Двумерные бесконечные системы уравнений типа свертки

Новик Алена Юрьевна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)
e-mail: alena.novik.94@mail.ru

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) одномерные и двумерные с матрицами, зависящими от разности или суммы индексов, находят широкие приложения. В двумерном случае СЛАУ имеет вид

$$(Ax)_{i,k} = \sum_{j,l\in I_1} a_{i-j,k-l}x_{jl} = f_{i,k},\ i,k \in I_2, \tag{1}$$

а в операторном

$$Ax = f. \tag{2}$$

Множества индексов $I_1,\ I_2$ могут быть конечными и бесконечными, например

$$I_1 = \{|j| < \infty,\ \ |l| < \infty\} \text{ или } \{|j| < \infty,\ \ l = 0,1,2,...\} \text{ или}$$

$$\{j = 0,1,2,...,\ |l| < \infty\} \text{ или } \{j,l = 0,1,2,..\},$$

аналогично задается I_2.

В случае $I_1 = I_2 = \{|j|,|l| < \infty\}$ с помощью дискретного преобразования Фурье [2] СЛАУ (1) приводим к алгебраическому уравнению

$$A(\xi,\eta)\cdot X(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) \tag{3}$$

при выполнении условий разрешимости

$$A(\xi,\eta) \neq 0 \tag{4}$$

в образах Фурье решение имеет вид

$$X(\xi,\eta) = A^{-1}(\xi,\eta)\cdot F(\xi,\eta) \tag{5}$$

При нарушении условий (4) для приближенного решения применяется метод регуляризации [5].

В случае одного из индексов j или $l = 0, 1, 2, ...$ исходное уравнение сводится к краевой задачи Римана теории аналитических функций. Рассмотрены и более общие уравнения вида

$$x = Ax + Tx + f, \tag{6}$$

где оператор T задается в виде

$$Tx \equiv \sum_{j,l=1}^{\infty} t_{ijkl} x_{jl} \tag{7}$$

В работах Г.Я. Попова [1] рассматриваются уравнения с таким оператором:

$$x - Tx = f. \tag{8}$$

Для того, чтобы записать рассматриваемые уравнения в операторной форме, в [1] вводятся некоторые нормированные пространства и доказывается их полнота. В этих пространствах вводятся операторы, с помощью которых записываются рассматриваемые уравнения. Доказывается компактность этих операторов. Для приближенного решения рассматриваемых бесконечных систем используется метод редукции, при котором верхний предел в бесконечных суммах заменяется конечным числом с увеличивающимися значениями. Установлены критерии сходимости метода редукции для рассматриваемых двумерных бесконечных систем алгебраических уравнений.

Теория одномерных бесконечных систем, когда искомыми являются не двумерные числовые последовательности x_{im}, $i = 1, 2, ...,$ $m = 1, 2, ...$, а одномерные числовые последовательности, т. е. x_i, $i = 1, 2, ...$, достаточно хорошо разработаны. Этой теории посвящена книга Ruth F. Curtain и Hans Zwart [8]. Элементы этой теории содержатся в книгах Канторовича Л.В., Акилова Г.П. [7], Вулиха В.З. [6], там же указаны критерии сходимости приближенного метода редукции при решении указанных одномерных систем алгебраических уравнений. В работе Ursell F. [11] устанавливается оценка погрешности этого метода. Вопросу единственности решения одномерных бесконечных систем посвящены статьи Мелешко В.В., Гомилко А.М. [1] и Davis A.M. J. [9].

Близкие к изучаемым одномерные бесконечные СЛАУ рассматриваются в работе Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского [2], а уравнения вида (6) в работе [3].

Список литературы

[1] Попов Г.Я. *Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твердого тела* / сост. Н.Д. Вайсфельд; МОН Украины; Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова. – Одесса.: Астропринт, 2013. – 424 с.

[2] Гахов Ф.Д., Черский Ю. И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.

[3] Лукьяненко В.А. *Теория операторов Нетера и их приложения. Спецкурс.* – Симферополь.: ТНУ, 2012. – 86 с.

[4] Пресдорф З. *Некоторые классы сигнулярных уравнений.* – М.: Мир, 1908. – 244 с.

[5] Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений.* – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.

[6] Вулих Б.З. *Введение в функциональный анализ.* – М.: Наука, 1967. – 415 с.

[7] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1981. – 688 с.

[8] Curtain R.F., Zwart H. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory.* – New York: Springer-Verlag, 1995. – 645 p.

[9] Davis A.M.J. *Infinite systems for a biharmonik problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness* // Proc. R. Soc. London: 2003. – A459. – P. 409-412.

[10] Meleshko V.V., Gomilko A.M. *Infinite systems for a biharvonic problem in a rectangle: further discussion* // Proc. R. Soc. London: 2004. – A460. – P. 807-819.

[11] Ursell F. *Infinite systems of equations. The effect of truncation.* // Quart.J. Mech. Appl. Math.: 1996. – P. 217-233.