Полунормальная форма одной периодической импульсной системы

Магера Юрий Владимирович
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)
e-mail: yuriy.magera.93@mail.ru

Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени [1]:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 + \sum_{|m|\geq 2} g_m^1 x^m, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + \sum_{|m|\geq 2} g_m^2 x^m, \quad t \neq \tau_k, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_1(t^+) &= e^{-\alpha\theta}[(\cos\gamma)x_1(t) - (\sin\gamma)x_2(t)] + \sum_{|m|\geq 2} h_m^1 x^m(t), \\ x_2(t^+) &= e^{-\alpha\theta}[(\sin\gamma)x_1(t) + (\cos\gamma)x_2(t)] + \sum_{|m|\geq 2} h_m^2 x^m(t),\ t = \tau_k. \end{aligned} \tag{2}$$

$\tau_k = \tau_0 + k\theta$, $\theta > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $x = (x_1, x_2)^T$, α, β, g_m^1, g_m^2, γ — действительные числа, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, $m = (m_1, m_2) \geq 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$.

Особенность рассматриваемой системы в том, что система линейного приближения, как хорошо видно из уравнений, всего лишь неасимптотически устойчива и потому в системе наблюдается критический случай устойчивости движения, хорошо изученный для дифференциальных уравнений [2], но мало изученный для импульсных систем.

Для упрощения дальнейших выкладок приведем систему (1)–(2) к более простому виду, переходя к комплексно сопряженным переменным $z = x_1 + ix_2$, $\overline{z} = x_1 - ix_2$. Переменные z и $\overline{z}$ комплексно сопряженные, поэтому в дальнейшем будет достаточно записывать только уравнение для z.

После замены переменных исходная система примет вид

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{|m|\geq 2} G_m Z^m, \quad t \neq \tau_k, \tag{3}$$

$$z(t^+) = e^{-\alpha\theta + i\gamma} z(t) + \sum_{|m|\geq 2} H_m Z^m(t), \quad t = \tau_k \tag{4}$$

Здесь записаны только уравнения для z, $\lambda = \alpha + i\beta$, $Z = (z, \overline{z})^T$.

Выпишем явные формулы для коэффициентов G_m при $|m|=2$ и $|m|=3$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
G_{20} &= \frac{1}{4}\left(g^1_{20}+g^2_{11}-g^1_{02}\right)+\frac{i}{4}\left(g^2_{20}-g^1_{11}-g^2_{02}\right),\\
G_{11} &= \frac{1}{2}\left(g^1_{20}+g^1_{02}\right)+\frac{i}{2}\left(g^2_{20}+g^2_{02}\right),\\
G_{02} &= \frac{1}{4}\left(g^1_{20}-g^2_{11}-g^1_{02}\right)+\frac{i}{4}\left(g^2_{20}+g^1_{11}-g^2_{02}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
G_{30} &= \frac{1}{8}\left(g^1_{30}+g^2_{21}-g^1_{12}-g^2_{03}\right)+\frac{i}{8}\left(g^2_{30}-g^1_{21}-g^2_{12}+g^1_{03}\right),\\
G_{21} &= \frac{1}{8}\left(3g^1_{30}+g^2_{21}+g^1_{12}+3g^2_{03}\right)+\frac{i}{8}\left(3g^2_{30}-g^1_{21}+g^2_{12}-3g^1_{03}\right),\\
G_{12} &= \frac{1}{8}\left(3g^1_{30}-g^2_{21}+g^1_{12}-3g^2_{03}\right)+\frac{i}{8}\left(3g^2_{30}+g^1_{21}+g^2_{12}+3g^1_{03}\right),\\
G_{03} &= \frac{1}{8}\left(g^1_{30}-g^2_{21}-g^1_{12}+g^2_{03}\right)+\frac{i}{8}\left(g^2_{30}+g^1_{21}-g^2_{12}-g^1_{03}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений по инициативе Анри Пуанкаре применяется подход, позволяющий упростить структуру нелинейных слагаемых в правой части системы дифференциальных уравнений [2]. Идея состоит в применении нормализующего почти тождественного преобразования, которое реализуется в виде последовательности преобразований вида

$$w = z + \sum_{|m|=s} W_m Z^m, \quad s = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Начнем с поиска подходящего квадратичного преобразования

$$w = z + W_{20}z^2 + W_{11}z\overline{z} + W_{02}\overline{z}^2. \tag{8}$$

Преобразование (8) задается явно, а обратное преобразование уже будет определяться бесконечным рядом и может быть явно задано лишь приближенно. Чтобы выполнить квадратичное преобразование (8) в нашей системе (3)–(4) и найти в явном виде коэффициенты правой части преобразованного уравнения до кубических слагаемых включительно нам потребуется найти коэффициенты разложения z по степеням w и $\overline{w}$ до членов 3-й степени включительно:

$$z = w - \sum_{|m|=2} W_m w^{m_1}\overline{w}^{m_2} + \sum_{|m|=3} Z_m w^{m_1}\overline{w}^{m_2} + \ldots, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{30} &= 2W_{20}^2 + W_{11}\overline{W}_{02},\\
Z_{21} &= 2W_{20}W_{11} + W_{11}\left(\overline{W}_{11} + W_{20}\right) + 2W_{02}\overline{W}_{02} =\\
&\quad = 3W_{20}W_{11} + |W_{11}|^2 + 2|W_{02}|^2,\\
Z_{12} &= 2W_{20}W_{02} + W_{11}\left(\overline{W}_{20} + W_{11}\right) + 2W_{02}\overline{W}_{11} =\\
&\quad = 2W_{20}W_{02} + 2\overline{W}_{11}W_{02} + W_{11}^2 + W_{11}\overline{W}_{20} =\\
&\quad = 2W_{02}(W_{20} + \overline{W}_{11}) + W_{11}(\overline{W}_{20} + W_{11}),\\
Z_{03} &= W_{11}W_{02} + 2W_{02}\overline{W}_{20} =\\
&\quad = W_{02}(W_{11} + 2\overline{W}_{20}).
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы найти правые части дифференциального уравнения для w до слагаемых третьей степени включительно.

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w + \sum_{|\mu|=2}\left[G_{mu} + (\mu_1\lambda + \mu_2\overline{\lambda} - \lambda)W_{mu}\right] \times w^{\mu_1}\overline{w}^{\mu_2} + \sum_{|\nu|=3}\widetilde{W_\nu} w^{\nu_1}\overline{w}^{\nu_2} + \ldots \tag{10}$$

Выпишем в явном виде выражения для $\widetilde{W_\nu}$, $|\nu| = 3$.

$$\widetilde{W}_{30} = \lambda Z_{30} - 2(G_{20} + \lambda W_20)W_{20} - (G_{11} + \overline{\lambda}W_{11})(\overline{W_{02}}) + 2G_{20} + \overline{G}_{02}. \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{21} = \lambda Z_{21} - 2(G_{20} + \lambda W_20)W_{11} - (G_{11} + \overline{\lambda}W_{11})(\overline{W_{11}} + W_{20}) -&\\
- [G_{02} + (2\overline{\lambda} - \lambda)W_{02}]\overline{W_{02}} + 2G_{11} + G_{20} + \overline{G_{11}} + 2\overline{G}_{02}.&
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{12} = \lambda Z_{12} - 2(G_{20} + \lambda W_{20})W_{02} - (G_{11} + \overline{\lambda}W_{11})(\overline{W_{20}} + W_{11}) -&\\
- [G_{02} + (2\overline{\lambda} - \lambda)W_{02}]\overline{W_{11}} + G_{11} + 2G_{02} + \overline{G_{20}} + 2\overline{G_{11}}.&
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{03} = \lambda Z_{03} - (G_{11} + \overline{\lambda}W_{11})W_{02} - [G_{02} + \overline{\lambda}W_{11})(\overline{W_{20}} + W_{11}) -&\\
+ (2\overline{\lambda} - \lambda)W_{02}]\overline{W_{20}} + G_{02} + 2\overline{G_{20}}.&
\end{aligned} \tag{14}$$

Вид этих формул демонстрирует трудоемкость нелинейных замен переменных. Для таких преобразований используются различные системы компьютерной алгебры, позволяющие выполнять нелинейные преобразования любой сложности. Однако получение формул вида (11)–(14) с помощью компьютерных программ требует большого опыта работы с такими программами, так как результат, выдаваемый компьютером, обычно нуждается в дополнительной ручной обработке.

Выпишем полностью уравнения системы (3)–(4) в новых переменных с точностью до членов второй степени

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w + \sum_{|m|\geq 2} \Big[G_m + (\alpha + i(m_1 - m_2 - 1)\beta)W_m\Big] w^{m_1}\overline{w^{m_2}} + \ldots,\ t \neq \tau_k, \tag{15}$$

$$w(t^+) = \Big\{w(t) + \sum_{|m|\geq 2} \Big[H_m + \\ + W_m(e^{-\alpha\theta + i(m_1-m_2-1)\gamma} - 1)\Big] w^{m_1}(t)\overline{w}^{m_2}(t)\Big\} e^{-\alpha\theta + i\gamma} + \ldots,\ t = \tau_k. \tag{16}$$

Теперь можно выбрать W_m, $|m| = 2$, так, чтобы уничтожить квадратичные мономы либо в уравнении (15), либо в правой части (16). Квадратичные слагаемые в операторе импульсного воздействия будут уничтожены, если выбрать коэффициенты W_m из условий

$$H_m + W_m(e^{-\alpha\theta + i(m_1-m_2-1)\gamma} - 1) = 0, \quad |m| = 2,$$

$$W_m = \frac{H_m}{1 - exp[-\alpha\theta + i(m_1 - m_2 - 1)\gamma]}.$$

В результате последовательности замен переменных вида (7) можно привести исходную импульсную систему к так называемой *полунормальной* форме, в которой при определенных предположениях уничтожаются нелинейные одночлены до любой конечной степени либо в дифференциальной части импульсной системы, либо в дискретной части. Одновременное упрощение этих составляющих невозможно.

Список литературы

[1] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.

[2] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. — 215 с.