Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана

Муединова Нияра Нуриевна

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)

e-mail: niyara05-06-1993@mail.ru

В работе рассматриваются идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана.

Пусть $\mathcal{M}$ – конечная алгебра фон Неймана, $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ – множество всех унитарных операторов из $\mathcal{M}$, $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ – $*$-алгебра измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ – множество ортопроекторов, τ – точный нормальный конечный след на $\mathcal{M}$ такой, что $\tau(1) = 1$. Алгебраические операции в

$\mathbf{S}(\mathcal{M})$ представляют собой сильное произведение и сильную сумму операторов: $T\dot{+}S = \overline{T+S}$ и $T \cdot S = \overline{TS}$.

Линейное подпространство $\mathbf{E}$ в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ называется *идеальным*, если выполнены следующие условия:

1). Если $T \in \mathbf{E}$, то $T^* \in \mathbf{E}$;

2). Если $T \in \mathbf{E}$, $\;S \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$ и $|S| \leq |T|$, то $S \in \mathbf{E}$.

Обозначим через $\mathbf{E}_h = \mathbf{S}(\mathcal{M})_h \cap \mathbf{E}$ эрмитову часть $\mathbf{E}$, а через $\mathbf{E}_+ = \mathbf{S}(\mathcal{M})_+ \cap \mathbf{E}$ – конус положительных эрмитов.

В следующем предложении приведены свойства идеального подпространства, которые получаются непосредственно из определения.

Предложение 1. *1). $T \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $|T| \in \mathbf{E}$;*

2). $T \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $ReT \in \mathbf{E}_h$, $\;ImT \in \mathbf{E}_h$;

3). Если $T \in \mathbf{E}$ и $U \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$, то $UT \in \mathbf{E}$;

4). $\mathcal{M}\mathbf{E} = \mathcal{M}\mathbf{E}\mathcal{M} = \mathbf{E}$;

5). $T \in \mathbf{E}_h$ тогда и только тогда, когда $T^+ \in \mathbf{E}_+$ и $T^- \in \mathbf{E}_+$, где $T^+ = \dfrac{1}{2}(|T| + T)$ и $T^- = \dfrac{1}{2}(|T| - T)$;

6). Если $P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\;Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $Q \preceq P$, то $Q \in \mathbf{E}$.

Для каждого оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$ через $l(T)$, $r(T)$ и $z(T)$ обозначается соответствующие левый, правый и центральные носители T. Если $T = T^*$, то $l(T) = r(T) = z(T) = s(T)$.

Пусть $\mathbf{E}$ идеальное подпространство в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$. Рассмотрим семь проекторов из $\mathcal{M}$, которые определяются следующим образом:

$$R_l(\mathbf{E}) = \sup\{l(T)\colon T \in \mathbf{E}\}, \quad R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = \sup\{P\colon P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})\};$$

$$R_r(\mathbf{E}) = \sup\{r(T)\colon T \in \mathbf{E}\}, \quad R_{z(P)}(\mathbf{E}) = \sup\{z(P)\colon P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})\};$$

$$R(\mathbf{E}) = \sup\{s(T)\colon T \in \mathbf{E}_+\}, \quad R_z(\mathbf{E}) = \sup\{z(T)\colon T \in \mathbf{E}\};$$

$$R_{ZP}(\mathbf{E}) = \sup\{P\colon P \in \mathbf{E} \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{M})\}.$$

Легко видеть, что

$$R_l(\mathbf{E}) = R_r(\mathbf{E}) = R(\mathbf{E}), \quad R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) \leq R(\mathbf{E}) \leq R_z(\mathbf{E})$$

и

$$R_{ZP}(\mathbf{E}) \leq R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) \leq R_{z(P)}(\mathbf{E}) \leq R_z(\mathbf{E})$$

Теорема 1. *Если* $\mathbf{E}$ *– идеальное подпространство в* $\mathbf{S}(\mathcal{M})$*, то*

$$R_l(\mathbf{E}) = R_r(\mathbf{E}) = R(\mathbf{E}) = R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = R_{z(P)}(\mathbf{E}) = R_z(\mathbf{E}) = R_{ZP}(\mathbf{E}).$$

Доказательство. Центральный носитель оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})$ представим в виде

$$z(T) = \sup\{z(P)\colon P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \text{существует} \ \ \varepsilon > 0, \text{что} \ \ \varepsilon P \leq |T|\}.$$

Поэтому $z(T) \leq R_{z(P)}(\mathbf{E})$ для любого $T \in \mathbf{E}$, откуда $R_z(\mathbf{E}) \leq R_{z(P)}(\mathbf{E})$. Так как, с другой стороны $R_{z(P)}(\mathbf{E}) \leq R_z(\mathbf{E})$, то $R_z(\mathbf{E}) = R_{z(P)}(\mathbf{E})$.

Покажем теперь, что для каждого ненулевого проектора $P \in \mathbf{E}$ существует проектор Q, такой что $0 < Q \leq P$ и $z(Q) \in \mathbf{E}$. Действительно, пусть $M^z : \mathcal{M} \to Z(\mathcal{M})$ условное математическое ожидание алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ на ее центр $Z(\mathcal{M})$. Так как $0 < P \leq 1$, то $0 < M^z(P) \leq 1$ и потому существует ненулевой проектор $Z_0 \in Z(\mathcal{M})$ и натуральное число k такие, что

$$\frac{1}{k+1} Z_0 < Z_0 M^z(P) \leq \frac{1}{k} Z_0.$$

Положим $Q = Z_0 P$. Ясно, что $Z_0 \leq z(P)$ и поэтому $z(Q) = Z_0 z(P) = Z_0$. Кроме того, $M^z(Q) = M^z(Z_0 P) = Z_0 M^z(P)$ откуда

$$\frac{1}{k+1} Z_0 < M^z(Q) \leq \frac{1}{k} Z_0.$$

Рассмотрим проектор $Z_0 - Q$.

$$M^z(Z_0 - Q) = M^z(Z_0) - M^z(Q) = Z_0 - M^z(Q) \geq \frac{k-1}{k} Z_0.$$

Поэтому существует проектор $Q_2 \leq Z_0 - Q$ такой, что $M^z(Q_2) = M^z(Q)$, и поэтому $Q_2 \sim Q$.

Рассуждая аналогично, получим k попарно ортогональных, эквивалентных друг другу проектора $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$ (мы полагаем $Q_1 = Q$)такие, что $G = \sum\limits_{i=1}^{k} Q_i \leq Z_0$. Тогда

$$M^z(Z_0 - G) = Z_0 - \sum_{i=1}^{k} M^z(Q_k) < Z_0 - \frac{k}{k+1} Z_0 = \frac{1}{k+1} Z_0 < M^z(Q)$$

и потому $Z_0 - G \prec Q$. Так как $P \in \mathbf{E}$ и $Q \leq P$, то $Q \in \mathbf{E}$ и следовательно, в силу предложения 1. (vi), $Q_i \in \mathbf{E}$, $\ \ i = 1, 2, ..., k$ и $G \in E$, $\ \ Z_0 - G \in \mathbf{E}$ и, наконец, $Z_0 = z(Q) \in \mathbf{E}$.

Для каждого ненулевого проектора $P \in \mathbf{E}$ рассмотрим множество

$$A(P) = \{Q \in P(\mathcal{M}), \quad Q \leq P, \quad z(Q) \in \mathbf{E}\}$$

Из доказанного выше следует, что $A(P) \neq \{0\}$. Покажем, что

$$z(P) = \sup\{z(Q), \quad Q \in A(P)\}.$$

Действительно, пусть H такой проектор, что $H \leq z(P)$ и $Hz(Q) = 0$ для каждого $Q \in A(P)$. Тогда $z(H) \leq z(P)$ и $z(H)z(Q) = z(Hz(Q)) = 0$. Допустим, что $H_1 = z(H)P > 0$. Тогда существует такой проектор H_2 такой, что $0 < H_2 \leq H_1$ И $z(H_2) \in \mathbf{E}$. Но тогда $H_2 \in A(H_1) \subset A(P)$ и значит $z(H)z(H_2) = 0$. В то же время $z(H_2) \leq z(H_1) \leq z(H)$. Следовательно, $z(H_2) = 0$ и поэтому $H_2 = 0$. Таким образом $z(H)P = 0$, откуда $z(z(H)P) = z(H)z(P) = z(H) = 0$ и $H = 0$. Поэтому, $z(P) = \sup\{z(Q), \quad Q \in A(P)\}$.

Так как для каждого $Q \in A(P), \quad z(Q) \in \mathbf{E}$, то $z(Q) \leq R_{ZP}(\mathbf{E})$, откуда $z(P) \leq R_{ZP}(\mathbf{E})$ и $R_{z(P)}(\mathbf{E}) \leq R_{ZP}(\mathbf{E})$.

Следовательно, $R_{z(P)}(\mathbf{E}) = R_{\mathcal{P}}(\mathbf{E}) = R_{ZP}(\mathbf{E}) = R_z(\mathbf{E}) = R(\mathbf{E})$. Теорема доказана. $\square$

Проектор $R(\mathbf{E})$ называется *носителем* идеального подпространства $\mathbf{E}$.

Идеальное подпространство $\mathbf{E}$ в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ называется *фундаментальным*, если проектор $R(\mathbf{E}) = 1$.

Отметим, что как и коммутативном случае фундаментальное идеальное подпространство $\mathbf{E}$ в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ вообще говоря не содержит $\mathcal{M}$, т.е. $R(\mathbf{E}) = 1 \notin \mathbf{E}$. В то же время, если $\mathcal{M}$ – фактор, то как следует из теоремы 1.1, любое ненулевое идеальное подпространство $\mathbf{E}$ в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ является фундаментальным и содержит $\mathcal{M}$.

Для фундаментальных идеальных подпространств в $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ имеет место следующее предложение.

Предложение 2. *Если* $\mathbf{E}$ *фундаментальное идеальное подпространство в* $\mathbf{S}(\mathcal{M})$*, то*

1). существует подпоследовательность попарно ортогональных центральных проекторов $P_n \in \mathbf{E}$ $(n = 1, 2, ...,)$ *таких, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = 1$*;*

2). для каждого оператора $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})_+$ *существует последовательность* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *операторов из* $\mathbf{E}$*, что* $0 \leq T_n \uparrow T$.

Доказательство. 1). Первое утверждение следует из определения фундаментальности и равенства

$$R(\mathbf{E}) = R_{ZP}(\mathbf{E}) = \sup\{P \colon P \in \mathbf{E} \cap Z(\mathcal{M}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})\} = 1.$$

2). Пусть $T \in \mathbf{S}(\mathcal{M})_+$ и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность центральных проекторов из $\mathbf{E}$ такая, что $\{P_n\} \uparrow 1$. Существует последовательность$\{T'_n\}_{n=}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{M}_+$ такая, что $T'_n \uparrow T$. Ясно, что $P_k T'_n \uparrow T'_n$ при $k \to \infty$. Кроме того, для каждого n существует число l_n такое, что $T'_n \leq l_n \cdot 1$, откуда $P_k T'_n \leq l_n P_k$ и следовательно, $P_k T'_n \in \mathbf{E}$ для всех k и n.

Рассмотрим $T_n = P_n T'_n$. Ясно, что последовательность $\{T_n\}$ возрастает и $T_n \leq T$. Поэтому существует $T' = \sup T_n \leq T$. Для любого фиксированного m $P_m T_n \uparrow P_m T'$ и $P_m T_n = P_m(P_n T'_n) = (P_m P_n)T'_n \uparrow P_m T$. Поэтому для любого m $P_m T' = P_m T$, откуда $T = T'$. □

Список литературы

[1] J. Dixmier. *Von Neumann Algebras.* – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, – 1981.

[2] Дж. Мерфи. *C^*-алгебры и теория операторов.* Пер. с анг. под ред. проф. А.Я.Хелемского. – М.: Изд-во Факториал, – 1997.

[3] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, – 1984.

[4] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.* – Киев: Институт математики НАН Украины, – 2007.

[5] Муратов М. А. *Идеальные пространства измеримых операторов. Функциональный анализ.* – Ташкент.: Сб. научных трудов, – 1978.