Разностно-краевые задачи типа Карлемана для полосы

Рогожинару Надежда Анатольевна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)

e-mail: nadusha92@mail.ru

Уравнения типа свертки и сводящиеся к ним (или к краевым задачам теории аналитических функций) задачи для уравнений в частных производных, задачи для разностных уравнений имеют широкие приложения [1,2]. Ю.И. Черский указывает на важность различных обобщений такого класса задач [2]. В данной работе рассматривается пример разностно-краевой задачи типа Карлемана. Результаты являются продолжением исследований начатых в работах [2-4] и получены совместно с В.А. Лукьяненко.

Пусть требуется найти функцию $u_k(x,y)$ по условиям

$$\Delta u_k(x,y)=0,\ x\in\mathbb{R},\ k-1\le y\le k, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u_k(x,k)-u_k(x,k-1)=m_k(x),\ x\in\mathbb{R},\\ \tfrac{\partial}{\partial y}u_{k+1}(x,k)=e^{-x}[u_k(x,k-1)-g_k(x)]. \end{gathered} \tag{2}$$

Применим преобразование Фурье по переменной x [1]:

$$U_k(\xi,y)=Fu_k(x,y).$$

Из (0.2) следует

$$\begin{gathered} U_k(\xi,k)-U_k(\xi,k-1)=M_k(\xi),\ \xi\in\mathbb{R},\\ \tfrac{\partial}{\partial y}U_{k+1}(\xi,k)=\Phi_k(\xi+i),\\ U_k(\xi,k-1)-G_k(\xi)=\Phi_k(\xi). \end{gathered} \tag{3}$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению Лапласа (0.1) получим

$$(-i\xi)^2U_k(\xi,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}U_k(\xi,y)=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \xi^2 = 0.$$

Откуда следует, что общее решение запишется в виде

$$U_k(\xi, y) = A_k(\xi)e^{-\xi y} + B_k(\xi)e^{\xi y}$$

или

$$U_k(\xi, y) = A_k(\xi)sh\xi(y-k) + B_k(\xi)ch\xi(y-k),\ k-1 < y < k.$$

Из (3) следует

$$\begin{gathered} U_k(\xi,k) = A_k(\xi)sh\xi(k-k) + B_k(\xi)ch\xi(k-k) = B_k(\xi), \\ \frac{\partial}{\partial y}U_k(\xi,y) = A_k(\xi)\xi ch\xi(y-k) + B_k(\xi)\xi sh\xi(y-k), \\ U_k(\xi,k) - U_k(\xi,k-1) = B_k(\xi) - [-A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)ch\xi] = M_k(\xi). \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} U_k(\xi,k-1) - G_k(\xi) = -A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)ch\xi - G_k(\xi) = \Phi_k(\xi), \\ \frac{\partial}{\partial y}U_{k+1}(\xi,k) = A_{k+1}(\xi)\xi ch\xi + B_{k+1}(\xi)\xi sh\xi = \Phi_k(\xi+1). \end{gathered} \tag{5}$$

Из системы

$$\begin{gathered} A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)[1-ch\xi] = M_k(\xi), \\ -A_k(\xi)sh\xi + B_k(\xi)ch\xi = G_k(\xi) + \Phi_k(\xi), \end{gathered}$$

находим

$$A_k(\xi) = \frac{ch\xi M_k(\xi) - [1-ch\xi][G_k(\xi)+\Phi_k(\xi)]}{sh\xi},$$

$$B_k(\xi) = \frac{sh\xi[G_k(\xi)+\Phi_k(\xi)] + sh\xi M_k(\xi)}{sh\xi},$$

$$\begin{gathered} \frac{\xi ch\xi}{sh\xi}(ch\xi M_{k+1}(\xi) - [1-ch\xi][G_{k+1}(\xi)+\Phi_{k+1}(\xi)]) + \\ +\frac{\xi sh\xi}{sh\xi}(sh\xi[G_{k+1}(\xi)+\Phi_{k+1}(\xi)] + sh\xi M_{k+1}(\xi)) = \Phi_k(\xi+i), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Phi_k(\xi+i) = \xi\left[\frac{ch\xi}{sh\xi}+1\right]\Phi_{k+1}(\xi) + \xi\left[\frac{ch\xi}{sh\xi}ch\xi + \frac{sh\xi}{sh\xi}sh\xi\right]M_{k+1}(\xi) + \\ +\xi\left[\frac{sh\xi}{sh\xi}sh\xi + \frac{ch\xi}{sh\xi}[1-ch\xi]\right]G_{k+1}(\xi). \end{gathered}$$

Окончательно получаем разностно-краевую задачу

$$\Phi_k(\xi+i) = \xi\left[\frac{ch\xi}{sh\xi}+1\right]\Phi_{k+1}(\xi) + \tilde{G}_{k+1}(\xi), \tag{6}$$

где

$$\tilde{G}_{k+1}(\xi) = \xi\frac{ch^2\xi + sh^2\xi}{sh\xi}M_{k+1}(\xi) + \xi\frac{sh^2\xi - ch^2\xi + ch\xi}{sh\xi}G_{k+1}(\xi) =$$

$$= \frac{\xi}{sh\xi}[ch^2\xi M_{k+1}(\xi) + (ch\xi - 1)G_{k+1}(\xi)]$$

или

$$\Phi_k(\xi + i) = A(\xi)\Phi_{k+1}(\xi) + G_{k+1}(\xi). \tag{7}$$

Решение разностно-краевой залачи типа Карлемана (7) получено методом факторизации. Разрешимость задачи зависит от индекса коэффициента $A(\xi)$.

Список литературы

[1] Гахов Ф.Д. *Уравнения типа свертки* / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296с.

[2] Черский Ю.И. *Метод сопряжения аналитических функций с приложениями* / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552 с.

[3] Лукьяненко В.А. *Обобщенная задача Карлемана* / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. – 2005. – №19. – С. 129–144.

[4] Лукьяненко В.А. *Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных* / В.А. Лукьяненко // Динамические системы. – 2014. – №1-2. – С. 143-152.