О дифференцируемости в нормированных конусах с частичным дистрибутивным законом

Попова Елена Николаевна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра алгебры и функционального анализа (группа 601)
e-mail: lnp_e@bk.ru

В последние десятилетия активно развивается теория абстрактных локально выпуклых (и, в частности, нормированных) конусов. Имеется множество примеров, которые указывают на важность теории выпуклых конусов для самых разных разделов анализа. Так, к примеру, недавно И. В. Орловым было предложено понятие выпуклого банахова конуса и на его базе построено субдифференциальное исчисление отображений векторного аргумента с приложениями в вариационном исчислении [1].

Однако многие объекты в анализе нельзя адекватно описать в терминах выпуклых конусов. Например, если рассматривать набор необязательно выпуклых подмножеств линейного пространства со стандартными операциями сложения по Минковскому и умножения на скаляр, то эти действия не будут удовлетворять привычному набору свойств. В частности, не будет выполняться второй дистрибутивный закон, а также закон сокращения.

Ввиду этого в работе Ф.С. Стонякина [2] рассмотрены так называемые *сублинейные конусы*, которые теряют второй дистрибутивный закон, а также закон сокращения. Однако полное отсутствие второго дистрибутивного закона и закона сокращения лишает сублинейные конусы существенного набора свойств, и поэтому возникает вопрос адекватной замены этого закона. В этой связи в [2] рассмотрено ослабление вышеупомянутого дистрибутивного закона — *выпуклый дистрибутивный закон* (CDL): $[x] = [y] \iff x = y$ ($[x]$ — выпуклая оболочка элемента $x \in X$), а также аналогичный *аффинный дистрибутивный закон* (ADL), связанный с понятием аффинной оболочки элемента $x \in X$:

$$(x) = \left\{ y \in X \,\middle|\, y + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x,\ \alpha_k > 0, \beta_k > 0,\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \right\}.$$

Эти два закона приводят к новым алгебраическим структурам — *выпуклому сублинейному конусу* и *аффинному сублинейному конусу*. Если помимо этого ещё ввести норму в таких конусах с естественным условием её инвариантности на аффинной (выпуклой) оболочке всякого элемента $x \in X$, то можно говорить о *выпуклом сублинейном нормированном конусе* (ВСНК) или *аффинном сублинейном нормированном конусе* (АСНК).

Развивая эту идеологию, мы вводим так называемые выпуклый и аффинный частичные дистрибутивные законы, что приводит к соответствующим классам сублинейных нормированных конусов (СНК).

Definition 1. *Будем говорить, что СНК X обладает аффинным частичным дистрибутивным законом ($X \in (APDL)$), если существует подмножество $\widehat{X} \subset X$ и операция $\oplus$ на $\widehat{X}$ такие, что:*

(i) *$\forall x \in X$ существует и притом единственный $\widehat{x} \in \widehat{X}$: $x \in (\widehat{x})$, причём $\|x\| = \|\widehat{x}\|$;*

(ii) *$\forall \widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$, $\forall x, y \in X$: если $x \in (\widehat{x})$ и $y \in (\widehat{y})$, то $x + y \in (\widehat{x} \oplus \widehat{y})$;*

(iii) *$\widehat{X}$ образует АСНК (ВСНК) относительно операции $\oplus$ и стандартного умножения на скаляр, причём $\widehat{X}$ обладает вторым дистрибутивным законом и законом сокращения.*

Аналогично рассматривается выпуклый частичный дистрибутивный закон ($CPDL$). Для рассматриваемых классов СНК с выпуклым или аффинным частичным дистрибутивным законом мы вводим понятие ограниченного локально линейного функционала и на его базе строим аналоги понятия сопряжённого пространства в таких СНК.

Definition 2.

(i) *Будем называть функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ограниченным, если для некоторого $C > 0$ $|\varphi(x)| \leqslant C \cdot \|x\|$ $\forall x \in X$;*

(ii) *Ограниченный функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ будем называть локально непрерывным, если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ при $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n, x \in (y)$ для некоторого $y \in \widehat{X}$;*

(iii) *Функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ будем называть частично линейным, если он положительно однороден и верно равенство $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in \widehat{X}$.*

Definition 3. *Набор частично линейных локально непрерывных функционалов φ будем называть сопряженным конусом к X и обозначать X^*.*

В СНК с выпуклым частичным дистрибутивным законом доказан аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала. Отметим, что в невыпуклых конусах существенно условие «выпуклой инвариантности» функционала $p \in IC(X)$: $p([x])$ одноточечно $\forall x \in X$. Легко видеть, что свойство $p \in IC(X)$ для $p(x) = \|x\|$ верно во всяком выпуклом конусе, а также в конусе ограниченных подмножеств нормированного пространства со стандартной супремум-нормой. *Подконусом* $Y \subset X$ будем называть Y, если $\forall x, y \in Y$: $x = y + z$ верно $z \in Y$.

Theorem 1. *Пусть X — СНК с $(CPDL)$, на X задан выпуклый функционал $p : X \to \mathbb{R}$, $p \in IC(X)$, Y — подконус X и $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ — частично линейный функционал такой, что $|\varphi(y)| \leqslant p(y)$ $\forall y \in Y$. Тогда существует частично линейный функционал $L : X \to \mathbb{R}$ такой, что $|L(x)| \leqslant p(x)$ $\forall x \in X$ и $L(y) = \varphi(y)$ $\forall y \in Y$.*

Следующий результат о разделении точек локально непрерывными частично линейными функционалами верен уже в случае обоих аналогов второго дистрибутивного закона.

Theorem 2. *Если X — СНК с $(APDL)$ или $(CPDL)$ то для любых $x \neq y$ существует $\varphi \in X^*$: $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

На базе предыдущих результатов в классе СНК с рассмотренными аналогами второго дистрибутивного закона введен аналог понятия компактного субдифференциала (или K-субдифференциала) [1], построены примеры и доказаны основные свойства K-субдифференциалов. Сформулируем понятие K-субдифференцируемости в важном для экстремальных задач случае функционалов $f : X \to \mathbb{R}$, X — СНК с $(APDL)$ или $(CPDL)$.

Definition 4. *Назовем K–субдифференциалом отображения $f : X \to \mathbb{R}$ по направлению $h \in X$ в точке $x_0 \in X$ множество*

$$\partial_K f(x_0, h) := \bigcap_{\delta>0} \partial_K f(x_0, h, \delta), \text{ где} \tag{1}$$

$$\partial_K f(x_0, h, \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda} \middle| \ 0 < \lambda < \delta \right\},$$

если $\partial_K f(x_0, h)$ — компакт в $\mathbb{R}$, а также $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0$: $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ $\partial_K f(x_0, h, \delta) \subset \partial_K f(x_0, h) + [-\varepsilon; \varepsilon]$.

Доказана простая формула для вычисления $\partial_K f(x, h)$.

Theorem 3. *Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке: $\overline{\partial} f(x, h)$ и $\underline{\partial} f(x, h)$. При этом $\partial_K f(x, h) = \Big[\underline{\partial} f(x, h);\ \overline{\partial} f(x, h)\Big]$.*

Definition 5. *Пусть X — сублинейный конус и $X \in (APDL)$ (или $X \in (CPDL)$), Y — индуктивно упорядоченный сублинейный конус и $Y \in (APDL)$ (или $Y \in (CPDL)$). Оператор $A : X \to Y$ назовем частично сублинейным, если: $A\widehat{X} \subset \widehat{Y},\ A(h_1 \oplus h_2) \preceq Ah_1 \oplus Ah_2,\ A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah \, \forall \lambda \geqslant 0$.*

Через $\mathbb{R}_K$ будем обозначать набор выпуклых компактов на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с частичным порядком $x \preceq y \iff x \subset y \ \forall x, y \in \mathbb{R}_K$.

Definition 6. *Будем говорить, что f K-субдифференцируем по Фреше в точке x_0, если f K–субдифференцируем в этой точке по любому направлению $h \in X$ и K-субдифференциал по направлению $\partial_K f(x_0, h)$ частично сублинеен по h, а также оператор $\partial_K f(x_0)h : X \to \mathbb{R}_K$ $(\partial_K f(x_0)h = \partial_K f(x_0, h))$ ограничен и топологическое стягивание в (1) равномерно по всем направлениям h: $0 < \|h\| \leq 1$.*

Дифференцируемость f мы понимаем как одноточечность $\partial_K f(x_0)$. На дифференцируемые и K-субдифференцируемые функционалы f переносятся стандартные арифметические свойства, а также необходимое условие экстремума $0 \in \partial_K f(x_0)$. С использованием построенной теории рассмотрены примеры экстремальных задач.

Список литературы

[1] Орлов И. В. *Введение в сублинейный анализ. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, **53** (2014), 64 – 132.

[2] Стонякин Ф. С. *Сублинейниые нормированные конусы: теоремы отделимости и смежные результаты. – Соврем. мат. Фундам. направл.*, В печати.