Периодические решения феноменологического уравнения горения вдоль полосы

Ибрагимов Сейдамет Диляверович

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602-М)

e-mail: seydametibragimov@gmail.com

Нестационарные режимы распространения фронта горения могут быть описаны феноменологическим уравнением вида

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta\Big(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\xi + \frac{\lambda\beta}{2\pi}\sqrt{-\Delta\dot{\xi}}\Big), \tag{1}$$

которое моделирует горение теплоизолированной полосы ширины l, т.е. уравнение 1 рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями:

$$\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

Феноменологическое уравнение учитывает два основных фактора, относящихся к нестационарным процессам распространения фронта: наличие автоколебательной неустойчивости плоского фронта, стабилизируемой нелинейными эффектами, и наличие взаимодействия тепловых слоев, примыкающих к зоне экзотермических реакций. Структура этих слоев определяется не только скоростью и температурой прилегающего участка реакционной поверхности, но и распределением температуры вдоль всего фронта реакции. Подобные задачи ранее в своих работах исследовали Митропольский Ю.А., Мищенко Е.Ф., Колесов А.Ю., Алдушин А.П., Зельдович Я.Б., Маломед Б.А. [1],[2] Самойленко А.М., Белан Е.П. [3].

Рассматривая задачу 1 с краевыми условиями 2 и используя метод Галеркина, построим приближенные решения 1 в виде

$$\xi = y_0 \sin t + \sum_{k=1}^{N} y_k \cos k\theta \sin t, \tag{3}$$

где $\theta = \frac{\pi x}{l},\ y_k(t),\ k = 0, 1, \ldots,$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{y}_k = \delta(a_k y_k + C_3^k(y)). \tag{4}$$

Здесь $a_k = 1 - \dfrac{\lambda^2}{4l^2}k^2 + \dfrac{\lambda\beta}{2l}k = 1 - \dfrac{k^2}{\rho} + \beta\dfrac{k}{\rho}, \quad \rho = \dfrac{2l}{\lambda}$, а $C_3^k(y) = C_3^k(y_0, \ldots, y_N)$ - формы третьей степени относительно $y_k, \quad k = 1, \ldots, N.$

Подставим 3 и 4 в 1 . Дифференцируя 3, учитывая 4, получим

$$\dot{\xi} = \xi_0 \cos t + \sum_{k=1}^{N} y_k \cos k\theta \cos t + \delta(\alpha_0 y_0 + C_3^k(y)) \sin t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)) \cos k\theta \sin t;$$

$$\ddot{\xi} = -\xi_0 \sin t + \sum_{k=1}^{N} y_k \cos k\theta(-\sin t) + 2\delta(\alpha_0 y_0 + C_3^k(y)) \cos t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} 2\delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)) \cos k\theta \sin t + O(\delta^2).$$

Отсюда, с точностью до порядка $O(\delta^2)$, имеет место равенство

$$2\delta(\alpha_0 y_0 + C_3^0(y)) \cos t + \sum_{k=1}^{N} 2\delta(\alpha_k y_k + C_3^k(y)) \cos k\theta \cos t =$$

$$= 2\delta(\alpha_0 y_0 \cos t + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k \cos k\theta \cos t)\frac{4}{3}(y_0 \cos t + \sum_{k=1}^{N} y_k \cos k\theta \cos t)).$$

Приравняем теперь в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых модах $\cos t,\ \cos k\theta \cos t$.

В результате, однозначно находим выражение для $C_3^k(y),\ k = 0, 1, \ldots, N$. Пользуясь пакетом «Mathematica», проводим численный анализ неподвижных точек, меняя ρ при фиксированном β , и находим спектр этих точек. Проводим данное действие для значений $N = 3$ и $N = 5$. С изменением N меняется и

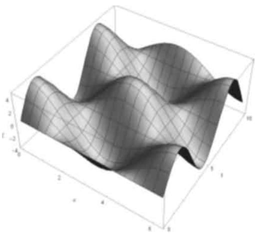

Рис. 1. Приближенное решение при $\xi = 5,\ n = 5,\ b = 0.5.$

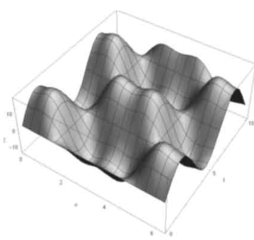

Рис. 2. Приближенное решение при $\xi = 0.5,\ n = 5,\ b = 0.5.$

количество уравнений в системе. Для других значений N система строится аналогично.

Далее приведем некоторые значения неподвижных точек и соответствующего им спектра при различных значения параметра ρ :

$$\rho = 0.5 \quad (0., 2.684 * 10^{-16}, 0., 6.170 * 10^{-18})\ \{-31.995, -12.995, -1.995, 1.01\}$$

$$\rho = 0.8 \quad (0., 4.246, 0., -0.00845)\ \{-11.318, -4.133, 0.743, -0.134\}$$

Как видно с увеличением бифуркационного параметра ρ неподвижных точек меняется. Положительная точка спектра переходит на отрицательную полуось, таким образом, соответствующее решение становится устойчивым.

На рис. 1 и рис.2 приведены графики найденных приближенных решений при различных ρ.

Список литературы

[1] Алдушин А.П. *К феноменологической теории спинового горения* ДАН СССР, – 1980 – С. 1102-1106.

[2] Алдушин А.П. *Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения* Физика горения и взрыва, – 1981 – С. 3-12.

[3] Белан Е.П. *Автоколебательные режимы горения вдоль полосы* Динамические системы, – 2009 – С. 3-16.