Решение задач на условный экстремум методом введения вспомогательного параметра

Домбровская Альбина Геннадьевна

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)

e-mail: albinna_dombrovskaya@mail.ru

Известно, что имеются классические методы решения задач на условный экстремум такие как: метод исключения части переменных, метод множителей Лагранжа [1]. В данной работе представлен элементарный метод решения задач на условный экстремум двух переменных — метод введения вспомогательного параметра. Суть метода состоит в том, что если ввести параметр вместо условия на экстремум, тогда решение задачи сводится к нахождению экстремального значению параметра при котором система имеет решение.

Пусть требуется найти экстремумы функции двух переменных

$$\begin{cases} f(x;y) \to extr, \\ g(x;y) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} f(x;y) = 0, \\ g(x;y) \to extr. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим некоторые типы задач на условный экстремум в зависимости от того, что представляют собой функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$.

1. **Окружность–прямая.** В этом случае $f(x;y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ — окружность, $g(x;y) = ax + by + c$ — прямая. Тогда задача на условный

экстремум может быть записана в виде

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \to extr, \\ ax+by+c=0; \end{cases} \tag{3}$$

или

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2, \\ ax+by+c \to extr. \end{cases} \tag{4}$$

2. **Гипербола–прямая.** В этом случае $f(x;y)=(x-x_0)(y-y_0)$ — гипербола, $g(x;y)=ax+by+c$ — прямая. Задача на условный экстремум может иметь вид

$$\begin{cases} (x-x_0)(y-y_0) \to extr, \\ ax+by+c=0; \end{cases} \tag{5}$$

или

$$\begin{cases} (x-x_0)(y-y_0) = d, \\ ax+by+c \to extr. \end{cases} \tag{6}$$

3. **Парабола–прямая.** Где $f(x;y) = a(x-x_0)^2+y_0$ — парабола, $g(x;y)=ax+by+c$ — прямая. Задача на условный экстремум иметь вид

$$\begin{cases} a(x-x_0)^2+y_0 \to extr, \\ ax+by+c=0; \end{cases} \tag{7}$$

или

$$\begin{cases} y=a(x-x_0)^2+y_0, \\ ax+by+c \to extr. \end{cases} \tag{8}$$

Ведем вспомогательный параметр p. Тогда условие этой задачи можно переформулировать. Найти максимальное и минимальное значение параметра p, при котором имеет решение система (9) (или система (10)).

$$\begin{cases} f(x;y)=p, \\ g(x;y)=0; \end{cases} \tag{9}$$

или

$$\begin{cases} f(x;y)=0, \\ g(x;y)=p. \end{cases} \tag{10}$$

Существует по меньшей мере три элементарных способа решения каждой из задач — графический, через дискриминант и переход к параметрическим координатам.

Рассмотрим некоторые примеры решения задач нахождения экстремума методом введения вспомогательного параметра. Решая систему (9) (или систему (10)) методом подстановки, получим квадратное уравнение относительно параметра p, где дискриминант $D \geq 0$ — условие существования решения.

Пример 1. Найти условный экстремум функции $f(x;y) = x^2 + y^2$, если $x + y - 2 = 0$.

Решение. Введем вспомогательный параметр p. Следовательно, будем искать максимальное и минимальное значение параметра p, при котором имеет решение система (11)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Решая систему (5) методом подстановки, получим

$$x^2 - 4x + (4 - p) = 0.$$

Дискриминант $D = 16 - 8(4 - p) \geq 0$, тогда $p \geq 2$. Следовательно, $p_{\min} = 2$, т.е. наименьший радиус окружности $R = \sqrt{2}$, при котором имеется общая точка с прямой $x + y - 2 = 0$.

Ответ. $f_{\min} = 2$, $f_{\max}$ — не существует.

Пример 2. Найти условный экстремум функции $f(x;y) = 2x + 3y$, если $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Аналогично, введем вспомогательный параметр p. Будем искать максимальное и минимальное значение параметра p, при котором имеет решение система (12)

$$\begin{cases} 2x + 3y = p, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \tag{12}$$

Решая систему (7) методом подстановки, получим

$$13x^2 - 4px + (p^2 - 36) = 0.$$

Дискриминант $D = 16p^2 - 52(p^2 - 36) \geq 0$, тогда имеем $p^2 \leq 52$, т.е. $-2\sqrt{13} \leq p \leq 2\sqrt{13}$. Следовательно, $p_{\min} = -2\sqrt{13}$, $p_{\max} = 2\sqrt{13}$.

Ответ. $f_{\min} = -2\sqrt{13}$, $f_{\max} = 2\sqrt{13}$

Пример 3. Найти экстремум функции $f(x;y) = (y-2)x$, если $y-2x-3 = 0$.

Решение. Введем вспомогательный параметр p. Значение параметра p, при котором имеет решение система (13) — экстремум функции $f(x;y)$.

$$\begin{cases} (y - 2)x = p, \\ y - 2x - 3 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Решая систему (13), получим

$$2x^2 + x - p = 0.$$

Дискриминант $D = 1 + 8p \geq 0$, тогда $p \geq -0,125$. Следовательно, $p_{\min} = -0,125$.

Ответ. $f_{\min} = -0,125$, $f_{\max}$ — не существует.

Пример 4. Найти экстремум функции $f(x;y) = 2y + x - 4$, если $y = 1 - (x+3)^2$.

Решение. Введем вспомогательный параметр p. Значение параметра p, при котором имеет решение система (14) — экстремум функции $f(x;y) = 2y + x - 4$.

$$\begin{cases} 2y + x - 4 = p, \\ y = 1 - (x+3)^2. \end{cases} \tag{14}$$

Выразим y в первом уравнении системы (14) и подставим во второе уравнение, получим

$$2x^2 + 11x + (22 + p) = 0.$$

Дискриминант $D = 121 - 8(22 + p) \geq 0$, отсюда $p \leq 6,875$. Следовательно, $p_{\max} = 6,875$.

Ответ. $f_{\max} = 18,25$, $f_{\min}$ — не существует.

Замечание. В задачах на условный экстремум с прямой $ax + by + c = 0$ можно брать общее уравнение кривой второго порядка $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 0$. Каждая такая задача сводится к квадратному уравнению, если решать через дискриминант.

Список литературы

[1] Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. *Вариационное исчисление.* – М.: Изд-во «Наука», – 1973.

[2] Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. *Задачи с параметрами.* – К.: РИА "Текст"; МП "ОКО – 1992 – С. 290.