Классические и неклассические конусы в негладком анализе

Друшляк Анастасия Игоревна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра алгебры и функционального анализа (группа 501)
e-mail: hactinet@mail.ru

В работе рассмотрены два типа абстрактных конусов. Прежде всего, описаны абстрактные выпуклые конусы и их основные свойства. Приведены примеры, включая конус выпуклых компактов. Затем мы переходим к недавно введенному понятию субвыпуклого конуса, где второй дистрибутивный закон заменяется более общим условием. Рассмотрены примеры субвыпуклых конусов, которые не являются выпуклыми.

1. Предварительные сведения

Определение 1. *Пусть X — коммутативная полугруппа векторов (по сложению), в которой определено умножение неотрицательных скаляров на векторы: $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+,\ x \in X)$. Будем говорить, что X образует* модуль *над $\mathbb{R}_+$, если выполнены условия:*

$$\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x;\ 1 \cdot x = x;\ 0 \cdot x = 0;\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y; \tag{1}$$

а также второй дистрибутивный закон (SDL):

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,\ (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}_+;\ x \in X). \tag{2}$$

Будем говорить, что X образует субмодуль *над $\mathbb{R}_+$, если при сохранении условий* (1)*, свойство (SDL) заменяется на „закон выпуклой отделимости“ для скаляров (CSL):*

$$(y \in conv(x),\ x \in conv(y)) \Rightarrow (x = y). \tag{3}$$

В случае выполнения условий (1) *и* (2)*, в соответствии с классическим определением* [1]*, будем говорить, что X — (*абстрактный*)* выпуклый конус *(ВК). В случае же выполнения более слабых условий* (1) *и* (3)*, будем говорить, что X —* субвыпуклый конус *(СВК) см.* [2]

2. Выпуклые конусы, их свойства, примеры

Пример 1. *Простейший пример ВК – векторное пространство X и любое линейное подпространство пространства X (включая тривиальное подпространство $\{0\}$).*

Пример 2. *Важнейший класс ВК образуют выпуклые конусы в линейном пространстве (классические ВК), например, полупространство или двугранный угол, образованный двумя гиперплоскостями.*

Пример 3. *Классы полунепрерывных сверху(снизу) функций $f : Y \to \mathbb{R}$, где Y – топологическое пространство также являются выпуклыми конусами.*

Свойства выпуклых конусов

(1) Выпуклый конус X может быть изоморфно вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда $(x + z = y + z) \Rightarrow (x = y)$ для любых $x, y, z \in X$ ("cancellation law").

Пример 4. *Важным примером абстрактного ВК, удовлетворяющего (CL), является конус выпуклых компактов X_K из некоторого банахова пространства X* [3]. *Этот конус может быть погружен в пространство "формальных разностей"выпуклых компактов, снабженное метрикой Хаусдорфа. Простейшим примером банахова конуса X_K является конус*

$$\mathbb{R}_K = \{[x_1; x_2] \subset \mathbb{R} \mid x_1 \leq x_2\}.$$

Это единственный (в классе банаховых пространств X) пример конечномерного конуса X_K. Конус $\mathbb{R}_K$ можно отождествить с полуплоскостью

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2\right\}.$$

(2) Пересечение любого числа выпуклых конусов снова является выпуклым конусом, но объединение таковым может не быть. Тем самым выпуклые конусы образуют замкнутое семейство (по операции пересечения).

(3) Сдвиг $A \to b + A$ выпуклого конуса является выпуклым конусом.

(4) Гомотетичный образ $A \to \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, выпуклого конуса также является выпуклым конусом.

(5) Прямое (декартово) произведение выпуклых конусов выпукло ($A \subset X$ и $B \subset Y$ выпуклы) $\Rightarrow$ ($A \times B$ выпукло в $X \times Y$).

(6) Алгебраическая сумма $A + B$ и разность $A - B$ классических выпуклых конусов выпуклы. Линейная комбинация конечного числа классических выпуклых конусов $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$ выпукла.

3. Субвыпуклые конусы. Свойства, примеры, основное вложение

Рассмотрим некоторые примеры СВК, не являющихся ВК.

Пример 5. *Пусть E — вещественное линейное пространство (ЛП), $X = exp(E)$ — система всех непустых подмножеств E. Вводя в X поэлементное сложение и умножение на скаляры, очевидно, получаем коммутативную полугруппу по сложению, удовлетворяющую условию* (1)*. Очевидно, что условие* (2)*, вообще говоря, не имеет места:*

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot A \neq (\lambda + \mu) \cdot A,$$

если $A \subset E$ не выпукло. Однако закон выпуклой отделимости (CSL) выполнен.

Пример 6. *Пусть E — бэровское вещественное ЛП, X — система всех подмножеств E, имеющих дополнение всюду первой категории по Бэру, с поэлементным сложением и умножением на скаляры из $\mathbb{R}_+$. Очевидно выполнение в X условий* (1) *и* (3) *и невыполнение условия* (2) *(для любого элемента конуса, отличного от всего E). Таким образом, X — СВК, но не ВК.*

Замечание 1. *Отметим, что условие (CSL) можно записать в более общем, формально, чем* (3)*, виде:*

$$\left.\begin{array}{l} \left(x + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y = \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l y \;\middle|\; \alpha_k, \beta_l \geq 0,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l = 1\right) \\ \left(y + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x = \sum\limits_{j=1}^{q} \mu_j x \;\middle|\; \lambda_i, \mu_j \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i - \sum\limits_{j=1}^{q} \mu_j = 1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow (x = y). \tag{4}$$

Таким образом, в (4) *мы работаем с выпуклыми оболочками одноэлементных множеств:* $[x] = co\{x\}$ *и* $[y] = co\{y\}$, *причем условие (CSL) влечет условие „строгой инъективности" отображения* $x \mapsto [x]$ *(„*овыпукления*" элементов СВК* X*):*

$$(x \neq y) \Rightarrow (([x] \cap [y]) = \varnothing) \tag{5}$$

Рассмотрим, наконец, важный вопрос о каноническом вложении субвыпуклого конуса в выпуклый конус посредством „овыпукления".

Теорема 1. *Пусть* X *— СВК,* $[X] = \big\{[x] \big| x \in X\big\}$. *Тогда:*

(1) $[X]$ *— выпуклый конус;*
(2) $[x]$ *— выпуклое подмножество* X $(\forall x \in X)$;
(3) *вложение* $[\cdot] : X \to [X]$ $(x \mapsto [x])$ *— сублинейная биекция.*

Таким образом, любой СВК можно инъективно и сублинейно вложить в некоторый выпуклый конус множеств. В конусе подмножеств ЛВП „овыпукление" можно свести к взятию выпуклой оболочки.

Тем самым, мы приходим к следующей схеме связи трех базовых объектов нашей теории:

$$\boxed{\text{СВК}} \xrightarrow{x \to [x]} \boxed{\text{ВК}} \xrightarrow{CL} \boxed{\text{ЛП}}$$

Список литературы

[1] Becker R. *Convex Cones in Analysis* Hermann, 2006.

[2] Орлов И.В. *Основы сублинейного анализа — 1: Субвыпуклые конусы.* Соврем. мат. Фундам. направл.—2016(в печати).

[3] Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.*— М.: Физматлит. —2004.