.* – Киев:Институт математики НАН Украины, – 2007 – С. 390.

[3] Мёрфи Дж. *C*-алгебры и теория операторов.* – М.: Изд-во ≪Факториал≫, – 1997 – С. 336.

[4] Takesaki M. *Theory of operator algebras II.* – Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.

[5] Лодкин А.А., Рубштейн Б.А. *Структура и алассификация факторов.* Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. Нов. достиж., – 1985, – Т.26, – С. 127-170.