Способы и методы решения иррациональных уравнений и неравенств

Марчик Виктория Александровна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра алгебры и функционального анализа (группа 601)
e-mail: alex-nikola9i@mail.ru

Одним из важнейших частей современного среднего образования в РФ является математика. Она учит логическому мышлению, анализировать, обобщать, принимать правильные решения в нестандартных ситуациях. В школьной программе часто происходят изменения, детям дают примеры повышенной сложности, которые вызывают определенные трудности. Для более глубокого усвоения пройденного материала учащимися, все чаще уделяется внимание внеклассной дополнительной работе по математике. Поэтому система образования постоянно нуждается в дополнительных учебниках, методических указаниях для учителей и учеников.

Одним из больших и важных тематических разделов в математике являются иррациональные уравнения и неравенства. С понятием иррациональность ученики впервые встречаются в восьмом классе и, в дальнейшем, на протяжении всего обучения оно усложняется. Иррациональные уравнения и неравенства выпускники встречают в итоговых контрольных работах, диагностических работах и в ЕГЭ.

В школьной программе на наш взгляд выделяется недостаточное количество часов для решения иррациональных уравнений и неравенств, поэтому рекомендуется уделить этой теме отдельное внимание, рассмотрев ее на внеурочной деятельности или консультациях. Для этого разработано методическое пособие «Методы и способы решения иррациональных уравнений и неравенств».

Статья посвящена презентации методического пособия для преподавателей и студентов. «Способы и методы решения иррациональных уравнений и неравенств», написанного автором статьи. Целью данного пособия является научить решать указанные уравнения и неравенства учащихся средних школ с помощью различных методов, видеть какой из способов применим и наиболее подходит к решению данной задачи, а также оказывать известную техническую и методическую помощь учителям математики. Остановимся подробно на содержании пособия. Методическое пособие состоит из двух основных частей.

В первой части дано определение иррационального уравнения, рассмотрены основные способы решения этих уравнений, данные методы проиллюстрированы примерами. Перечислим методы решения иррациональных уравнений, приведенных в пособии.

1. Метод пристального взгляда. [5]

Этот метод основан на следующем теоретическом положении: "Если функция $y = f(x)$ возрастает на области определения и число a входит во множество значений, то уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение".

2. Метод возведения обеих частей уравнений в одну и ту же степень.[1]

Этот метод базируется на теореме, в которой говорится, что если возвести обе части уравнения $f(x) = q(x)$ (1) в натуральную степень n, то уравнение $f^n(x) = q^n(x)$ (2). Уравнение (2) является следствием уравнения (1).

3. Решение уравнений с использованием замены неизвестной.[2]

Данный способ рекомендует введение вспомогательной переменной, которая в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным или дробно-рациональным относительно новой переменной.

4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.[5]

Если уравнение сводится к виду $f(x)g(x) = 0$, то решают уравнения $f(x) = 0, \quad g(x) = 0$ и решение исходного уравнения есть объединение корней последних двух уравнений.

5. Метод выделения полных квадратов.[5]

В этом методе часто используется формула $\sqrt{a^2} = |a|$.

6. Метод оценки.[2]

Метод применим в том случае, когда подкоренные выражения представляют собой квадратный трехчлен, не раскладывающийся на линейные множители. Поэтому целесообразно перед решением уравнения исследовать свойства левой и правой частей уравнения.

7. Иррациональные уравнения, содержащие степени выше второй.[4]

В предложенном методе нужно воспользоваться утверждением : если уравнение имеет вид $\sqrt[n]{f(x)} = q(x)$,то его можно решить, возводя обе части этого уравнения в степень n. Полученное уравнение $f(x) = q(x)^n$ при нечетном n равносильно данному уравнению, а при четном n является следствием, аналогично рассмотренному выше случаю при $n = 2$.

Вторая часть методического указания начинается с определения иррационального неравенства и содержит основные методы и способы решения этих неравенств, которые иллюстрируются с примерами.

Перечислим способы решения иррациональных неравенств, указанных в пособии.

1. Метод определения области допустимых значений. [3]

В этом случае область допустимых значений (ОДЗ) неравенства есть множество значений неизвестной, при которой неравенство является верным.

2. Равносильные преобразования.[4]

Данный пункт говорит о том, что не всегда нужно искать ОДЗ; правильное решение обеспечивается соответствующими равносильными преобразованиями.

В этом разделе рассматривается уравнения двух видов

$$\sqrt{f} < \sqrt{q} \ \text{ и } \ f\sqrt{q} \geq 0.$$

3. Возведение в степень. [1]

Одним из методов решения иррациональных неравенств является последовательное возведение обеих частей неравенства в степень с целью освобождения от корня. В этом разделе также приведен пример двукратного возведения в квадрат. Здесь же рассматриваются неравенства двух видов

$$\sqrt{f} < q \ \text{ и } \ \sqrt{f} > q.$$

4. Замена переменной.[4]

В некоторых заданиях полезно сделать замену неизвестной, обозначив корень из некоторого выражения, содержащего неизвестную новой буквой.

5. Умножение на сопряженное.[4]

В данном методе, приводится пример о том, что в некоторых возможных случаях полезно умножить или разделить обе части уравнения на сопряженное к некоторому выражению.

Обе части методического указания заканчиваются примерами для самостоятельного решения и контроля учащихся.

Вывод: В методическом пособии «Методы и способы решения иррациональных уравнений и неравенств» ясно и доступно изложены принципы нахождения правильного ответа. На базе этого методического указания учащиеся должны приобрести умения решать задачи более высокого уровня, по сравнению с обязательным уровнем сложности, грамотно излагать собственные рассуждения, применять рациональные приемы вычислений, использовать различные способы и методы решений.

Список литературы

[1] Мордкович А. Г. *Алгебра. 8 класс. В2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений.* 12-е изд.–М.: Мнемозина, – 2010 – С. 215.

[2] Сканави М. И. *Сборник задач по математике для поступающих в ввузы.* 6-е изд. – М.: Наука, – 2013 – С. 608.

[3] Яковлев В. И. *Материалы по математике.* http://mathus.ru/math/irrun.pdf

[4] Олехник С. И., Потапов М. К. *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения.* – М.: Факториал, – 1997 – С. 217.

[5] Ахаткина Е. М. *Методы решения иррациональных уравнений.* http://festival.1september.ru/articles/312257/