Алгебры Наймарка и теорема Фуглида

Асанов Ремзи Музакерович
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
кафедра математического анализа (группа 603)
e-mail: remziasanov@gmail.com

Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивная алгебра над полем комплексных чисел и $a \in \mathcal{A}$ — нормальный элемент, т.е. $a^*a = aa^*$. Алгебра является *фуглидовой.* или F – алгеброй, если из условия, что $x \in \mathcal{A}$ коммутирует с нормальным элементом $a \in \mathcal{A}$, следует, что он коммутирует и с его сопряженным a^*:

$$xa = ax, \quad aa^* = a^*a \Rightarrow xa^* = a^*x.$$

(F) – алгебрами являются: алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, и значит, все её $*$-подалгебры; C^*-алгебры; любая коммутативная $*$-алгебра.

Инволютивная алгебра $(\mathcal{A}, *)$ называется "условно фуглидовой" или (CF)-алгеброй, если из условия, что нормальный элемент $x \in \mathcal{A}$ коммутирует с нормальным элементом $a \in \mathcal{A}$, следует, что он коммутирует и с его сопряженным a^*:

$$xa = ax, \; xx^* = x^*x, \; aa^* = a^*a \Rightarrow xa^* = a^*x.$$

В (CF)-алгебрах всякое коммутативное семейство нормальных операторов содержится в максимальной коммутативной $*$-алгебре.

Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{N}(H)$ совокупность всех троек $\xi = (A, x, y)$, где $x, y \in H$, $A \in \mathcal{B}(H)$. В $\mathcal{N}(H)$ вводятся алгебраические операции и инволюция:

1). Сложение: $(A_1, x_1, y_1) + (A_2, x_2, y_2) = (A_1 + A_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 + A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

2). Умножение на скаляр: $\lambda(A, x, y) = (\lambda A, \overline{\lambda} x, \lambda y)$,

$$\lambda \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda A_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda y_1 \end{pmatrix}$$

3). Умножение: $(A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2) = (A_1 A_2, A_2^* x_1, A_1 y_2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix};$$

4). Инволюция: $(A, x, y)^\star = (A^*, y, x)$,

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}^\star = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. $\mathcal{N}(H)$ — *ассоциативная* $*$*-алгебра.*

Доказательство. Покажем ассоциативность умножения:

$$\Big((A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2)\Big) \circ (A_3, x_3, y_3) = (A_1, x_1, y_1) \circ \Big((A_2, x_2, y_2) \circ (A_3, x_3, y_3)\Big).$$

Так как

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^* A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 A_2 y_3 \end{pmatrix},$$

то $\Big((A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2)\Big) \circ (A_3, x_3, y_3) = (A_1 A_2 A_3, A_3^* A_2^* x_1, A_1 A_2 y_3)$.

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^* x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 y_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A_3^* x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^* A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 A_2 y_3 \end{pmatrix},$$

т.е. $(A_1, x_1, y_1) \circ \Big((A_2, x_2, y_2) \circ (A_3, x_3, y_3)\Big) = (A_1 A_2 A_3, A_3^* A_2^* x_1, A_1 A_2 y_3)$.

Следовательно умножение в алгебре $\mathcal{N}(H)$ — операция ассоциативная. $\square$

Утверждение 2. $\mathcal{N}(H)$ — $*$*-алгебра.*

Доказательство. Покажем, что в алгебре выполнены свойства инволюции. Так как

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}^{**} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & (A^*)^* & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

то $((A, x, y)^*)^* = (A, x, y)$.

Далее,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 + A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 + y_2 \end{pmatrix}^* =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 & 0 & 0 \\ 0 & (A_1 + A_2)^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* + A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix}^*,$$

т.е. $\big((A_1, x_1, y_1) + (A_2, x_2, y_2)\big)^* = (A_2, x_2, y_2)^* + (A_1, x_1, y_1)^*$.

Кроме того,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} A_2^* x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 y_2 \end{pmatrix}^* =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & A_2^* x_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \end{pmatrix}^* \circ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 y_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* A_1^* & 0 \\ 0 & 0 & A_2^* x_1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\big((A_1, x_1, y_1) \circ (A_2, x_2, y_2)\big)^* = (A_2, x_2, y_2)^* \circ (A_1, x_1, y_1)^*$.

Наконец,

$$\left(\lambda\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix}\overline{\lambda}x & 0 & 0\\ 0 & \lambda A & 0\\ 0 & 0 & \lambda y\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}\lambda y & 0 & 0\\ 0 & \overline{\lambda}A^* & 0\\ 0 & 0 & \overline{\lambda}x\end{pmatrix} =$$

$$= \overline{\lambda}\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & A^* & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix} = \overline{\lambda}\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}^*.$$

Следовательно, $(\lambda(A,x,y))^* = \overline{\lambda}(A,x,y)^*$. Таким образом, $\mathcal{N}(H)$ – алгебра с инволюцией. □

Утверждение 3. *$\mathcal{N}(H)$ — банахова $*$ - алгебра относительно нормы*

$$\|(A,x,y)\| = \|A\|_{\mathcal{B}(H)} + \|x\|_H + \|y\|_H.$$

Доказательство. Легко видеть, что $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Пусть $\{(A_n,x_n,y_n)\}$ — фундаментальная последовательность в $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для любых $n, m \geq n_0$ выполнено неравенство

$$\|(A_n,x_n,y_n) - (A_m,x_m,y_m)\| < \varepsilon.$$

Тогда $\|A_n - A_m\|_{\mathcal{B}(H)} + \|x_n - x_m\|_H + \|y_n - y_m\|_{<}\varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{A_n\}$ фундаментальна в $\mathcal{B}(H)$, а последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальны в H. Так как $\mathcal{B}(H)$ — банахова алгебра, а H — гильбертово пространство (а потому банахово), то все три последовательности сходятся:

$$A_n \to A_0 \in \mathcal{B}(H),\ x_n \to x_0 \in H,\ y_n \to y_0.$$

Поэтому $(A_n,x_n,y_n) \to (A_0,x_0,y_0) \in \mathcal{N}(H)$, т.е. $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$ — банахово пространство. □

Замкнутые $*$ - подалгебры алгебры $(\mathcal{N}(H), \|\cdot\|)$ называются *алгебрами Наймарка.*

Теорема 1. *Всякая алгебра Наймарка условно фуглидова.*

Список литературы

[1] Р.С.Исмагилов, "О неприводимости представлений групп измеримых токов,"*Функц. анализ и его прил.*, 28:2 (1994), 21–30.

[2] Fuglede B. A commutativity Theorem for Normal Operators/ B.Fuglede// Proc. Nat. Acad. Sci USA. – 1950. – Vol. 36. – P. 35-40.

[3] М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, В. С. Шульман, "Теорема Фуглида–Патнэма в алгебрах с инволюциями Матем. заметки, 98:4 (2015), 483 – 497.

[4] В. С. Шульман, "Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа Π_1 Матем. сб., 89(131):2(10) (1972), 264 – 279.