Интегро-дифференциальные уравнения типа Бенджамина-Оно

Быкова Екатерина Олеговна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра дифференциальных уравнений и геометрии (группа 602)
e-mail: yadoog@rambler.ru

В монографии В.И. Жука [1] для исследования гидродинамической устойчивости используется нелинейная асимптотическая теория взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком, которая базируется на решении уравнений Бюргерса, Бенджамина-Оно (БО), Кордевега-де Вризи, интегро-дифференциальных уравнениях.

Нелинейное эволюционное уравнение

$$u_t + uu_x = H\{u_{xx}\}, H\{u\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ud\xi}{\xi - x}, \tag{1}$$

где H – оператор Коши-Гильберта, предложено Бенджамином [2] и позже Оно [3] для описания внутренних волн в стратифицированной жидкости. Более общим является интегро-дифференциальное уравнение [4] для длинных гравитационных волн в стратифицированной конечной глубины и содержит уравнение Бенджамина-Оно в приближении глубокой воды, а в приближении мелкой воды переходит в уравнение Кордевега-де Вриза [4].

Уравнение Бенджамина-Оно также связано с исследованием процессов распространения возмущений в пограничном слое [1]. Возмущения, при определенных амплитудах и длинах волн, в пограничном слое подчиняются уравнениям Бюргерса

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \tag{2}$$

и Бенджамина-Оно в условиях сверх- и дозвукового обтекания соответственно.

Неоднородное уравнение Бенджамина-Оно

$$u_t + uu_x = H\{u_{xx}\} - \varphi(x,t) \tag{3}$$

связано с эволюцией возмущений в дозвуковом пограничном слое, неоднородный член $\varphi(x,t)$ соответствует наличию короткой неровности на обтекаемой твердой поверхности [1]:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\xi\xi}d\xi}{\xi - x},$$

$y = g(x,t)$ – подвижный контур (обтекаемая поверхность).

В качестве примеров неоднородности используют углубление на поверхности с формой

$$g = \begin{cases} -H(t)cos^2\left(\frac{\pi x}{2b}\right), \ |x| < b, \\ 0, \ |x| > b, \end{cases}$$

$$H(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ g_0 t, \ 0 < t < 1, \\ g_0, \ t > 1, \end{cases}$$

$\varphi = H\{g_{xx}\}, \ t > 0.$

Для тестовых примеров используется точное решение однородного уравнения Бенджамина-Оно

$$u = -a\left[1 + \frac{a^2}{16}\left(x + \frac{a}{4}t\right)^2\right]^{-1}, \ a > 0.$$

Стационарное решение $u(x,t) = f(x)$ для уравнения (0.2)-(3) удовлетворяет уравнениям

$$ff' - f'' = 0, \ ff' - H\{f''\} = 0.$$

Для уравнения Бюргерса (0.2)

$$u = -c_0\left\{1 + th\left[\frac{c_0}{2}(x - x_0)\right]\right\}.$$

Периодическая задача Коши для уравнения типа БО

$$u_t = uu_x + H_{per}u_{xx}, \ 0 \leq t \leq T, \ x \in \mathbb{T},$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \mathbb{T} = \mathbb{R}/2L\mathbb{Z},$$

где u_0 – $2L$ периодическая функция, а

$$H_{per}x = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} ctg\left(\frac{\pi y}{2L}\right)u(x-y)dy.$$

уравнения типа БО для внутренних волн стратифицированной жидкости имеет вид [4]:

$$u_t - cuu_x + Tu_{xx} = 0,$$

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{cth\frac{\pi(y-x)}{2d} - sign(y-x)\right\}\frac{f(y)}{2d}dy$$

и переходит в пределе в уравнение Кордевега-де Вриза.

Линеаризованное уравнение БО (0.1) сведено к уравнению Шредингера, с помощью интегральных преобразований получены решения приведенных уравнений с добавленным интегральным оператором типа свертки. В общем случае задачи для уравнений типа БО сведены к нелинейным интегральным уравнениям удобным для численного решения.

Список литературы

[1] Жук В.И. *Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны.* – М.: Наука, 2001. – 167 с.

[2] Benjamin T.B. *Lectures on Nonlinear Wave Motion* // Lecture Notes in Applied Mathematics. – №15, 1974. – P. 3-47.

[3] Ono H. *Algebraic solitary waves in stratified fluids* // J. Phys. Soc. Japan. – №39 (4), 1975. – P.1082-1091.
http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.39.1082

[4] Josepf R.I. *Solitary waves in a finetedepth fluid* // J. Phys. A. – Vol.10. – №12, 1977. – P.L225-L227.