Классификация критических случаев устойчивости в импульсной системе

Казимова Зера Алимовна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)
e-mail: vini.28@ukr.net

Введение. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) являются удобным инструментом моделирования эволюции процессов разнообразной природы, описываемых конечным числом параметров, которые подвергаются сильным кратковременным воздействиям, вызывающим скачкообразное изменение значений этих параметров. Одной из основных задач, решаемых при анализе математической модели, является отыскание условий, обеспечивающих устойчивость заданного режима. В настоящей работе рассматривается импульсная система с импульсными воздействиями в заданные моменты времени [1]. Определение устойчивости по Ляпунову для таких систем точно такое же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основные результаты теории устойчивости ОДУ имеют соответствующие аналоги в теории устойчивости дифференциальных уравнений с импульсным воздействием рассматриваемого типа. В частности, справедлива теорема об устойчивости по первому приближению: если матрицант линейного приближения экспоненциально убывает при $t \to \infty$, то нулевое решение квазилинейной системы асимптотически устойчиво.

Критическим случаем устойчивости называют ситуацию, когда характер устойчивости нулевого решения исследуемой нелинейной системы дифференциальных уравнений невозможно установить, располагая информацией о характере устойчивости системы линейного приближения в нуле. Этот важный (как с теоретической, так и с практической точки зрения) феномен достаточно хорошо изучен в теории устойчивости ОДУ [2]. Критический случай устойчивости в импульсной системе характеризуется значительно большим разнообразием реализаций по сравнению с системами без импульсных воздействий. Это объясняется тем, что эволюция решений импульсной системы реализуется как взаимодействие непрерывной (гладкой) и дискретной подсистем. Как следствие все импульсные системы рассматриваемого класса являются неавтономными и наследуют сложность поведения решений, характерную для разностных уравнений.

Периодическая импульсная система. Рассмотрим нелинейную импульсную систему второго порядка

$$\dot{x} = Ax + \sum_{|m|\geq 2} g_m x^m, \quad t \neq \tau_k, \tag{1}$$

$$x(t^+) = Bx(t) + \sum_{|m|\geq 2} h_m x^m(t), \quad t = \tau_k, \tag{2}$$

где $\tau_k = \tau_0 + k\theta$, $\theta > 0$, $g_m, h_m \in \mathbb{R}^2$, $m = (m_1, m_2) \geq 0$, $|m| = m_1 + m_2$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, A, B — постоянные матрицы с вещественными элементами, $x(t^+) = \lim\limits_{\tau \to\ t+0} x(\tau)$. Такие импульсные системы называют периодическими [1].

Система уравнений в вариациях в нуле

$$\dot{y} = Ay, \quad t \neq \tau_k, \quad y(\tau_k^+) = By(\tau_k), \tag{3}$$

предполагается устойчивой. Решение этой системы легко выписать в явном виде. Пусть $t_0 \in [\tau_{k_0-1}, \tau_{k_0})$, тогда

$$y(t, t_0, y^0) = e^{(t-t_0)A} y^0 \quad \text{при } t \in [t_0, \tau_{k_0}],$$
$$y(\tau_{k_0}) = e^{(\tau_{k_0}-t_0)A} y^0, \quad y(\tau_{k_0}^+) = Be^{(\tau_{k_0}-t_0)A} y^0,$$
$$y(\tau_{k_0+1}) = e^{\theta A} B y(\tau_{k_0}), \quad y(\tau_{k_0+1}^+) = Be^{\theta A} y(\tau_{k_0}^+).$$

Очевидно, что для всякого $s = 1, 2, \ldots$

$$y(\tau_{k_0+s}) = (e^{\theta A} B)^s y(\tau_{k_0}), \quad y(\tau_{k_0+s}^+) = (Be^{\theta A})^s y(\tau_{k_0}^+). \tag{4}$$

Из (4) следует, что система линейного приближения (3) устойчива, когда спектр матрицы монодромии $Be^{\theta A}$ лежит в единичном круге комплексной плоскости. При этом критический случай будет иметь место, если одно или оба собственных значения матрицы $Be^{\theta A}$ попадают на единичную окружность комплексной плоскости.

Обозначим ρ_1, ρ_2 собственные значения матрицы $Be^{\theta A}$, которые будем называть *мультипликаторами*. Критические случаи в системе (1)-(2) естественным образом разделяются на три класса:

$$\begin{aligned}&1)\;\; \rho_1 = \pm 1, \rho_2 = \rho, \quad |\rho| < 1;\\ &2)\;\; |\rho_1| = |\rho_2| = 1, \quad \rho_1\rho_2 = -1;\\ &3)\;\; \rho_{1,2} = \xi \pm i\eta, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.\end{aligned} \tag{5}$$

Динамику импульсной системы (1)-(2) можно описать специальной дискретной системой. Особенно просто это реализовать для линейной системы (3).

Пусть $\tau \in (0, \theta]$. Тогда

$$y(\tau_{k_0} + \tau) = e^{\tau A} B y(\tau_{k_0}), \quad y(\tau_{k_0+1} + \tau) = e^{\tau A} B y(\tau_{k_0+1}) = e^{\tau A} B e^{\theta A} B y(\tau_{k_0}) =$$
$$= e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A} e^{\tau A} B y(\tau_{k_0}) = [e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}] y(\tau_{k_0} + \tau).$$

Матрица $e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}$ подобна матрице $Be^{\theta A}$ и, следовательно, имеет тот же спектр. Далее

$$y(\tau_{k_0+2} + \tau) = e^{\tau A} B y(\tau_{k_0+2}) = e^{\tau A} B e^{\theta A} B y(\tau_{k_0+1}) =$$
$$= e^{\tau A} B e^{(\theta-\tau)A} e^{\tau A} B y(\tau_{k_0+1}) = e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A} y(\tau_{k_0+1} + \tau) =$$
$$= [e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}]^2 y(\tau_{k_0} + \tau).$$

Следовательно,

$$y(\tau_{k_0+s} + \tau) = [e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}]^s y(\tau_{k_0} + \tau), \quad s = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Таким образом, мы показали, что значения решения $y(t)$ системы (3) можно в любой точке t вычислить по формуле (6). Эта формула определяет решение дискретной линейной системы с матрицей

$$\Omega_\tau = e^{\tau A} B e^{\theta A} e^{-\tau A}, \quad 0 < \tau \leq \theta. \tag{7}$$

Матрица линейного приближения дифференциального уравнения (1) относится к одному из трех возможных классов в зависимости от расположения собственных значений λ_1, λ_2 матрицы на комплексной плоскости:

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ и имеется только один собственный вектор;
3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$.

Другими словами, матрица A вещественно подобна одной из трех матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R};\quad 2)\ \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Если допустить комплексное преобразование подобия, то третий класс вольется в первый.

Матрица A всегда может быть приведена к одному из канонических представлений (8): $A = M^{-1}JM$, $detM \neq 0$, M — вещественная матрица, J — каноническая форма Жордана. При этом в результате линейной замены переменных $\tilde{y} = My$ или $y = M^{-1}\tilde{y}$ система (3) приводится к виду

$$\dot{\tilde{y}} = J\tilde{y},\quad t\neq\tau_k,\quad \tilde{y}(t^+) = B_1\tilde{y}(t),\quad t=\tau_k, \tag{9}$$

где $B_1 = MBM^{-1}$. Поскольку $e^{\theta A} = e^{\theta M^{-1}JM} = M^{-1}e^{\theta J}M$, то

$$B_1e^{\theta J} = MBM^{-1}Me^{\theta A}M^{-1} = MBe^{\theta A}M^{-1},$$

то есть спектр матрицы монодромии не меняется при неособенном преобразовании переменных в системе (3).

Однако одновременно привести к каноническому виду и матрицу A, и матрицу B возможно лишь при дополнительном условии коммутируемости матриц: $AB = BA$.

Для исследования критического случая устойчивости системы вида (1)-(2) можно применить метод обобщенных функция Ляпунова [3].

Заключение. В работе предложена классификация критических случаев устойчивости периодической импульсной системы на простом примере системы второго порядка. Классификация для периодической системы любого конечного порядка проводится аналогично и основана на спектре матрицы монодромии. Показано, что эволюция решений импульсной системы моделируется рекуррентным уравнением.

Список литературы

[1] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.

[2] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. — 215 с.

[3] Анашкин О. В., Митько О. В. Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием. — Динамические системы. — 2011. — Т.1(29), №1. — С. 5–14.