s - числа измеримых операторов

Белялова Азизе Рустемовна
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)
e-mail: asya1933matan@mail.ru

При построении симметричных пространств измеримых функций существенную роль играют убывающие перестановки. Аналогичную роль в некоммутативном случае играют убывающие перестановки измеримых операторов. Впервые определение убывающей перестановки измеримых операторов было дано В.И.Овчинниковым [3], позднее — несколько иначе, М.Г.Сонисом [2]. Цель данной работы рассмотреть оба определения убывающих перестановок измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, с мерой Сигала на проекторах, и провести их сравнение.

$*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана впервые появились в работе Е.Сигала(1953). Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$– $*$- алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H и $\mathcal{M}$ - $*$-подалгебра в $B(H)$. Через $\mathcal{M}'$ обозначается коммутант $\mathcal{M} \subseteq B(H)$, а через $\mathcal{M}''$ - бикоммутант.

$*$-Подалгебра $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ называется алгеброй фон Неймана, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

Пусть $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M})$ — $*$-алгебра всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ линейных операторов. Оператор $T \in S(\mathcal{M})$ с областью определения $D(T)$ называется τ-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P(H) \subseteq D(T)$ и $\tau(P^{\perp}) \leq \varepsilon$

Обозначим множество всех τ-измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов через $S(\mathcal{M}, \tau)$. Ясно, что $\mathcal{M} \subseteq S(\mathcal{M}, \tau) \subseteq S(\mathcal{M})$.

Функцией распределения оператора T из $S(\mathcal{M}, \tau)$ называется функция $n(T)(t)$, определяемая равенством:

$$n(T)(t) = \tau(E_{(t,\infty)}(|T|)), \quad t \geq 0,$$

где $E_{(t,\infty)}(|T|)$ спектральный проектор оператора $|T|$, соответствующий интервалу (t, ∞).

Невозрастающей перестановкой оператора $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ (по Овчинникову) называется функция

$$\mu(T) : (0, \infty) \to [0, \infty),$$

определяемая равенством:

$$\mu(T)(t) = \inf\{\|TP\|_{\mathcal{M}} : P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \quad \tau(P^{\perp}) \leq t\}, \quad t > 0$$

Линейный оператор A с областью определения $D(A)$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ ($A\eta\mathcal{M}$), если $UD(A) \subseteq D(A)$ и $UA \subseteq AU$ для любого унитарного оператора U из коммутанта $\mathcal{M}'$.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ - множество ортопроекторов алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Мерой на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ (мерой Сигала) называется отображение $m : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to [0; \infty)$, которое обладает следующими свойствами:

(1) Если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $P_1 \perp P_2$, то $m(P_1 + P_2) = m(P_1) + m(P_2)$;
(2) Если $\{P_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $P \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $P_\alpha \uparrow P$, то $m(P_\alpha) \uparrow m(P)$;
(3) Если U — унитарный оператор из $\mathcal{M}$ и $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, то $m(U^*PU) = m(P)$.

Легко видеть, что если τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, то $m = \tau|_{\mathcal{P}(\mathcal{M})}$ — мера Сигала.

Пусть оператор $A\eta\mathcal{M}$ и P – проектор на замкнутое подпространство $\overline{A(H)}$. Метрическим рангом $r(A)$ оператора A называется мера Сигала проектора P, т.е. $r(A) = \tau(P)$.

Для любого $A \in \mathcal{M}$ и $t \geq 0$ Значения функции

$$s_t(A) = \inf\{||A - K|| \colon K \in \mathcal{M},\ r(K) \leq t < \infty\},\ s_\infty(A) = \lim_{t \to \infty} s_t(A)$$

называются s - числами оператора A (по Сонису).

Теорема 1. *Если $T \in \mathcal{M}$, то функции $\mu(T)(t)$ и $s_t(T)$ совпадают, т.е. $\mu(T)(t) = s_t(T)$*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{M}$ и

$$s_t(T) = \inf\{||T - R|| \colon R \in \mathcal{M}, \quad r(R) \leq t < \infty\}$$

Обозначим

$$\mathfrak{R}_t = \{R \in S(\mathcal{M}, \tau) \colon \tau(s(|R|)) \leqslant t\},$$

где $s(|R|)$ — носитель оператора $|R|$. Так как $r(K) = \tau(s(|R|))$, то

$$s_t(T) = \inf\{\|T - R\|_{\mathcal{M}} \colon R \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{R}_t\}.$$

Покажем, что $\mu(T)(t) = s_t(T)$.

Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T, $\mu(T)(t) = \alpha$ и

$$R = U \int\limits_{\alpha}^{\infty} \lambda dE_\lambda,$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T|$. Тогда

$$\|T - R\|_{\mathcal{M}} = \|U \int\limits_{0}^{\alpha} \lambda dE_\lambda\|_{\mathcal{M}} = \|UE_{(0,\alpha]}(|T|)|T|E_{(0,\alpha]}(|T|)\|_{\mathcal{M}} \leqslant \alpha = \mu(T)(t).$$

При этом

$$\tau(s(|R|)) = n(T)(\alpha) = n(T)(\mu(T)(t)) \leqslant t,$$

то есть,

$$\beta = \inf\{\|T - R\|_{\mathcal{M}} \colon R \in \mathfrak{R}_t \cap \mathcal{M}\} \leqslant \mu(T)(t).$$

С другой стороны, пусть $R \in \mathfrak{R}_t \cap \mathcal{M}$ и $E = I - s(|R|)$. Так как $TE = (T-R)E$, то $\|TE\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|T - R\|_{\mathcal{M}}$. Кроме того, $\tau(I - E) = \tau(s(|R|)) \leqslant t$. Следовательно,

$$\mu(T)(t) \leqslant \beta.$$

Таким образом,

$$\mu(T)(t) = \beta = \inf\{\|T - R\|_{\mathcal{M}} \colon R \in \mathfrak{R}_t \cap \mathcal{M}\} = s_t(T).$$

Список литературы

[1] Муратов М.А., Чилин В.И. *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*– Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – т.69.– 390с.

[2] М. Г. Сонис *Об одном классе операторов в алгебрах фон Неймана с мерой Сигала на проекторах* – Матем. сб., 1971 – том 84(126), номер 3, 353–368

[3] В. И. Овчинников *О s-числах измеримых операторов* – Функц. анализ и его прил., 1970 –том 4, выпуск 3, 78–85

[4] Strătilă S., L. Zsidó L.. *Lectures on von Neumann algebras* – Bucharest: Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.